TRAITE' DU CALCUL DIFFERENTIEL ET DU CALCUL INTEGRAL, PAR S.F. LACROIX: TRAITÉ DES...

Sylvestre Francois Lacroix



TRAITÉ
DES DIFFÉRENCES
ET
DES SÉRIES.

NOTICE des ouvrages publiés par S. F. LACROIX, et qui se trouvent chez le même Libraire.

Cours de Mathématiques, à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations, en quatre parties, savoir :

I. Traité élémentaire d'Arithmétique, 2 fr.

II. Elémens d'Algèbre, 4

III. Elémens de Géométrie, précédés de réflexions sur l'ordre à suivre dans ces Elémens, sur la manière de les écrire et sur la méthode en Mathématiques, 4

IV. Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, 4

Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes, ou Elémens de Géométrie descriptive, 2 fr. 5 déc.

Complément des Elémens d'Algèbre, 4 fr.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, avec un Appendice, contenant un traité des Différences et des Séries, 3 vol. *in-4°*. 48 fr.

TRAITÉ
DES DIFFÉRENCES
ET
DES SÉRIES,

Faisant suite au Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral,

PAR S. F. LACROIX.

> Tantùm series juncturaque pollet.
> HORAT.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VIII = 1800.



TABLE.

TRAITÉ DES DIFFÉRENCES ET DES SÉRIES.

N. B. Depuis l'impression du premier volume de cet Ouvrage, M. Murhard a publié en Allemagne une *Bibliotheca Mathematica*, fort utile à ceux qui veulent acquérir de l'érudition en Mathématique; les titres des Livres et des Mémoires y sont classés par ordre de matières.

TRAITÉ



TRAITÉ
DES DIFFÉRENCES
ET
DES SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER.

Du Calcul des Différences.

DANS le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, nous n'avons envisagé les séries que comme un moyen de développer les fonctions algébriques ou transcendantes, de manière à faire connoître quelques-unes des propriétés de ces fonctions, que la forme sous laquelle elles se présentoient ne rendoit pas assez évidentes, ou bien pour en obtenir, dans certains cas, des valeurs approchées. Sous ces différens points de vue, nous avons toujours connu l'origine des séries dont nous avons fait usage, et nous ne nous sommes occupés de leurs propriétés que par rapport aux fonctions dont elles dérivoient; maintenant nous allons les considérer en elles-mêmes et indépendamment d'aucune fonction particulière.

Calcul direct des différences.

859. Supposons qu'on ait une série de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{etc.}$$

dans laquelle les chiffres inférieurs affectés aux coefficiens des puissances de x, et que je nommerai *indices*, font connoître le rang qu'occupe chaque terme : ce qui distingue cette série de toute autre, c'est la loi que suivent les coefficiens des diverses puissances de x ; or, quelle que soit cette loi, il est évident que la valeur de chaque coefficient en particulier dépend du rang qu'il occupe dans la série, en sorte que si l'on avoit l'expression du terme général $A_n x^n$, qui répond à un indice quelconque, on en déduiroit tous les autres, en donnant à n différentes valeurs; car A_0, A_1, A_2, A_3, etc. ne sont autre chose que ce que devient A_n lorsqu'on y fait successivement

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2, \text{ etc.}$$

Faisons donc abstraction de x, ou, ce qui revient au même, faisons $x = 1$, et considérons seulement la série des coefficiens

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3, \text{ etc.}$$

comme représentant la suite des divers états par lesquels passe la fonction A_n, en vertu des accroissemens que reçoit l'indice n.

Soit fait

$$A_1 - A_0 = B_0$$
$$A_2 - A_1 = B_1$$
$$A_3 - A_2 = B_2$$
$$\text{etc.}$$

les quantités B_0, B_1, B_2, etc. qui sont les différences qui règnent entre les termes de la suite précédente, formeront elles-mêmes une nouvelle suite dont la nature dépendra de celle de la première

Si l'on avoit, par exemple, $A_n = 3 + 2n$; en posant successivement $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc. on obtiendroit pour les A la suite des nombres 3, 5, 7, 9, etc. et les B seroient tous égaux à 2 ; en effet, la suite proposée ne seroit autre chose que la *progression par différences* (*).

Dans le cas où les quantités B_0, B_1, B_2, B_3, etc. ne sont pas

(*) C'est ainsi que j'appellerai désormais la progression arithmétique, et je donnerai à la progression géométrique le nom de *progression par quotiens*. Voyez la cinquième édition des *Elémens d'Algèbre de Clairaut*, Tome I, page clxxxvij, et Tome II, p. 331.

toutes égales entr'elles, on en peut déduire une nouvelle suite, en prenant leurs différences, et faisant

$$B_1 - B_0 = C_0$$
$$B_2 - B_1 = C_1$$
$$B_3 - B_2 = C_2$$
etc.

on aura à considérer la série

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3, \text{ etc.}$$

Soit pour exemple $A_n = 5 + 3n^2$; il résultera de cette fonction

$$5, \quad 8, \quad 17, \quad 32, \text{ etc.}$$

pour les nombres A;

$$3, \quad 9, \quad 15, \quad \text{etc.}$$

pour les nombres B;

enfin $\quad 6, \quad 6, \quad 6, \quad$ etc.

pour les nombres C, qui, comme on voit, sont constans. Ces exemples suffisent pour montrer comment on a pu remarquer les différens ordres de séries, en comparant entr'eux les termes successifs d'une même série.

Les quantités $B_0, B_1, B_2 \ldots$, se nomment les *différences premières*, ou simplement les différences des quantités A_0, A_1, A_2, etc.

Les quantités C_0, C_1, C_2, etc. qui sont les différences premières de B_0, ou les différences des différences de A_0, A_1, A_2, A_3, etc. se nomment les *différences secondes* de celles-ci.

Il y a entre les quantités A, B, C, etc. des relations qu'il est important de connoître, et au moyen desquelles on détermine les unes par les autres; ce sont ces relations qui constituent le *Calcul direct des différences.*

860. Soit u_1, u_2, $u_3 \ldots$, une suite de quantités qu'on suppose être des valeurs consécutives que reçoit la fonction u, soit en vertu des variations qu'elle éprouve par elle-même, soit par l'effet de celles qui arrivent à des quantités dont elle dépend; nous ferons

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u \quad = \Delta u \\ u_2 - u_1 \ = \Delta u_1 \\ u_3 - u_2 \ = \Delta u_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

en nous servant de la caractéristique Δ, pour désigner la différence qui existe entre les deux états consécutifs d'une même quantité. Lorsque cette quantité varie par des degrés égaux, les différences Δu, Δu_1, Δu_2, etc. sont toutes égales ; mais si le contraire a lieu, on fera par analogie

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1 - \Delta u \quad = \Delta . \Delta u \quad = \Delta^2 u \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 \quad = \Delta . \Delta u_1 \quad = \Delta^2 u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta . \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u \quad = \Delta . \Delta^2 u \quad = \Delta^3 u \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 \quad = \Delta . \Delta^2 u_1 \quad = \Delta^3 u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n-1} = \Delta . \Delta^2 u_{n-1} = \Delta^3 u_{n-1} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (3),$$

Cela posé, on aura, en vertu des équations (1), (2), (3),

$$\begin{array}{l|l|l} u_1 = u \quad + \Delta u & & \\ u_2 = u_1 \quad + \Delta u_1 & \Delta u_1 \quad = \Delta u + \Delta^2 u & \\ u_3 = u_2 \quad + \Delta u_2 & \Delta u_2 \quad = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 & \Delta^2 u_1 \quad = \Delta^2 u \quad + \Delta^3 u \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1} & \Delta u_{n-1} = \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-2} & \Delta^2 u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-3} + \Delta^3 u_{n-3}. \end{array}$$

Par le moyen de ces valeurs, on peut arriver à des expressions de u_1, u_2, $u_3 \dots u_n$, qui ne dépendent que de la quantité primordiale u, et de ses différences successives Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. en faisant les substitutions nécessaires on obtiendra

$$\begin{array}{l} u_1 = u + \Delta u \\ u_2 = u + 2 \Delta u + \Delta^2 u \\ u_3 = u + 3 \Delta u + 3 \Delta^2 u + \Delta^3 u \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

d'où on conclura par analogie

$$u_n = u + \frac{n}{1} \Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u + \text{etc.}$$

puisque les coefficiens numériques des expressions précédentes sont les mêmes que ceux des puissances du binome : la démonstration suivante justifiera pleinement cette conclusion.

Il est évident que l'expression de u_n ne peut être que de la forme

$$u_n = u + A'\Delta u + A''\Delta^2 u + A'''\Delta^3 u + \text{etc.}$$

dans laquelle A', A'', A''', etc. désignent des coefficiens numériques, indépendans de u et de ses différences, et il doit y avoir entre u_{n+1} et u_1 les mêmes relations qu'entre u_n et u; car dans le second cas, le nombre des termes est le même que dans le premier, et tout le changement dans l'hypothèse se réduit à partir d'un terme plus avancé : on aura donc

$$u_{n+1} = u_1 + A'\Delta u_1 + A''\Delta^2 u_1 + A'''\Delta^3 u_1 + \text{etc.}$$

Si l'on met, au lieu de Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$, etc. leurs valeurs en u, Δu, $\Delta^2 u$, etc. il viendra

$$u_{n+1} = u + (1 + A')\Delta u + (A' + A'')\Delta^2 u + (A'' + A''')\Delta^3 u + \text{etc.}$$

mais en représentant par

$$1 + B'x + B''x^2 + B'''x^3 + \text{etc.}$$

le développement de $(1+x)^n$, on trouvera

$$(1+x)^{n+1} = 1 + (1 + B')x + (B' + B'')x^2 + (B'' + B''')x^3 + \text{etc.}$$

on voit ici que dans le passage de l'exposant n à l'exposant $n+1$, les coefficiens du développement du binome éprouvent les mêmes changemens que ceux de l'expression de u_n; et comme les uns et les autres prennent les mêmes accroissemens, il s'ensuit que dès qu'ils ont été identiques dans un cas, ils doivent l'être toujours : nous pourrons donc écrire

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

On peut également exprimer la différence d'un ordre quelconque, $\Delta^n u$, par le moyen des valeurs consécutives u, u_1, u_2.... etc. on tire d'abord des équations (1), (2), (3),

$$\Delta u = u_1 - u$$
$$\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u$$
$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u$$
....

et l'analogie indique l'expression générale

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \text{etc.}$$

qui se vérifie comme la précédente. En effet, en posant

$$\Delta^n u = u_n + A' u_{n-1} + A'' u_{n-2} + A''' u_{n-3} + \text{etc.}$$

on doit avoir

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} + A' u_n + A'' u_{n-1} + A''' u_{n-2} + \text{etc.}$$

mais en substituant pour $\Delta^n u_1$ sa valeur $\Delta^n u + \Delta^{n+1} u$, et mettant à la place de $\Delta^n u$ son développement, il viendra

$$\Delta^{n+1} u = u_{n+1} + (A' - 1) u_n + (A'' - A') u_{n-1} + (A''' - A'') u_{n-2} + \text{etc.}$$

Or le développement de $(x-1)^n$ étant représenté par

$$x^n + B' x^{n-1} + B'' x^{n-2} + B''' x^{n-3} + \text{etc.}$$

on aura

$$(x-1)^{n+1} = x^{n+1} + (B'-1) x^n + (B''-B') x^{n-1} + (B'''-B'') x^{n-2} + \text{etc.}$$

et l'on conclura comme ci-dessus que les coefficiens du développement de $\Delta^n u$, recevant les mêmes accroissemens que ceux du développement de $(x-1)^n$, et commençant par avoir les mêmes valeurs, doivent demeurer identiques avec ces derniers.

Il suit de ce qui précède que l'on peut écrire les équations

$$u_n = (1 + \Delta u)^n, \qquad \Delta^n u = (u-1)^n,$$

pourvu que l'on se rappelle de changer dans le développement de la première, les exposans des puissances de Δu en exposans de la caractéristique Δ, et que dans celui de la seconde, on transforme les exposans de u en indices.

861. Lorsqu'une fonction est donnée, rien n'est plus facile que d'en obtenir les différences successives ; nous prendrons d'abord pour exemple la fonction x^m. Faisons $u = x^m$, et supposons que x augmente de la quantité h, nous aurons $u_1 = (x+h)^m$, et par conséquent

$$\Delta u = (x+h)^m - x^m = m x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} h^3 + \text{etc.}$$

Pour passer aux différences ultérieures $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. il faut faire varier x de nouveau, ce qui présente deux hypothèses, l'une consiste à supposer que la quantité x prenne toujours des accroissemens égaux, et l'autre que ces accroissemens soient eux-mêmes variables ; nous nous occuperons d'abord de la première. En substituant $x+h$ au lieu de x dans Δu, on aura

$$\Delta u_1 = m h (x+h)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 (x+h)^{m-2} + \text{etc.}$$

Il est visible que si l'on développe l'expression de Δu_1, et que l'on en

retranche celle de Δu, le résultat ordonné par rapport aux puissances de h sera de la forme

$$\Delta^2 u = m(m-1)x^{m-2}h^2 + M_3 x^{m-3}h^3 + M_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

M_3, M_4, etc. désignant des coefficiens dépendans de l'exposant m.

Par une nouvelle substitution de $x+h$ dans cette dernière équation, on parviendroit à $\Delta^2 u_1$, et, en observant que $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$, on obtiendroit

$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + M'_4 x^{m-4}h^4 + \text{etc.}$$

La loi des premiers termes de chacun de ces développemens est évidente, et l'on voit que l'expression de $\Delta^n u$ doit commencer par

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n;$$

mais pour parvenir au terme général de cette expression, il sera plus commode de former immédiatement $\Delta^n u$, par le moyen des valeurs de u_1, u_2, u_3, etc. sans passer par celles de Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est évident que dans l'hypothèse présente les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots\ldots u_n,$$

répondent à

$$x+h, \quad x+2h, \quad x+3h, \ldots . x+nh,$$

et que l'on a par conséquent

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m, \ldots . u_n = (x+nh)^m;$$

on tirera de là

$$\Delta^n u = [x+nh]^m - \frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m + \frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m + \text{etc.}$$

Si l'on désigne par i l'exposant de h dans le terme général du développement de l'équation ci-dessus, l'expression de ce terme sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots i} x^{m-i}h^i \times$$
$$\left\{ n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.} \right\};$$

mais comme nous avons observé que le développement de $\Delta^n u$ ne pouvoit contenir des puissances de h dont l'exposant fût moindre que n, il s'ensuit que la fonction

$$n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{etc.}$$

est nulle tant que $i<n$, ce qu'il est aisé de vérifier : d'un autre côté le coefficient $\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots i}$ s'évanouissant lorsque $i=m+1$, il en résulte que la plus haute puissance de h, dans le développement de $\Delta^n u$, ne peut être que h^m et que par conséquent $\Delta^n u$ se réduit à son premier terme

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots 2.1.h^n$$

dans le cas où l'on a $m=n$. Il est évident qu'alors les différences ultérieures $\Delta^{n+1}u$, $\Delta^{n+2}u$, etc. sont nulles.

Il est facile de conclure de-là que toute fonction rationnelle et entière de x a toujours des différences constantes, savoir : celles dont l'ordre est marqué par l'exposant de la plus haute puissance de x, qui soit dans la fonction proposée. En effet, cette fonction étant de la forme $Ax^\alpha+Bx^\epsilon+Cx^\gamma+$ etc. on aura nécessairement $\Delta^n(Ax^\alpha+Bx^\epsilon+Cx^\gamma+\text{etc.})=A\Delta^n.x^\alpha+B\Delta^n.x^\epsilon+C\Delta^n.x^\gamma+$ etc. (*); et si α désigne le plus haut exposant de x, il viendra pour le cas où $n=\alpha$,

$$\Delta^\alpha.x^\alpha=1.2\ldots\ldots\alpha k^\alpha, \quad \Delta^\alpha.x^\epsilon=0, \quad \Delta^\alpha.x^\gamma=0, \text{ etc.}$$

en sorte que $\Delta^\alpha(Ax^\alpha+Bx^\epsilon+Cx^\gamma+\text{etc.})=1.2.3\ldots\ldots\alpha A k^\alpha$. Il n'est pas nécessaire d'avertir que chaque fois qu'on prend la différence de deux fonctions, cette opération peut faire disparoître une constante ; car les calculs précédens ne diffèrent de ceux du n°. 10, qu'en ce que nous avons considéré en même tems tous les termes du développement de la différence, au lieu de nous borner au premier, comme pour le Calcul différentiel.

Au moyen de ce qui précède on développeroit sans difficulté les différences d'une fonction composée de puissances quelconques de x. Avant de pousser plus loin, il convient de montrer comment les mêmes développemens, et en général ceux des différences des fonctions quelconques, peuvent s'obtenir par le moyen du Calcul différentiel.

862. Le Calcul différentiel et celui des différences, quoiqu'étant bien distincts, comme on le verra dans la suite, ont néanmoins de grands rapports entr'eux et peuvent s'appliquer l'un à l'autre.

(*) Il ne faut pas confondre $\Delta^n.x^\alpha$ avec $\Delta^n x^\alpha$; car la première de ces expressions est la différence de l'ordre n de la fonction x^α, tandis que $\Delta^n x^\alpha=(\Delta^n x)^\alpha$.

Lorsque

Lorsque l'on considère le premier sous le point de vue où l'a présenté Léibnitz, ou par la théorie des limites, il devient un cas particulier du second, ainsi que nous l'avons montré dans les n°s 92 et 285. Nous ne répéterons pas ici ce qui a été dit dans ces articles, mais nous déduirons la série de Taylor de l'équation

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

En lui donnant la forme

$$u_n = u + \frac{n\alpha}{1}\frac{\Delta n}{\alpha} + \frac{n\alpha(n-1)\alpha}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{\alpha^2} + \frac{n\alpha(n-1)\alpha(n-2)\alpha}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{\alpha^3} + \text{etc.}$$

et supposant que α soit l'accroissement que reçoit x lorsque la fonction u devient $u + \Delta u$, la valeur u_n sera celle que prend u, quand x se change en $x + n\alpha$. Faisant ensuite $n\alpha = h$, et regardant l'accroissement α comme évanouissant ou infiniment petit, il faudra considérer le nombre n comme infiniment grand; en vertu de cette supposition les quantités $n\alpha$, $(n-1)\alpha$, $(n-2)\alpha \ldots$ etc. deviendront toutes égales entr'elles, tandis que les quantités $\frac{\Delta u}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 u}{\alpha^2}$, $\frac{\Delta^3 u}{\alpha^3}$, etc. coïncideront avec les coefficiens différentiels

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

on aura donc

$$u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

pour le développement de la fonction u, quand x est devenu $x + h$. C'est à peu près ainsi que Taylor est parvenu au théorême qui porte son nom. On peut substituer sans peine la considération des limites aux raisonnemens ci-dessus, en observant que

$$n\alpha(n-1)\alpha = n^2\alpha^2\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad n\alpha(n-1)\alpha(n-2)\alpha = n^3\alpha^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right), \text{ etc.}$$

et que par conséquent leurs limites, relativement à l'accroissement de n, sont $n^2\alpha^2$, $n^3\alpha^3$, etc. ou h^2, h^3, etc.

Lorsqu'une fois on est parvenu au théorême de Taylor, la théorie analytique du Calcul différentiel n'offre plus aucune difficulté;

ainsi ce qui précède suffit pour montrer comment il résulte du Calcul des différences (*).

(*) Cette manière de le présenter peut avoir ses avantages, mais elle est moins simple et moins élégante que celle dont nous avons fait usage dans les nos. 4-10, et que l'on peut abréger encore en employant la théorie des limites; au reste, j'ai lieu de croire que tout bon esprit, qui aura rapproché les divers points de vue sous lesquels ce calcul est traité dans le premier volume, reconnoîtra que pour le fond ce sont les mêmes idées, et qu'en leur donnant les développemens nécessaires on parvient toujours à des conséquences également évidentes. Je ferai principalement remarquer que de quelque source que l'on tire le Calcul différentiel, la notation ne doit pas changer et qu'elle réunit tous les avantages que l'on peut desirer dans les signes algébriques. Je ne crois pas que ceux qui auront bien saisi l'origine de cette notation dans le no. 9, puissent révoquer en doute son analogie avec les principes de Lagrange; elle est même plus propre que toute autre à en rappeler le souvenir. Quelles que soient les notions préliminaires, *le coefficient différentiel*, ou *la fonction prime* (d'après Lagrange), sera toujours la fonction qui multiplie la première puissance de l'accroissement dans le développement de la différence de la fonction primitive; en prenant le premier terme seul on aura une différence tronquée ou *une différentielle*, et cela, *sans rien prononcer sur sa grandeur absolue*, *sans rappeler en aucune manière l'idée d'infiniment petit*. Le changement de métaphysique ne sauroit donc conduire à un changement de notation, si, comme il est aisé de s'en convaincre, la notation ancienne a des avantages marqués sur celles qu'on voudroit lui substituer. Il faut d'abord observer qu'elle doit être débarrassée des parenthèses qu'Euler employoit. En effet, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont aussi clairs que $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$; car le sens de la question indique toujours si les variables x et y sont indépendantes ou non, et empêche qu'on ne confonde l'expression $\frac{dz}{dx}$ avec $\frac{\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy}{dx}$, qui ne signifie quelque chose qu'autant qu'on regarde (au moins implicitement) y comme une fonction de x. Legendre, dans ses écrits, avoit déjà supprimé les parenthèses; en l'imitant sur ce point, j'ai cru devoir les consacrer au cas qui se présente le plus rarement, et écrire $\frac{d(z)}{dx}$, pour indiquer que dans z, y varie en même tems que x dont il est supposé dépendre (no. 70). Fontaine, qui le premier fit usage de la notation reçue pour exprimer les coefficiens différentiels, proposa de désigner par $\frac{1}{dx}d\mu$ le rapport de dx à la différentielle complète de μ, afin de le distinguer du coefficient de dx dans cette différentielle, ce qui est aussi fort simple (voyez la table des Mémoires de Fontaine).

863. A l'aide du théorême de Taylor, le développement des différences d'un ordre quelconque pour une fonction quelconque

Les notations employées dans la *Théorie des Fonctions* ne me paroissent pas offrir les mêmes avantages. Les accens ne peuvent guères servir seuls, que lorsqu'on considère des fonctions dont le nombre des variables ne s'élève pas au-delà de deux, en affectant les accens supérieurs aux variations de l'une et les accens inférieurs à celles de l'autre. Pour aller au-delà, l'illustre auteur de cet ouvrage écrit entre parenthèses la quantité ou les quantités qu'il regarde comme variables, et désigne par

$$f'(x),\quad f'(y),\quad f'(z),$$
$$f''(x),\quad f''(y),\quad f''(z),\quad f''(x,y),\quad f''(x,z),\quad f''(y,z)$$

les coefficiens différentiels du premier et du second ordre pour la fonction $f(x, y, z)$ (Théorie des fonctions, page 191). Il a modifié depuis sa notation dans le Traité qu'il vient de publier sur la résolution des équations numériques, où il représente les mêmes coefficiens comme il suit,

$$\left(\frac{Z'}{x'}\right),\quad \left(\frac{Z'}{y'}\right),\quad \left(\frac{Z'}{z'}\right)$$
$$\left(\frac{Z''}{x'^2}\right),\quad \left(\frac{Z''}{y'^2}\right),\quad \left(\frac{Z''}{z'^2}\right),\quad \left(\frac{Z''}{x'y'}\right),\quad \left(\frac{Z''}{x'z'}\right),\quad \left(\frac{Z''}{y'z'}\right),$$

Z étant la fonction primitive proposée.

En partageant avec toute l'Europe le respect attaché au nom et aux travaux de Lagrange, j'oserai néanmoins n'être pas de l'avis de cet homme si justement célèbre, sur les motifs qui paroissent le porter à introduire cette nouvelle manière d'écrire les résultats du Calcul différentiel ; car je crois avoir prouvé dans ce qui précède que l'ancienne n'a point en elle-même l'inconvénient de *rappeler continuellement l'idée fausse des infiniment petits*, et je demanderai si la multitude de parenthèses très-resserrées, qui résulteroit des signes qu'il propose, ne rendroit pas les formules aussi longues et aussi chargées, que l'emploi de la caractéristique d. J'avouerai même que sa seconde notation ne comportant point de dénominateurs qui, dans l'impression, exigent une double ligne, me paroit préférable à sa dernière, semblable au fond à celles d'Euler et de Waring, dont elle ne diffère que par les accens qui tiennent la place des d, dont le premier se servoit avec tous les Géomètres sortis de l'école de Léibnitz, et des points dont le second a fait usage, ainsi que tous les Géomètres Anglois. Voici un exemple de chacune de ces notations :

$$\left(\frac{d^3Z}{dx^2dy}\right),\quad \left(\frac{\dot{\ddot{Z}}}{\dot{x}^2\dot{y}}\right),\quad \left(\frac{Z'''}{x'^2y'}\right).$$

C'est, je pense, un principe avoué de tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on peut les abréger, ou enfin lorsqu'en les modifiant on les rend propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'auroit pas apperçus

s'obtient sans difficulté : on a premièrement

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et comme Δu_1 est ce que devient Δu, lorsque x se change en $x+h$, il s'ensuit

$$\Delta u_1 = \Delta u + \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

d'où

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\Delta u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

on trouvera de même

$$\Delta^3 u = \frac{d\Delta^2 u}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2\Delta^2 u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^4 u = \frac{d\Delta^3 u}{dx}\frac{h}{1} + \text{etc.}$$

etc.

---

sans cela. Les signes du Calcul différentiel ne sont dans aucun de ces cas: tout ce dont Lagrange a enrichi l'Analyse, dans sa *Théorie des Fonctions* et dans son traité *De la Résolution des Equations numériques*, peut être exprimé avec autant de simplicité que d'élégance par les caractères usités. Les deux premiers volumes de l'ouvrage que j'offre au public, en fourniroient la preuve s'il étoit nécessaire, et on la trouvera encore dans ce dernier, pour lequel j'ai profité avec empressement de plusieurs remarques importantes insérées dans les excellens écrits que je viens de citer. Il y a plus, j'ai la persuasion que le Calcul des fonctions ne sauroit atteindre à rien que le grand Géomètre, qui en est l'inventeur, ne puisse déduire du Calcul différentiel, et j'ajouterai, en invoquant ici le témoignage de tous ceux qui, connoissant ce dernier Calcul, ont lu la *Théorie des Fonctions*, qu'ils n'ont pu s'empêcher de traduire (au moins mentalement), dans les signes généralement adoptés, les résultats qu'il contient, pour s'en faire une idée vraiment nette. On ne sauroit d'ailleurs contester que le passage de l'Algèbre au Calcul différentiel, ce dernier étant présenté, comme l'a fait Lagrange dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1772, ou, comme je l'ai fait d'après lui, ne soit aussi simple que le passage de l'Algèbre au Calcul des fonctions. Enfin, je crois qu'avant d'adopter de nouveaux signes, il faut penser à l'embarras qu'éprouveroient ceux qui étudient les mathématiques, d'avoir à rapprocher sans cesse des formules et des opérations analogues rendues par des caractères différens; et c'est la crainte de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés, qui m'a engagé à entrer dans des détails dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer l'homme célèbre qui projette une révolution à cet égard.

En effectuant les développemens successifs indiqués ci-dessus, il viendra

$$\Delta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.2} + \text{etc.}$$
$$+ \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{2.3} + \text{etc.}$$

Il seroit facile de trouver la loi que suivent les termes de cette expression, mais nous y parviendrons d'une manière plus générale, au moyen de l'analogie qui existe entre la différentiation des quantités et leur élévation aux puissances, analogie dont nous avons déjà fait remarquer quelques traits dans les n°s. 31-39.

864. On a vu (*Int.* n°. 25) que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et il suit de cette formule que

$$e^{\frac{du}{dx}h} = 1 + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^2}{dx^3}\frac{h^2}{2.3} + \text{etc.}$$

Si maintenant on transporte les exposans des puissances de du à la caractéristique d, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et sera la même chose que Δu; on aura donc

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

pourvu que dans le développement du second membre on transporte à la caractéristique d les exposans des puissances de du.

D'après ce résultat Lagrange a remarqué le premier qu'on avoit

en général $$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^n,$$

en observant toujours de transporter à la caractéristique d les exposans des puissances de du; et voici comment Laplace a démontré cette proposition.

Il est évident par ce qui a été dit dans les n°s. 860 et 863, que, quelle que soit l'expression de $\Delta^n u$, on doit avoir

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n}h^n + A'\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + A''\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{etc.}$$

A', A'', etc. désignant des coefficiens qui ne dépendent que de n. Cette équation devant subsister pour toutes les formes que peut prendre la fonction u, conviendra nécessairement au cas où $u=e^x$; mais alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3} = \text{etc.} = e^x$$

$\Delta u = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, $\quad \Delta^2 u = (e^h - 1)(e^{x+h} - e^x) = e^x(e^h - 1)^2$,
$\Delta^3 u = e^x(e^h - 1)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^n u = e^x(e^h - 1)^n$.

Substituant cette valeur de $\Delta^n u$, dans le premier membre de l'équation posée plus haut, et celles de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. dans le second, il viendra

$$(e^h - 1)^n = h^n + A'h^{n+1} + A''h^{n+2} + \text{etc.}$$

d'où il suit que les coefficiens A', A'', etc. doivent être les mêmes que ceux du développement de $(e^h - 1)^n$, puisque l'accroissement h doit demeurer indéterminé; il ne peut d'ailleurs exister aucune difficulté à l'égard des coefficiens différentiels de u, qui se déduisent tous des puissances de du par le changement indiqué dans les exposans.

865. La même relation entre les puissances et les différences se retrouve dans les fonctions d'un nombre quelconque de variables, et pour la mettre hors de doute, il suffira de considérer le cas où u dépendroit en même tems de x et de y. Si l'on conçoit que ces deux variables deviennent respectivement $x+h$ et $y+k$, la fonction u se changera en

$$u + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right\}$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}hk^2 + \frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

et si de cette formule on retranche u, le reste sera le développement de la différence de u, ou de Δu, et se formera de celui de l'expression $e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k} - 1$, en observant de transporter à la caractéristique d, les exposans de du, c'est-à-dire, de changer le produit $\frac{du^p}{dx^p}\frac{du^q}{dy^q}$ en $\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}$. Avec cette attention, on aura non-seulement

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k} - 1,$$

mais encore

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k} - 1\right)^n$$

En effet, on verra par les développemens successifs que produisent les substitutions réitérées de $x + h$ et $y + k$, dans ceux de Δu, Δu_1, $\Delta^2 u$, $\Delta^2 u_1$, etc. que

$$\Delta^n u = \left\{\frac{d^n u}{dx^n}h^n + A'\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + A''\frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \left\{B\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1} + B'\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy}h^n k + B''\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}h^{n-1}k^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

et si l'on prend $u = e^{x+y}$, on trouvera

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dy^2} = \text{etc.} = e^{x+y}$$
$$\Delta u = e^{x+h+y+k} - e^{x+y} = e^{x+y}(e^{h+k} - 1),$$
$$\Delta^2 u = e^{x+y}(e^{h+k} - 1)^2, \ldots \Delta^n u = e^{x+y}(e^{h+k} - 1)^n,$$

valeurs qui changeront l'expression générale de $\Delta^n u$ en

$$(e^{h+k}-1)^n = h^n + A'h^{n-1}k + A''h^{n-2}k^2 + A'''h^{n-3}k^3 + \text{etc.}$$
$$+ Bh^{n+1} + B'h^n k + B''h^{n-1}k^2 + B'''h^{n-2}k^3 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

les accroissemens h et k devant rester indéterminés, il en résulte que les coefficiens numériques A', A''...., B, B'...., etc. du second membre seront identiques avec ceux du développement du premier.

Il doit être évident, sans qu'il soit besoin d'entrer dans de nouveaux détails, que si u dépend de x, y, z, etc. et que h, k, l, etc. soient les accroissemens respectifs de ces variables,

$$\Delta^n u = \left(e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \text{etc.}} - 1\right)^n,$$

en observant toutefois de changer $\frac{du^p}{dx^p}\frac{du^q}{dy^q}\frac{du^r}{dz^r}\ldots\ldots \times h^p k^q l^r\ldots\ldots$ en $\frac{d^{p+q+r+\ldots\ldots\ldots}u}{dx^p dy^q dz^r\ldots\ldots} \times h^p k^q l^r\ldots$; car en opérant comme ci-dessus, on rameneroit la détermination des coefficiens numériques à celle du développement de $(e^{h+k+l+\text{etc.}}-1)^n$.

866. Pour développer la quantité $(e^{h+k+l+\text{etc.}}-1)^n$, il suffit d'obtenir les coefficiens numériques des puissances de α dans le développement de $(e^\alpha-1)^n$, parce que ces puissances seront des Polynomes dont on connoît le terme général (*Int.* n°. 19). Or on a

$$(e^\alpha-1)^n = e^{\alpha n} - \frac{n}{1}e^{\alpha(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}e^{\alpha(n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}e^{\alpha(n-3)} + \text{etc.}$$

et comme par le n°. 25 de l'Introduction,

$$e^{\alpha n} = 1 + \frac{n\alpha}{1} + \frac{n^2\alpha^2}{1.2} + \frac{n^3\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$e^{\alpha(n-1)} = 1 + \frac{(n-1)\alpha}{1} + \frac{(n-1)^2\alpha^2}{1.2} + \frac{(n-1)^3\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$e^{\alpha(n-2)} = 1 + \frac{(n-2)\alpha}{1} + \frac{(n-2)^2\alpha^2}{1.2} + \frac{(n-2)^3\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

etc.

le coefficient de α^i sera

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\left\{n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^i + \text{etc.}\right\}:$$

cette

cette série s'arrête d'elle-même, mais il faut observer qu'elle ne commence, ainsi que celle du n°. 861, que lorsque $i=n$.

Si on développe $(e^{\alpha}-1)^n$, d'après le procédé du n°. 98, en faisant

$$(e^{\alpha}-1)^n=\left(\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)^n=\alpha^n+A'\alpha^{n+1}+A''\alpha^{n+2}+\text{etc.}$$

et prenant ensuite les différentielles logarithmiques, on trouvera

$$A'=\frac{1}{2}n$$

$$2A''=\frac{1}{2}(n+1)A'-\frac{1}{2.3}n$$

$$3A'''=\frac{1}{2}(n+2)A''-\frac{1}{2.3}(n+1)A'+\frac{1}{2.3.4}n$$

$$4A''''=\frac{1}{2}(n+3)A'''-\frac{1}{2.3}(n+2)A''+\frac{1}{2.3.4}(n+1)A'-\frac{1}{2.3.4.5}n$$

etc.

à l'aide de ces équations on déduira successivement les uns des autres, les coefficiens A', A'', A''', etc.

867. L'équation $\Delta u=e^{\frac{du}{dx}h}-1$ donne $e^{\frac{du}{dx}h}=1+\Delta u$, et si on prend les logarithmes de part et d'autre, il viendra

$$\frac{du}{dx}h=\text{l}(1+\Delta u),$$

équation qui sera vraie, si dans le développement de $\text{l}(1+\Delta u)$, on transporte à la caractéristique Δ les exposans des puissances de Δu; on aura par ce moyen

$$\frac{du}{dx}h=\Delta u-\tfrac{1}{2}\Delta^2 u+\tfrac{1}{3}\Delta^3 u-\tfrac{1}{4}\Delta^4 u+\text{etc. (}\textit{Int.}\text{ n°. 26).}$$

Au lieu de nous arrêter à démontrer ce cas particulier, nous prouverons qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n}h^n=\{\text{l}(1+\Delta u)\}^n,$$

en changeant Δu^2, Δu^3, etc. en $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. Il est visible que la question revient à déterminer les coefficiens différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... etc. en fonction des différences successives de u

t que pour cela on a des équations de la forme

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+1}u = \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'_1 \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

$$\Delta^{n+2}u = \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{etc.}$$

etc.

dans lesquelles les coefficiens différentiels ne montent qu'au premier degré ; on peut donc faire

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \Delta^n u + B'\Delta^{n+1}u + B''\Delta^{n+2}u + B'''\Delta^{n+3}u + \text{etc.}$$

On obtiendroit facilement la valeur des coefficiens inconnus B', B'', B''', etc. par l'élimination successive de

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1}, \quad \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} h^{n+2}, \text{ etc.}$$

mais puisque l'équation hypothétique doit avoir lieu quel que soit u, elle subsistera encore lorsqu'on y fera $u = e^x$, ce qui donnera

$$\frac{d^i u}{dx^i} = e^x \quad \text{et} \quad \Delta^i u = e^x(e^h - 1)^i,$$

quelque valeur qu'ait le nombre entier i, et on trouvera par conséquent

$$h^n = (e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

Pour mettre en évidence l'identité des deux membres de cette équation, il suffit d'observer que $h^n = \{l(1 + e^h - 1)\}^n$, parce que le développement de $l(1 + e^h - 1)$, ordonné suivant les puissances de $e^h - 1$, et qui est

$$e^h - 1 - \tfrac{1}{2}(e^h - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(e^h - 1)^3 - \tfrac{1}{4}(e^h - 1)^4 + \text{etc.}$$

étant élevé à la puissance n, deviendra comparable à la série

$$(e^h - 1)^n + B'(e^h - 1)^{n+1} + B''(e^h - 1)^{n+2} + \text{etc.}$$

dont les coefficiens numériques B', B'', etc. seront par conséquent déterminés ; et si l'on écrit Δu, à la place de $e^h - 1$, et $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$ à celle de h^n, on aura l'équation $\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{l(1 + \Delta u)\}^n$, posée précédemment.

En faisant pour abréger $e^h - 1 = \alpha$, et développant $(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \text{etc.})^n$, suivant les puissances de α, par la méthode du n°. 98, on obtiendra les valeurs de B', B'', etc.

868. L'équation $\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{1(1+\Delta u)\}^n$ peut être écrite ainsi :

$$\left(\frac{du}{dx} h\right)^n = \{1(1+\Delta u)\}^n,$$

en observant d'appliquer, après le développement, l'exposant de du à la caractéristique d, et sous cette forme elle s'étend à un nombre quelconque de variables, en sorte que

$$\left\{\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \text{etc.}\right\}^n = \{1(1+\Delta u)\}^n.$$

Cette dernière équation se déduit, comme celle du n°. précédent, des expressions de $\Delta^n u$, $\Delta^{n+1} u$, etc. en observant que le développement de $\Delta^i u$ peut être mis sous cette forme

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \text{etc.}\right\}^i \\ &+ B'\left\{\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \text{etc.}\right\}^{i+1} \\ &+ B''\left\{\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \text{etc.}\right\}^{i+2} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

quel que soit le nombre entier i, pourvu qu'on change

$$\frac{d^p u}{dx^p} \frac{d^q u}{dy^q} \frac{d^r u}{dz^r} \ldots \text{en } \frac{d^{p+q+r} \ldots u}{dx^p dy^q dz^r}.$$

869. Si l'on désigne par $\Delta_x u$, $\Delta^2_x u$, $\Delta^3_x u$, etc. les différences qui résultent des valeurs que reçoit la fonction u, lorsqu'on n'y fait varier que x, par $\Delta_y u$, $\Delta^2_y u$, $\Delta^3_y u$, etc. les différences relatives à la variable y seulement, on aura

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \{1(1+\Delta_x u)\}^n, \qquad \frac{d^n u}{dy^n} k^n = \{1(1+\Delta_y u)\}^n.$$

Si l'on fait $n = 1$, il viendra

$$\frac{du}{dx} h = 1(1+\Delta_x u); \qquad \frac{du}{dy} k = 1(1+\Delta_y u),$$

d'où $$e^{\frac{du}{dx} h} = 1 + \Delta u_x; \qquad e^{\frac{du}{dy} k} = 1 + \Delta_y u;$$

et comme $\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k} - 1$, on en conclura d'abord

$$\Delta u = (1 + \Delta_x u)(1 + \Delta_y u) - 1 :$$

puis suivant le fil de l'analogie qui règne entre les différences et les puissances, on obtiendra

$$\Delta^n u = \{ (1 + \Delta_x u)(1 + \Delta_y u) - 1 \}^n,$$

en observant de changer dans le développement du second membre les termes de la forme $(\Delta_x u)^p(\Delta_y u)^q$ en $\overset{p+q}{\underset{x,y}{\Delta}} u$ (*).

Cette dernière équation se démontre à peu près de même que celle du n°. 867. Puisqu'on a

$$\Delta^p{}_x u = \frac{d^p u}{dx^p} h^p + A' \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} h^{p+1} + A'' \frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} h^{p+2} + \text{etc.}$$

et qu'en faisant, pour abréger, $\Delta^p{}_x u = u'$, il vient

$$\overset{p+q}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \Delta^q{}_y u' = \frac{d^q u'}{dy^q} k^q + B' \frac{d^{q+1} u'}{dy^{q+1}} k^{q+1} + B'' \frac{d^{q+2} u'}{dy^{q+2}} h^{q+2} + \text{etc.}$$

il est évident que

$$\overset{p+q}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \frac{d^{p+q} u}{dx^p dy^q} h^p k^q + C' \frac{d^{p+q+1} u}{dx^{p+1} dy^q} h^{p+1} k^q + \text{etc.}$$
$$+ C'_{\prime} \frac{d^{p+q+1} u}{dx^p dy^{q+1}} h^p k^{q+1} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

En prenant successivement pour p et pour q tous les nombres entiers possibles en y comprenant o, on formeroit des équations en nombre suffisant pour déterminer les coefficiens différentiels par le moyen des différences partielles, et dans lesquelles ces coefficiens ne passeroient pas le premier degré. Sans qu'il soit nécessaire d'effectuer l'élimination, on peut donc affirmer que la valeur de chacun d'eux ne contient que les premières puissances des différences partielles de u, et que par conséquent le développement général de $\Delta^n u$, qui est de la forme

(*) On reconnoit sans peine que $\overset{p+q}{\underset{x,y}{\Delta}} u$ n'est que l'abbréviation de $\Delta^p{}_x(\Delta^q{}_y u)$, et que l'on doit avoir $\Delta^p{}_x(\Delta^q{}_y u) = \Delta^q{}_y(\Delta^p{}_x u)$, ou $\overset{p+q}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \overset{q+p}{\underset{y,x}{\Delta}} u$.

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n + D' \frac{d^n u}{dx^{n-1}dy} h^{n-1}k + D'' \frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2} h^{n-2}k^2 + \text{etc.}$$
$$+ D_{,}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + D'_{,}\frac{d^{n+1}u}{dx^n dy} h^n k + D''_{,}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2} h^{n-1}k^2 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

deviendra nécessairement de celle-ci

$$\Delta^n u = E\,\Delta^n_x u + E'\,\Delta^{(n-1)+1}_{x,\,y} u + E''\,\Delta^{(n-2)+2}_{x,\,y} u + \text{etc.}$$
$$+ E_{,}\Delta^{(n+1)}_x u + E'_{,}\Delta^{n+1}_{x,\,y} u + E''_{,}\Delta^{(n-1)+2}_{x,\,y} u + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Les coefficiens E, E'.....$E_{,}$, $E'_{,}$,....etc. étant indépendans de u, doivent demeurer les mêmes, quelle que soit cette fonction ; mais dans le cas où $u = e^{x+y}$, on trouve

$$\Delta^n u = e^{x+y}(e^{h+k} - 1)^n, \qquad \Delta^{p+q}_{x,\,y} u = e^{x+y}(e^h - 1)^p(e^k - 1)^q,$$

ce qui donne

$$(e^{h+k}-1)^n = E\,(e^h-1)^n + E'\,(e^h-1)^{n-1}(e^k-1) + E''\,(e^h-1)^{n-2}(e^k-1)^2 + \text{etc.}$$
$$+ E_{,}(e^h-1)^{n+1} + E'_{,}(e^h-1)^n\,(e^k-1) + E''_{,}(e^h-1)^{n-1}(e^k-1)^2 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

équation qui ne sauroit être identique à moins que le premier membre ne puisse se développer comme le second, suivant les puissances de $(e^h - 1)$ et de $(e^k - 1)$; or c'est ce qui a lieu, car il est visible que

$$(e^{h+k} - 1)^n = \{[1 + (e^h - 1)][1 + (e^k - 1)] - 1\}^n :$$

c'est donc dans le développement du deuxième membre de cette dernière équation qu'on trouvera les coefficiens cherchés ; et si l'on y substitue $\Delta^n u$, $\Delta_x u$, $\Delta_y u$, au lieu de $(e^{h+k}-1)^n$, (e^h-1), (e^k-1), on retombera sur l'équation

$$\Delta^n u = \{(1 + \Delta_x u)(1 + \Delta_y u) - 1\}^n.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs, d'après lesquels on voit évidemment que, quel que soit le nombre de variables compris dans la fonction u,

$$\Delta^n u = \{(1 + \Delta_x u)(1 + \Delta_y u)(1 + \Delta_z u)\ldots - 1\}^n.$$

Le développement de cette formule n'offre aucune difficulté. On connoît la forme générale du produit $(1 + x)(1 + y)(1 + z)\ldots$;

en se bornant à trois lettres, par exemple, on a

$$1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz,$$

d'où retranchant l'unité et élevant le reste,

$$x+y+z+xy+xz+yz+xyz,$$

à la puissance n, on formera l'expression de $\Delta^n u$, en changeant les termes de la forme $x^p y^q z^r$ en $\Delta^{p+q+r}_{x,y,z} u$.

870. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que chacune des variables indépendantes x, y, z, etc. ne recevoit que des accroissemens égaux; mais pour donner aux résultats du Calcul des différences toute la généralité dont ils sont susceptibles, il faut concevoir que ces variables éprouvent des changemens successifs quelconques et indépendans les uns des autres. Pour mettre de la symétrie dans les expressions analytiques, nous représenterons les accroissemens des variables indépendantes comme ceux de la fonction proposée. Dans le cas où u ne contiendra que la variable x, nous établirons que les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots\ldots u_n,$$

correspondent à ces quantités:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots\ldots x_n,$$

qui désignent les divers états par lesquels passe x, et nous ferons

$$x_1 - x = \Delta x, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_1, \quad x_3 - x_2 = \Delta x_2, \text{ etc.}$$
$$\Delta x_1 - \Delta x = \Delta^2 x, \quad \Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta^2 x_1, \text{ etc.}$$
$$\Delta^2 x_1 - \Delta^2 x = \Delta^3 x, \quad \text{etc.}$$

etc.

nous aurons par conséquent

$$x_1 = x + \Delta x, \quad x_2 = x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \quad x_3 = x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, \text{ etc.}$$

et pour déterminer les expressions de u_1, u_2, u_3, etc. il faudra chercher ce que devient la fonction proposée u, lorsqu'on y met successivement x_1, x_2, x_3, etc. au lieu de x, en sorte que si l'on écrit $u = \mathrm{f}(x)$, il viendra

$$u_n = \mathrm{f}(x_n) = \mathrm{f}\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.}\right].$$

Si l'on substitue à u_n la série du n°. 860, on obtiendra l'équation

$$u_n + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$
$$= f[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.}],$$

qui doit se vérifier indépendamment d'aucune valeur particulière de n. Si donc les deux membres étoient développés suivant les puissances de n, on pourroit égaler entr'eux les coefficiens d'une même puissance, et les équations qu'on obtiendroit par ce moyen serviroient à déterminer les différences de la fonction u par celles de la variable x. Ce procédé est analogue à celui du n°. 34, et s'étend de même aux fonctions d'un nombre quelconque de variables; dans le cas où l'on auroit $u = f(x, y, z)$, il viendroit

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.} =$$
$$f[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{etc.},$$
$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \text{etc.},$$
$$z + \frac{n}{1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 z + \text{etc.}].$$

En comparant les termes affectés d'une même puissance de n dans le développement de cette équation, on s'en procurera un nombre suffisant de nouvelles pour déterminer Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc.

871. Les calculs qu'entraîne cette méthode peuvent la rendre encore fort laborieuse, et souvent on préférera déduire les unes des autres les différences successives, ce qui, lorsque u ne dépend que de x, s'effectue ainsi: on passe d'abord de Δu à Δu_1, en écrivant x_1 et Δx_1, ou, ce qui est la même chose, $x + \Delta x$ et $\Delta x + \Delta^2 x$, au lieu de x et de Δx, et on a $\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u$; on obtient ensuite $\Delta^2 u_1$, en mettant x_1, Δx_1, $\Delta^2 x_1$, ou $x + \Delta x$, $\Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta^2 x + \Delta^3 x$, à la place de x, Δx, $\Delta^2 x$, ce qui donne $\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u$. Sans pousser plus loin, on voit que pour passer d'une différence à celle qui vient après, il faut regarder en même tems comme variables x et ses différences; et que par conséquent à chaque différentiation le nombre des variables s'accroît de l'unité.

Les différences de u se développeront aussi par la série de Taylor, généralisée pour un nombre quelconque de variables. En regardant Δu comme une fonction de x et Δx, on aura

$$\Delta^2 u = \frac{d\Delta u}{dx}\Delta x + \frac{d\Delta u}{d\Delta x}\Delta^2 x$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^2\Delta u}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2\Delta u}{dx\,d\Delta x}\Delta x\Delta^2 x + \frac{d^2\Delta u}{d\Delta x^2}\Delta^2 x^2\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

et puisque $\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{etc.}$ on aura

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{du}{dx}\Delta^2 x$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d^3 u}{dx^3}\Delta x^3 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

en ordonnant par rapport aux puissances des différences Δx, $\Delta^2 x$, etc. Cet exemple suffit pour montrer comment il faut s'y prendre dans tous les cas, quel que soit le nombre de variables indépendantes, puisqu'il est aisé de faire, par rapport à chacune d'elles, ce qu'on a fait ci-dessus à l'égard de x, et que d'ailleurs la méthode que nous indiquons ici revient au fond à celle qu'on employe pour obtenir les différentielles successives, lorsqu'on ne prend pour constante aucune des différentielles des variables indépendantes. Nous nous bornerons à observer que si dans l'expression de $\Delta^n u$, on écrit en première ligne les termes qui contiennent la puissance la moins élevée de chacune des différences des variables indépendantes, l'ensemble de ces termes deviendra identique avec la différentielle $d^n u$, lorsqu'on y changera Δx, $\Delta^2 x$, etc. Δy, $\Delta^2 y$, etc. en dx, $d^2 x$, etc. dy, $d^2 y$, etc. et que chacun d'eux sera de la forme

$$M\Delta x^{p}\Delta^2 x^{p'}\Delta^3 x^{p''}\ldots\Delta y^{q}\Delta^2 y^{q'}\Delta^3 y^{q''}\ldots\Delta z^{r}\Delta^2 z^{r'}\Delta^3 z^{r''}, \text{ etc.}$$

M désignant une fonction des variables x, y, z, etc. les exposans satisfaisant à l'équation

$$p + 2p' + 3p''\ldots + q + 3q' + 3q''\ldots + r + 2r' + 3r''\ldots = n.$$

872.

872. L'application du théorême de Taylor, fournit une expression très-élégante du développement de $\Delta^n u$, lorsque u ne renferme que la seule variable x. Pour y parvenir soit

$$x_1 - x = h_1, \quad x_2 - x = h_2, \quad x_3 - x = h_3, \ldots\ldots x_n - x = h_n;$$

nous obtiendrons

$$u_1 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_1}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_1}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$u_2 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_2}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_2}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$u_3 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_3}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_3}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = u + \frac{du}{dx}\frac{h_n}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_n}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_n}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et substituant ces valeurs dans la formule

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \text{etc.}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta^n u = \quad & u\left\{1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}\\ + \frac{1}{1}\frac{du}{dx} & \left\{h_n - \frac{n}{1}h_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h_{n-3} + \text{etc.}\right\}\\ + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} & \left\{h^2_n - \frac{n}{1}h^2_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^2_{n-3} + \text{etc.}\right\}\\ + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3} & \left\{h^3_n - \frac{n}{1}h^3_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^3_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^3_{n-3} + \text{etc.}\right\}\\ + \text{etc.} &\end{aligned}$$

Le coefficient de u est identiquement nul; car ce n'est que le développement de $(1-1)^n$; de plus, si l'on changeoit en exposans les indices de la lettre h, les séries qui multiplient $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc. deviendroient respectivement égales aux développemens de $(h-1)^n$, $(h^2-1)^n$, $(h^3-1)^n$, etc. privés de leur dernier terme, qui est ∓ 1, suivant que n est impair ou pair: on peut donc remplacer ces séries par les quantités

$$(h-1)^n \pm 1, \quad (h^2-1)^n \pm 1, \quad (h^3-1)^n \pm 1, \text{ etc.}$$

en observant, lorsqu'on développera, de convertir en indices tous les exposans n, $n-1$, $n-2$, et de ne laisser à la lettre h que les exposans, 1, 2, 3, etc. dont elle est affectée dans les parenthèses ci-dessus : c'est ainsi que Prony a présenté la formule suivante,

$$\Delta^n u = \frac{1}{1}\frac{du}{dx}[(h-1)^n \pm 1] + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}[(h^2-1)^n \pm 1] + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}[(h^3-1)^n \pm 1] + \text{etc.}$$

Application du Calcul des différences à l'interpolation des suites.

873. L'un des principaux usages du Calcul des différences a pour objet l'*interpolation des suites*; cette opération consiste à insérer entre les termes d'une suite donnée de nouveaux termes assujettis à la même loi que les premiers. Soient u_1, u_2, u_3, etc. les valeurs particulières que reçoit une fonction quelconque u, dépendante de la variable x, lorsqu'on y change successivement x en $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, etc. on aura ces deux suites correspondantes

$$\begin{array}{ccccc} x, & x+h, & x+2h, & x+3h, & \text{etc.} \\ u, & u_1, & u_2, & u_3, & \text{etc.} \end{array}$$

mais outre les valeurs ci-dessus, la fonction u en a une infinité d'autres résultantes des valeurs de x, intermédiaires entre celles qui répondent à la suite proposée; déterminer ces nouvelles valeurs de u sans connoître l'expression du terme général de la suite, ou, la manière dont la fonction u est composée en x, et seulement par le secours des valeurs numériques des quantités u, u_1, u_2, u_3, etc. c'est-là ce qu'on appelle interpoler la suite u, u_1, u_2, u_3, etc.

La question que nous nous proposons ici revient donc à trouver la valeur de u lorsque x se change en $x+h'$, h' désignant une quantité quelconque, en n'employant dans le résultat que les différences de la fonction u, calculées dans l'hypothèse où x varie de la quantité h; or on a par le n°. 867,

$$\frac{d^i u}{dx^i} h^i = \Delta^i u + A'\Delta^{i+1}u + A''\Delta^{i+2}u + A'''\Delta^{i+3}u + \text{etc.}$$

d'où il suit

$$\frac{d^i u}{dx^i} h'^i = \frac{h'^i}{h^i}(\Delta^i u + A'\Delta^{i+1}u + A''\Delta^{i+2}u + \text{etc.}).$$

Si on tiroit successivement de cette équation les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc. pour les substituer dans la série

$$u+\frac{du}{dx}\frac{h'}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

qui exprime ce que devient u lorsque x devient $x+h'$, on auroit un résultat de la forme

$$u+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2u$$
$$+\left(B'_{,}\frac{h'}{h}+B''_{,}\frac{h'^2}{h^2}+B'''_{,}\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3u+\text{etc.}$$

B', B'', $B'_{,}$, $B''_{,}$, $B'''_{,}$, etc. étant ainsi que A', A'', etc. des coefficiens numériques indépendans de h; et désignant par $\Delta' u$ l'accroissement que reçoit la fonction u dans le passage de x à $x+h'$, il viendroit

$$1+\Delta'u=1+\frac{h'}{h}\Delta u+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2u+\text{etc.}$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit u, subsistera encore dans le cas où $u=e^x$, et se changera alors en

$$e^{h'}=1+\frac{h'}{h}(e^h-1)+\left(B'\frac{h'}{h}+B''\frac{h'^2}{h^2}\right)(e^h-1)^2+\text{etc.}$$

équation dont on ramène, par le développement, le premier membre à la même forme que le second, en observant que $e^{h'}=[1+(e^h-1)]^{\frac{h'}{h}}$; et comme en remettant dans le second Δu, $\Delta^2 u$, etc. à la place des quantités e^h-1, $(e^h-1)^2$, etc. on retombe sur le développement de $1+\Delta' u$, on doit en conclure que

$$1+\Delta'u=(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}},$$

pourvu qu'on se rappelle de transporter à la caractéristique Δ, dans le second membre, les exposans des puissances de Δu.

Ce résultat, aussi simple qu'élégant, a été présenté par Lagrange comme une conséquence de l'analogie que les différences ont avec les puissances. En effet, il suit de l'équation $e^{\frac{du}{dx}h}=1+\Delta u$, (n°. 864),

que $e^{\frac{du}{dx}h'} = (1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, ce qui donne sur le champ,

$1+\Delta' u = (1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}$, puisque $e^{\frac{du}{dx}h'} = 1+\Delta' u$.

En développant le second membre de l'équation que nous venons d'obtenir, ainsi qu'il a été prescrit, on trouvera

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Si l'on fait $h=1$, on aura

$$\Delta' u = \frac{h'}{1}\Delta u + \frac{h'(h'-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

série qui n'est autre que celle du n°. 860, dans laquelle on auroit mis h' à la place de n.

874. Venons maintenant à des applications. Si l'on désigne par u' ce que devient u, lorsque x se change en $x+h'$, on aura $u'=u+\Delta' u$, et il est visible que pour tirer parti de l'expression de $\Delta' u$, il faut, ou qu'elle se termine, ou du moins qu'elle forme une série convergente. Le premier cas a lieu toutes les fois que la suite des différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. se termine elle-même, c'est-à-dire, lorsque l'on parvient à un ordre dont les différences sont constantes, ce qui rend nulles celles du suivant.

Soit d'abord la suite

3, 7, 19, 39, 67, etc.

correspondante aux indices

0, 1, 2, 3, 4, etc.

on a pour ce cas,

$u=3$, $x=0$, $h=1$, $\Delta u=4$, $\Delta^2 u=8$, $\Delta^3 u=0$, (n°. 860);

l'expression de $\Delta' u$ se réduit à ses deux premiers termes, et l'on obtient par son moyen $\Delta' u = 4h' + 4h'(h'-1) = 4h'^2$: ainsi pour l'indice h', il viendra $u'=3+4h'^2$. En prenant $h'=\frac{5}{2}$, par exemple, on trouvera que le terme correspondant à cet indice est 28.

Proposons-nous encore la suite

1, 4, 2, 3, 9, 16, etc.

en prenant les indices comme à l'ordinaire, savoir:

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

et formant les différences, on trouvera

$h=1$, $u=1$, $\Delta u=3$, $\Delta^2 u=-5$, $\Delta^3 u=8$, $\Delta^4 u=-6$, $\Delta^5 u=0$,

d'où on tirera

$$u'=1+3\frac{h'}{1}-5\frac{h'(h'-1)}{1.2}+8\frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}-6\frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4};$$

en réduisant cette expression, et l'ordonnant par rapport aux puissances de h', on aura

$$u'=\frac{12+116h'-111h'^2+34h'^3-3h'^4}{12}.$$

Il est important de remarquer que l'expression de u', dans cet exemple et dans le précédent, étant rigoureuse, et convenant à toutes les valeurs de h', offre le terme général de la suite proposée, puisqu'elle en donne tous les termes particuliers en y faisant successivement $h'=0$, $h'=1$, $h'=2$, etc. et quoique nous n'ayons rapporté que les premiers termes de cette suite, on peut la continuer aussi loin qu'on voudra, suivant la loi observée dans ces termes. Il en sera toujours de même quand la série proposée aura des différences constantes, parce qu'elle ne peut résulter alors que des valeurs successives d'une fonction algébrique rationnelle et entière.

875. Les cas auxquels on applique le plus fréquemment la formule

$$\Delta' u=\frac{h'}{h}\Delta u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta u^2+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u \text{ etc.}$$

sont ceux dans lesquels les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. vont en décroissant, parce qu'alors elle est convergente. En voici un exemple tiré des tables de logarithmes. Je suppose qu'on veuille obtenir le logarithme ordinaire de 3,1415926536, par le moyen d'une table contenant les logarithmes depuis 1 jusqu'à 1000, avec dix décimales; on regardera alors les logarithmes contenus dans la table comme des valeurs particulières de la fonction u, les nombres comme les indices auxquels répondent ces valeurs, et on formera le tableau suivant

$u=0,4969296481$	13809057			
$u_1=0,4983105538$	13765288	−43769		
$u_2=0,4996870826$	13721796	−43492	+277	−3
$u_3=0,5010592622$	13678578	−43218	+274	
$u_4=0,5024271200$				

dont la première colonne renferme les logarithmes de

$$3{,}14, \quad 3{,}15, \quad 3{,}16, \quad 3{,}17, \quad 3{,}18;$$

la seconde, leurs différences premières; la troisième, leurs différences secondes; la quatrième, leurs différences troisièmes, et la cinquième leurs différences quatrièmes qui se réduisent à trois unités du dernier ordre : on aura par ce moyen

$$\Delta u = +0{,}0013809057, \qquad \Delta^2 u = -0{,}0000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0{,}0000000277, \qquad \Delta^4 u = -0{,}0000000003;$$

et comme $h = 0{,}01$, $h' = 0{,}0015926536$, on obtiendra

$$\frac{h'}{h} = 0{,}15926536, \qquad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \tfrac{1}{2} = -0{,}42036732$$
$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \tfrac{2}{3} = -0{,}61357821, \qquad \frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \tfrac{3}{4} = -0{,}71018366:$$

avec ces valeurs il sera très-facile de mettre en nombres la formule

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h.2h.3h.4h}\Delta^4 u,$$

qui donnera $u' = 0{,}4971498726$.

Il existe des moyens plus faciles pour obtenir les logarithmes des nombres exprimés par beaucoup de chiffres, mais le précédent est très-propre à servir d'exemple pour la méthode d'interpolation. On doit reconnoître déjà que cette méthode s'étend à beaucoup d'autres cas, elle est sur-tout d'un très-grand usage dans les calculs astronomiques.

876. Si on développe l'expression générale de u, suivant les puissances de h, le résultat sera de la forme

$$u' = u + Ah' + Bh'^2 + Ch'^3 + \text{etc.}$$

et le dernier exposant de h', marquera l'ordre de la plus haute différence à laquelle on ait eu égard. Il est visible qu'en considérant h' comme une abscisse, et u' comme l'ordonnée correspondante, l'équation ci-dessus appartiendra à une courbe du genre parabolique; et puisqu'on doit avoir successivement

$$u' = u, \quad u' = u_1, \quad u' = u_2, \quad u' = u_3, \text{ etc.}$$

lorsqu'on fait $h' = 0$, $h' = h$, $h' = 2h$, $h' = 3h$, etc.
il s'ensuit que cette courbe doit passer par autant de points donnés,

qu'on a de valeurs particulières de u. La méthode d'interpolation que nous venons d'exposer revient donc à faire passer par un nombre déterminé de points donnés, une courbe parabolique sur laquelle on suppose ensuite que sont placés les points qui correspondent aux valeurs intermédiaires que l'on cherche. C'est Newton qui le premier a résolu cette question, et voici comment :

Pour une valeur quelconque x' de la variable x, il fait

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{etc.}$$

ce qui donne pour la suite de valeurs particulières x, x_1, x_2, x_3, etc. ces équations

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} \\ u_1 &= \alpha + \beta x_1 + \gamma x^2_1 + \delta x^3_1 + \text{etc.} \\ u_2 &= \alpha + \beta x_2 + \gamma x^2_2 + \delta x^3_2 + \text{etc.} \\ u_3 &= \alpha + \beta x_3 + \gamma x^2_3 + \delta x^3_3 + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

dont le nombre doit être égal à celui des coefficiens indéterminés α, β, γ, etc. En retranchant successivement la première de la seconde, celle-ci de la troisième, etc. on parvient à des résultats respectivement divisibles par $x_1 - x$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, etc. et d'où l'on tire

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x^2_1 + x_1 x + x^2) + \text{etc.}$$

$$\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x^2_2 + x_2 x_1 + x^2_1) + \text{etc.}$$

$$\frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x^2_3 + x_3 x_2 + x^2_2) + \text{etc.}$$

etc.

posant pour abréger $\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U$, $\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1$, etc. on aura les équations

$$\begin{aligned} U &= \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x^2_1 + x_1 x + x^2) + \text{etc.} \\ U_1 &= \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x^2_2 + x_2 x_1 + x^2_1) + \text{etc.} \\ U_2 &= \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x^2_3 + x_3 x_2 + x^2_2) + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

retranchant encore U de U_1, U_1 de U_2 et ainsi de suite, et désignant

par U', $U'_{,}$, etc. les quantités $\frac{U_{,}-U}{x_{2}-x}$, $\frac{U_{2}-U_{,}}{x_{3}-x_{,}}$, etc. on trouvera

$$U' = \gamma + \delta(x_{2} + x_{,} + x) + \text{etc.}$$
$$U'_{,} = \gamma + \delta(x_{3} + x_{2} + x_{,}) + \text{etc.}$$

d'où on tirera $\quad U'_{,} - U' = \delta(x_{3} - x) + \text{etc.}$

Maintenant si l'on fait $\frac{U'_{,} - U'}{x_{3} - x} = U''$, on aura $U'' = \delta + \text{etc.}$

et si pour fixer les idées on ne suppose que quatre termes à l'expression de u, l'opération sera terminée à l'équation ci-dessus; prenant la valeur qu'elle donne pour δ et remontant à celles de γ, β, α, par le moyen des expressions de U', U et u, il viendra

$$\delta = U''$$
$$\gamma = U' - U''(x_{2} + x_{,} + x)$$
$$\beta = U - U'(x_{,} + x) + U''(x_{2}x_{,} + x_{2}x + x_{,}x)$$
$$\alpha = u - Ux + U'x_{,}x - U''x_{2}x_{,}x.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de u', on aura

$$\left.\begin{aligned} u' = u + U(x' - x) + U'[x'^{2} - (x_{,} + x)x' + x_{,}x] \\ + U''[x'^{3} - (x_{2} + x_{,} + x)x'^{2} + (x_{2}x_{,} + x_{2}x + x_{,}x)x' - xx_{,}x_{2}] \end{aligned}\right\}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens de U, U' et U'', sont décomposables en facteurs simples, et que l'on peut mettre u sous cette forme

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_{,}) + U''(x' - x)(x' - x_{,})(x' - x_{2}).$$

En poursuivant d'après cette méthode, on obtiendroit une formule analogue à la précédente; et quel que fût le nombre des valeurs primordiales x, $x_{,}$, x_{2}, ... de l'abscisse, on auroit en général

$$\begin{aligned} u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_{,}) + U''(x' - x)(x' - x_{,})(x' - x_{2}) \\ + U'''(x' - x)(x' - x_{,})(x' - x_{2})(x' - x_{3}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

en faisant

$$\frac{u_{,} - u}{x_{,} - x} = U, \quad \frac{u_{2} - u_{,}}{x_{2} - x_{,}} = U_{,}, \quad \frac{u_{3} - u_{2}}{x_{3} - x_{2}} = U_{2}, \quad \frac{u_{4} - u_{3}}{x_{4} - x_{3}} = U_{3}, \text{ etc.}$$

$$\frac{U_{,} - U}{x_{2} - x} = U', \quad \frac{U_{2} - U_{,}}{x_{3} - x_{,}} = U'_{,}, \quad \frac{U_{3} - U_{2}}{x_{4} - x_{2}} = U'_{2}, \text{ etc.}$$

$$\frac{U'_{,} - U'}{x_{3} - x} = U'', \quad \frac{U'_{2} - U'_{,}}{x_{4} - x_{,}} = U''_{,}, \text{ etc.}$$

$$\frac{U''_{,} - U''}{x_{4} - x} = U''', \text{ etc.}$$

etc.

Quand

Quand les ordonnées u, u_1, u_2, u_3, etc. sont équidistantes, on a $x_1 - x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, etc. d'où il suit évidemment

$$x_1 = x + h, \quad x_2 = x + 2h, \quad x_3 = x + 3h, \text{ etc.}$$

$$U = \frac{1}{h}\Delta u, \; U_1 = \frac{1}{h}\Delta u_1, \; U_2 = \frac{1}{h}\Delta u_2, \; U_3 = \frac{1}{h}\Delta u_3, \text{ etc.}$$

$$U' = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u, \; U'_1 = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u_1, \; U'_2 = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 u_2, \text{ etc.}$$

$$U'' = \frac{1}{3h^3}\Delta^3 u, \; U''_1 = \frac{1}{3h^3}\Delta^3 u_1, \text{ etc.}$$

$$U''' = \frac{1}{4h^4}\Delta^4 u, \text{ etc.}$$

etc.

faisant $x' = x + h'$, il en résultera

$$x' - x = h', \; x' - x_1 = h' - h, \; x' - x_2 = h' - 2h, \; x' - x_3 = h' - 3h, \text{ etc.}$$

et l'on voit ainsi que l'expression précédente de u', qui devient alors

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3 u + \text{etc.}$$

rentre dans celle que nous avons trouvée, n°. 873, par une voie bien différente.

877. Lagrange a présenté l'expression de u' sous une forme nouvelle, en observant que puisque les équations

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \text{etc.}$$
$$u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_2^3 + \text{etc.}$$

etc.

sont du premier degré seulement, par rapport à chacune des quantités α, β, γ, etc. u, u_1, u_2, etc. et que u' doit être exprimé en x', de manière qu'en y faisant successivement $x' = x$, $x' = x_1$, $x' = x_2$, etc. il vienne $u' = u$, $u' = u_1$, $u' = u_2$, etc. on peut écrire

$$u' = Xu + X_1 u_1 + X_2 u_2 + \text{etc.}$$

pourvu que X, X_1, X_2, etc. soient des fonctions telles que par la supposition de $x' = x$, on ait en même tems

$$X = 1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \text{ etc.}$$

que par celle de $x' = x_1$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 1, \quad X_2 = 0, \text{ etc.}$$

que par celle de $x' = x_2$, on ait

$$X = 0, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 1, \text{ etc.}$$

et ainsi de suite, conditions qui seront remplies si l'on prend

$$X=\frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots}$$
$$X_1=\frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots}$$
$$X_2=\frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots\ldots}$$
etc.

La loi qu'il faut observer dans la formation de ces quantités est on ne peut pas plus simple; leur numérateur contient, ainsi que leur dénominateur, autant de facteurs qu'il y a de quantités x, x_1, x_2, etc. moins une; et si l'on y fait les hypothèses indiquées ci-dessus, non-seulement on se convaincra qu'elles satisfont à la question proposée, mais on verra de plus comment il a été possible de prévoir qu'elles y satisferoient. On a donc cette nouvelle formule d'interpolation

$$\left.\begin{aligned} u'=&\frac{(x'-x_1)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}u+\frac{(x'-x)(x'-x_2)(x'-x_3)\ldots}{(x_1-x)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}u_1\\ &+\frac{(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_3)\ldots}{(x_2-x)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}u_2+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

très-commode dans la pratique, parce qu'on en peut calculer chaque terme par le moyen des logarithmes. Il ne seroit pas difficile de la ramener à celle du n°. précédent, et même à celle du n°. 873; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

878. D'après ce qu'on a vu dans le n°. 876, on conclura sans doute qu'il existe pour l'interpolation une infinité de formules différentes, dont chacune doit être propre à un genre particulier de suites. En effet, celles que nous avons obtenues jusqu'ici ne conviennent qu'aux suites dont le terme général est rigoureusement de la forme

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}$$

ou peut y être ramené par le développement, lorsque x est assez petit. Dans ce dernier cas on ne parvient qu'à un résultat approché, et seu-

lement lorsque les valeurs données et celle que l'on cherche sont renfermées dans un très-petit espace ; c'est ce que l'application géométrique rendra sensible. En déterminant les coefficiens α, β, γ, δ, etc. comme dans le n°. cité, on forme, ainsi qu'il a déjà été dit, l'équation de la courbe parabolique passant par les points dont les abscisses sont x, x_1, x_2, et les ordonnées u, u_1, u_2, etc. Si les abscisses sont très-inégales, la courbe obtenue pourra avoir la forme FGH, *fig.* 1, tandis que le terme général de la suite proposée donneroit une courbe de la forme CDE, qui n'auroit de commun avec la première que les points donnés M, M_1, M_2, M_3, etc. et qui en différeroit d'ailleurs beaucoup dans l'intervalle de l'un de ces points au suivant, ainsi que le montre la figure. Si au contraire les points donnés sont fort resserrés, et qu'entr'eux la parabole calculée n'ait aucune inflexion, elle pourra se confondre, au moins dans un espace peu étendu, avec la courbe qui résulteroit du terme général de la série proposée. Il suit de ce qui précède qu'en variant la forme de l'équation de la courbe par laquelle on suppose que les termes de la suite proposée sont liés avec leurs indices, on en pourra trouver une qui approche plus que toutes les autres de la courbe donnée par le terme général. FIG. 1.

Sans sortir du genre parabolique, on peut à l'équation

$$u' = \alpha + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \text{etc.}$$

substituer l'une des suivantes

$$u' = \alpha x' + \beta x'^3 + \gamma x'^5 + \delta x'^7 + \text{etc.}$$
$$u' = \alpha x'^2 + \beta x'^4 + \gamma x'^6 + \delta x'^8 + \text{etc.}$$

dont les coefficiens α, β, γ, δ, etc. se détermineroient aussi par les équations particulières qu'on formeroit, en changeant successivement u' et x', en u et x, en u_1 et x_1, etc. mais on abrégera beaucoup le calcul, en donnant à ces expressions les formes

$$\left.\begin{array}{l} u' = Ax' + Bx'(x'^2 - x^2) + Cx'(x'^2 - x^2)(x'^2 - x^2_1) \\ \qquad + Dx'(x'^2 - x^2)(x'^2 - x^2_1)(x'^2 - x^2_2) + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u' = Ax'^2 + Bx'^2(x'^2 - x^2) + Cx'^2(x'^2 - x^2)(x'^2 - x^2_1) \\ \qquad + Dx'^2(x'^2 - x^2)(x'^2 - x^2_1)(x'^2 - x^2_2) + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

lesquelles étant développées rentrent évidemment dans celles qu'on leur a supposées d'abord. Nous ne nous occuperons ici que de la

première de ces expressions, qui donne

$$u = Ax$$
$$u_1 = Ax_1 + Bx_1(x_1^2 - x^2)$$
$$u_2 = Ax_2 + Bx_2(x_2^2 - x^2) + Cx_2(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)$$
$$\left.\begin{array}{l} u_3 = Ax_3 + Bx_3(x_3^2 - x^2) + Cx_3(x_3^2 - x^2)(x_3^2 - x_1^2) \\ \qquad + Dx_3(x_3^2 - x^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2) \end{array}\right\}$$

etc.

lorsqu'on y fait les substitutions indiquées plus haut. On tire d'abord de ces équations

$$\frac{u}{x} = A$$
$$\frac{u_1}{x_1} = A + B(x_1^2 - x^2)$$
$$\frac{u_2}{x_2} = A + B(x_2^2 - x^2) + C(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)$$
$$\left.\begin{array}{l} \frac{u_3}{x_3} = A + B(x_3^2 - x^2) + C(x_3^2 - x^2)(x_3^2 - x_1^2) \\ \qquad + D(x_3^2 - x^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2) \end{array}\right\}$$

+ etc.

retranchant ensuite la première de celles-ci de chacune des autres, et divisant les résultats par la quantité qui multiplie B, on obtient

$$\frac{u_1 x - u x_1}{x x_1 (x_1^2 - x^2)} = B,$$
$$\frac{u_2 x - u x_2}{x x_2 (x_2^2 - x^2)} = B + C(x_2^2 - x_1^2)$$
$$\frac{u_3 x - u x_3}{x x_3 (x_3^2 - x^2)} = B + C(x_3^2 - x_1^2) + D(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2)$$

etc.

En représentant par U_1, U_2, U_3, etc. les premiers membres de ces dernières équations, et en opérant sur elles comme sur les précédentes, on trouvera

$$\frac{U_2 - U_1}{x_2^2 - x_1^2} = C$$
$$\frac{U_3 - U_1}{x_3^2 - x_1^2} = C + D(x_3^2 - x_2^2)$$

etc.

Les calculs ci-dessus nous donnent déjà la valeur des trois premiers coefficiens A, B, C, et il est facile de les pousser jusqu'à tel coefficient qu'on voudra; il ne nous reste donc plus qu'à mettre sous une forme symétrique les expressions que nous avons obtenues, savoir:

$$A=\frac{u}{x},$$

$$B=\frac{u_1 x - u x_1}{x x_1(x_1^2 - x^2)},$$

$$C=\frac{U_2 - U_1}{x_2^2 - x_1^2}.$$

La seconde peut être écrite ainsi:

$$B=\frac{u}{x(x^2 - x_1^2)}+\frac{u_1}{x_1(x_1^2 - x^2)};$$

En remettant pour U_1 et U_2 les quantités que ces lettres représentent, il viendra

$$C=\frac{u_2 x - u x_2}{x x_2(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}-\frac{u_1 x - u x_1}{x x_1(x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)},$$

expression qui se décompose comme il suit:

$$\left.\begin{aligned}C=\frac{u_2}{x_2(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}-\frac{u}{x(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}\\ -\frac{u_1}{x_1(x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}+\frac{u}{x(x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}\end{aligned}\right\};$$

si l'on réduit entr'eux le second et le quatrième terme, et qu'on range ensuite dans l'ordre des indices, tous les termes et chacun de leurs diviseurs, on trouvera

$$C=\frac{u}{x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)}+\frac{u_1}{x_1(x_1^2 - x^2)(x_1^2 - x_2^2)}+\frac{u_2}{x_2(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)}.$$

On obtiendroit semblablement

$$\left.\begin{aligned}D=\frac{u}{x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)}+\frac{u_1}{x_1(x_2^2 - x^2)(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)}\\ +\frac{u_2}{x_2(x_2^2 - x^2)(x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)}+\frac{u_3}{x_3(x_1^2 - x^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2)}\end{aligned}\right\}.$$

Il sera souvent plus commode de déterminer successivement les

coefficiens les uns par les autres, et dans ce cas on déduira des premières équations ces valeurs très-simples:

$$A=\frac{u}{x}$$

$$B=\frac{u_1-x_1A}{x_1(x_1^2-x^2)}$$

$$C=\frac{u_2-x_2A}{x_2(x_2^2-x^2)(x_2^2-x_1^2)}-\frac{B}{(x_2^2-x_1^2)}$$

$$D=\frac{u_3-x_3A}{x_3(x_3^2-x^2)(x_3^2-x_1^2)(x_3^2-x_2^2)}-\frac{B}{(x_3^2-x_1^2)(x_3^2-x_2^2)}-\frac{C}{(x_3^2-x_2^2)}$$

etc.

Ce que nous venons de faire sur la première des deux formules d'interpolation que nous avons proposées au bas de la page 35, se pratiqueroit avec le même succès sur la seconde; et l'on remarquera sans peine que ce procédé seroit très-commode pour déterminer les coefficiens A, B, C, etc. dans la formule

$$u'=A+B(x'-x)+C(x'-x)(x'-x_1)+D(x'-x)(x'-x_1)(x'-x_2)+\text{etc.}$$

et parvenir ainsi d'une manière immédiate au premier résultat du n°. 876.

879. Nous rapporterons ici deux formules très-élégantes données par Stirling, d'après Newton, et qui se vérifient comme celles du n°. précédent.

Si, aux indices,

etc. -4, -3, -2, -1, 0, $+1$ $+2$, $+3$, $+4$, etc.

répond cette suite de quantités données,

etc. u_{-4} u_{-3} u_{-2} u_{-1} u u_1 u_2 u_3 u_4, etc.

et qu'on en prenne les différences successives comme le montre le tableau ci-dessous,

$$\Delta u_{-4} \quad \Delta u_{-3} \quad \Delta u_{-2} \quad \Delta u_{-1} \quad \Delta u \quad \Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_3$$

$$\Delta^2 u_{-4} \quad \Delta^2 u_{-3} \quad \Delta^2 u_{-2} \quad \Delta^2 u_{-1} \quad \Delta^2 u \quad \Delta^2 u_1 \quad \Delta^2 u_2$$

$$\Delta^3 u_{-4} \quad \Delta^3 u_{-3} \quad \Delta^3 u_{-2} \quad \Delta^3 u_{-1} \quad \Delta^3 u \quad \Delta^3 u_1$$

$$\Delta^4 u_{-4} \quad \Delta^4 u_{-3} \quad \Delta^4 u_{-2} \quad \Delta^4 u_{-1} \quad \Delta^4 u$$

$$\Delta^5 u_{-4} \quad \Delta^5 u_{-3} \quad \Delta^5 u_{-2} \quad \Delta^5 u_{-1}$$

$$\Delta^6 u_{-4} \quad \Delta^6 u_{-3} \quad \Delta^6 u_{-2}$$

$$\Delta^7 u_{-4} \quad \Delta^7 u_{-3}$$

$$\Delta^8 u_{-4}$$

on aura, pour un indice quelconque, désigné par h',

$$u' = u + \frac{h'}{2}(\Delta u + \Delta u_{-1}) + \frac{h'}{2}\,\frac{(h'^2-1)}{1.2.3}(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})$$

$$+ \frac{h'}{2}\,\frac{(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5}(\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3}) + \frac{h'}{2}\,\frac{(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}(\Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4})$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$+ \frac{h'^2}{1.2}\Delta^2 u_{-1} + \frac{h'^2(h'^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_{-2} + \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\Delta^6 u_{-3}$$

$$+ \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7.8}\Delta^8 u_{-4} + \text{ etc.}$$

En faisant pour abréger

$$\begin{array}{ll} \Delta u + \Delta u_{-1} = B, & \Delta^2 u_{-1} = b \\ \Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2} = C, & \Delta^4 u_{-2} = c \\ \Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3} = D, & \Delta^6 u_{-3} = d \\ \Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4} = E, & \Delta^8 u_{-4} = e \\ \text{etc.} & \end{array}$$

on aura

$$u' = u + \frac{Bh' + bh'^2}{1.2}$$

$$+ \frac{2Ch' + ch'^2}{1.2}\;\frac{h'^2-1}{3.4}$$

$$+ \frac{3Dh' + dh'^2}{1.2}\;\frac{h'^2-1}{3.4}\;\frac{h'^2-4}{5.6}$$

$$+ \frac{4Eh' + eh'^2}{1.2}\;\frac{h'^2-1}{3.4}\;\frac{h'^2-4}{5.6}\;\frac{h'^2-9}{7.8}$$

$$+ \text{ etc.}$$

C'est sous cette forme que Stirling a présenté le résultat précédent, qui sert, comme on voit, à interpoler entre un nombre impair de quantités équidistantes, en plaçant l'origine des indices à la quantité moyenne.

880. Lorsque le nombre des quantités données est pair, on place l'origine des indices au milieu de l'intervalle qui sépare les deux quantités moyennes comme ci-dessous,

etc.	-7,	-5,	-3,	-1,	0,	$+1$,	$+3$,	$+5$,	$+7$, etc.
etc.	u_{-7}	u_{-5}	u_{-3}	u_{-1}		u_1	u_3	u_5	u_7, etc.

et prenant les différences successives, comme plus haut, on forme le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\Delta u_{-7} & & \Delta u_{-5} & & \Delta u_{-3} & & \Delta u_{-1} & & \Delta u_{1} & & \Delta u_{3} & & \Delta u_{5} \\
& \Delta^2 u_{-7} & & \Delta^2 u_{-5} & & \Delta^2 u_{-3} & & \Delta^2 u_{-1} & & \Delta^2 u_{1} & & \Delta^2 u_{3} & \\
& & \Delta^3 u_{-7} & & \Delta^3 u_{-5} & & \Delta^3 u_{-3} & & \Delta^3 u_{-1} & & \Delta^3 u_{1} & & \\
& & & \Delta^4 u_{-7} & & \Delta^4 u_{-5} & & \Delta^4 u_{-3} & & \Delta^4 u_{-1} & & & \\
& & & & \Delta^5 u_{-7} & & \Delta^5 u_{-5} & & \Delta^5 u_{-3} & & & & \\
& & & & & \Delta^6 u_{-7} & & \Delta^6 u_{-5} & & & & & \\
& & & & & & \Delta^7 u_{-7} & & & & & &
\end{array}$$

désignant toujours par h' l'indice auquel répond la valeur générale u', on aura

$$\begin{aligned}
u' = {} & \frac{1}{2}(u_1+u_{-1}) + \frac{h'^2-1}{2.4}\,\frac{1}{2}(\Delta^2 u_{-1}+\Delta^2 u_{-3}) + \frac{(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8}\,\frac{1}{2}(\Delta^4 u_{-3}+\Delta^4 u_{-5}) \\
& + \frac{(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12}\,\frac{1}{2}(\Delta^6 u_{-5}+\Delta^6 u_{-7}) + \text{etc.} \\
& + \frac{h'}{2}\Delta u_{-1} + \frac{h'(h'^2-1)}{2.4.6.}\Delta^3 u_{-3} + \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8.10}\Delta^5 u_{-5} \\
& + \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12.14}\Delta^7 u_{-7} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Pour présenter cette formule comme l'a fait Stirling, il faut poser

$$\begin{array}{ll}
u_1 + u_{-1} = A, & \Delta u_{-1} = a \\
\Delta^2 u_{-1} + \Delta^2 u_{-3} = B, & \Delta^3 u_{-3} = b \\
\Delta^4 u_{-3} + \Delta^4 u_{-5} = C, & \Delta^5 u_{-5} = c \\
\Delta^6 u_{-5} + \Delta^6 u_{-7} = D, & \Delta^7 u_{-7} = d \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

et il viendra

$$\begin{aligned}
u' = {} & \frac{A + ah'}{2} \\
& + \frac{3B + bh'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6} \\
& + \frac{5C + ch'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6}\,\frac{h'^2-9}{8.10} \\
& + \frac{7D + dh'}{2}\,\frac{h'^2-1}{4.6}\,\frac{h'^2-9}{8.10}\,\frac{h'^2-25}{12.14} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Il faut observer que dans le cas actuel la différence entre deux indices consécutifs des quantités données est 2, en sorte que la distance de u' à u_1, prise, en comptant chaque intervalle pour l'unité, est exprimée par $\frac{h'-1}{2}$.

881. La formule du n°. précéd. se déduit de celle du n°. 879, en prenant les différences de chaque membre par rapport à h'; pour cela on supposera que h' se change en $h'+1$, et du résultat de cette substitution on retranchera l'expression de u' citée. Il est évident que les coefficiens numériques varieront seuls dans cette opération, puisque les quantités u et leurs différences sont indépendantes de h'; tout se réduit donc à former les différences de ces coefficiens. Pour montrer comment on y parvient, nous prendrons un coefficient de chacune des deux suites partielles qui composent la valeur de $u'_{\prime}$.

Dans la première, $\frac{h'}{2}\,\frac{(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5}$, qui équivaut à

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-2)(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5},$$

devient $\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5}$; retranchant de cette valeur la précédente, on trouvera

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5}\{(h'+3)-(h'-2)\}=\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4}.$$

Dans la seconde suite le coefficient

$$\frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6}=\frac{(h'-2)(h'-1)h'.h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}$$

se change en

$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5.6},$$

et la différence de cette valeur à la précédente est

$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}\{(h'+1)(h'+3)-(h'-2)h'\}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(2h'+1)}{1.2.3.4.5}.$$

En opérant de même sur les autres coefficiens, on trouvera

$$\Delta u' = \tfrac{1}{2}(\Delta u + \Delta u_{-1}) + \frac{h'(h'+1)}{1.2}\,\frac{1}{2}(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})$$

$$+ \frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.}\,\frac{1}{2}(\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3}) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{(2h'+1)}{1}\,\frac{1}{2}\Delta^2 u_{-1} + \frac{(2h'+1)(h'+1)h'}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\Delta^4 u_{-2}$$

$$+ \frac{(2h'+1)(h'+2)(h'+1)h'(h'-1)}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{2}\Delta^6 u_{-3} + \text{etc.}$$

Cette expression n'est que celle d'une différence première, mais on passera à l'expression de u' en diminuant de l'unité les exposans des caractéristiques Δ, puisque cela revient à prendre les différences premières pour des quantités primitives, les différences secondes pour des différences premières, et ainsi de suite ; et comme la formule d'où nous sommes partis suppose que les valeurs données soient en nombre impair, leurs différences, prises maintenant pour les valeurs données, sont nécessairement en nombre pair, ainsi qu'on peut le voir dans la seconde ligne du tableau du n°. 879 ; mais afin de placer, comme dans le n°. 880, l'origine des indices entre les deux quantités moyennes, qui sont désignées ici par u_{-1} et u, et faire que la différence de ces indices soit de deux unités, il faut écrire $\frac{h'-1}{2}$, au lieu de h', et remplacer ensuite

$$\ldots u_{-4} \quad u_{-3} \quad u_{-2} \quad u_{-1} \quad u \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3, \ldots$$

par

$$\ldots u_{-7} \quad u_{-5} \quad u_{-3} \quad u_{-1} \quad u_1 \quad u_2 \quad u_5 \quad u_7, \ldots$$

En effectuant ces transformations avec soin, on retombera sur l'expression de u' relative au cas où le nombre des quantités données est pair.

Il seroit possible de déduire aussi de l'expression $u' = u + \frac{du}{dx}\frac{h'}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2} + \text{etc.}$ la formule du n°. 879, par des considérations analogues à celles du n°. 873, mais nous reviendrons dans la suite sur cet objet par une méthode plus générale et plus simple.

882. Lorsque les différences successives des quantités données ne forment pas une suite convergente, il faut changer la forme que l'on suppose au développement de u'. Prony ayant reconnu que l'expression

$$u' = A\alpha^{x'} + B\beta^{x'} + C\gamma^{x'} + \text{etc.}$$

étoit propre à exprimer les loix de la dilatation qu'éprouvent les fluides élastiques par l'effet de la chaleur, a donné une méthode très-simple pour déterminer les coefficiens A, B, C, etc. et les quantités α, β, γ, etc. mais comme cette méthode se lie naturellement avec la théorie d'une espèce de suites, nommées *suites récurrentes*, que nous devons traiter avec étendue, nous différerons jusques-là d'en parler.

Charles a aussi proposé quelques formules d'interpolation dans lesquelles il a introduit les sinus. Voici celles qui paroissent les plus commodes :

$$u' = p\frac{u\sin\pi x'}{\sin p\pi x'} + q\frac{u_1\sin\pi(x'-1)}{\sin q\pi(x'-1)} + r\frac{u_2\sin\pi(x'-2)}{\sin r\pi(x'-2)} + \text{etc.}$$

$$\pi u' = p\frac{u\sin\pi x'}{e^{px'}-1} + q\frac{u_1\sin\pi(x'-1)}{e^{q(x'-1)}-1} + r\frac{u_2\sin\pi(x'-2)}{e^{r(x'-2)}-1} + \text{etc.}$$

$$\pi^2 u' = p(\sin\pi x')^2\left\{\frac{u}{x'^2} - \frac{u_1}{(x'-1)^2} + \frac{u_2}{(x'-2)^2} - \frac{u_3}{(x'-3)^2} + \text{etc.}\right\}:$$

On y suppose que les valeurs u, u_1, u_2, etc. répondent aux indices 0, 1, 2, 3, etc. Dans les deux premières les quantités p, q, r, etc. sont indéterminées, mais cependant assujetties à la condition de n'être pas des nombres entiers ou des fractions dont le dénominateur soit moindre que l'indice de u, dans le terme qu'elles affectent, et peuvent servir à remplir des conditions auxquelles seroient soumises en particulier les valeurs intermédiaires que l'on cherche.

La composition de ces formules repose sur le même principe que celle de la formule du n°. 877; les deux membres de chacune d'elles deviennent identiques lorsque l'on fait successivement

$$\begin{array}{llll} x'=0, & x'=1, & x'=2, & x'=3, \text{ etc.} \\ u'=u, & u'=u_1, & u'=u_2, & u'=u_3, \text{ etc.} \end{array}$$

Le second se réduit toujours à un seul terme, qui se présente

d'abord sous la forme de $\frac{0}{0}$, mais dont il est facile de trouver la vraie valeur. En effet, si l'on suppose, par exemple, $x'=1$, les numérateurs des termes de deux premières formules s'évanouissent tous, mais il n'y a que le dénominateur du second terme auquel il en arrive autant; maintenant si l'on observe que

$$\sin\pi(x'-1)=\frac{\pi(x'-1)}{1}-\frac{\pi^3(x'-1)^3}{1.2.3}+\text{etc. (}\mathit{Int.}\text{ n}^\circ.\ 35\text{)}$$

$$e^{q(x'-1)}-1=\frac{q(x'-1)}{1}+\frac{q^2(x'-1)^2}{1.2}+\text{etc. (}\mathit{Int.}\text{ n}^\circ.\ 22\text{)},$$

on verra que les expressions $q\frac{u_1\sin\pi(x'-1)}{\sin q\pi(x'-1)}$, $q\frac{u_1\sin\pi(x'-1)}{e^{q(x'-1)}-1}$ se réduisent, l'une à u_1, l'autre à πu_1, lorsque $x'=1$. Les numérateurs de tous les termes du second membre de la troisième formule étant multipliés par $(\sin\pi x')^2$, s'évanouiront toutes les fois que x' sera égal à un nombre entier; mais il n'y a qu'un seul des dénominateurs qui disparoisse: quand on a, par exemple, $x'=1$, le terme $\frac{u_1(\sin\pi x')^2}{(x'-1)^2}$ se réduit à $\pi^2 u_1$.

883. Quoique le but de l'interpolation soit en général de déterminer des valeurs intermédiaires entre des quantités observées, sans connoître la loi qui lie ces quantités à leurs indices, ou à la variable dont elles dépendent, on l'employe aussi lorsque cette loi est connue et exprimée analytiquement, mais que les calculs nécessaires pour évaluer en nombres les formules qui en résultent sont très-compliqués. On se contente alors de déterminer par ces formules, de distance en distance, des résultats rigoureux, entre lesquels on interpole ensuite les valeurs intermédiaires qui doivent compléter la série qu'on se propose de former. Dans ce cas on ne prend point les différences successives des valeurs calculées par les formules résultantes de la loi, mais on déduit ces différences de l'expression analytique de cette loi; on en pousse la suite jusqu'à ce qu'il s'en trouve d'assez petites pour qu'on puisse les négliger, et par leur moyen on calcule les valeurs successives de la fonction u. Quoique la formation de ces valeurs

soit facile à déduire des relations obtenues dans le n°. 860, néanmoins pour plus de clarté, j'en rapporterai ici le tableau, en tenant compte des différences quatrièmes que je supposerai constantes, ce qui donnera

$u=u$			
$u_1=u+\Delta u$			
$u_2=u_1+\Delta u_1$	$\Delta u_1=\Delta u+\Delta^2 u$		
$u_3=u_2+\Delta u_2$	$\Delta u_2=\Delta u_1+\Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_1=\Delta^2 u+\Delta^3 u$	
$u_4=u_3+\Delta u_3$	$\Delta u_3=\Delta u_2+\Delta^2 u_2$	$\Delta^2 u_2=\Delta^2 u_1+\Delta^3 u_1$	$\Delta^3 u_1=\Delta^3 u+\Delta^4 u$
$u_5=u_4+\Delta u_4$	$\Delta u_4=\Delta u_3+\Delta^2 u_3$	$\Delta^2 u_3=\Delta^2 u_2+\Delta^3 u_2$	$\Delta^3 u_2=\Delta^3 u_1+\Delta^4 u$
$u_6=u_5+\Delta u_5$	$\Delta u_5=\Delta u_4+\Delta^2 u_4$	$\Delta^2 u_4=\Delta^2 u_3+\Delta^3 u_3$	$\Delta^3 u_3=\Delta^3 u_2+\Delta^4 u$
etc.	etc.	etc.	etc.

On voit par ce tableau qu'il faut calculer d'abord la différence placée dans la colonne la plus à droite. Pour obtenir u_6, par exemple, on forme $\Delta^3 u_3$, en ajoutant à la valeur de $\Delta^3 u_2$ celle de $\Delta^4 u$, qui est regardée comme constante; ajoutant ensuite $\Delta^3 u_3$ avec $\Delta^2 u_3$, qu'on suppose déjà connue, on parviendra à $\Delta^2 u_4$: en ajoutant enfin $\Delta^2 u_4$ à la différence première Δu_4, placée dans la ligne supérieure, il en résultera Δu_5, qui est la quantité qu'il faut joindre à u_5 pour avoir u_6.

Il est aisé, d'après ce modèle, de former le tableau qui conviendroit au cas où l'on s'arrêteroit à des différences d'un ordre plus élevé que le quatrième. On a aussi cette formule générale qu'il est bon de connoître:

$$u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-3}+\Delta^3 u_{n-4} \ldots\ldots + \Delta^{n-2} u_1+\Delta^{n-1} u+\Delta u;$$

elle s'obtient en mettant d'abord dans l'équation $u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-1}$, à la place de Δu_{n-1}, sa valeur $\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-2}$, puis en chassant $\Delta^2 u_{n-2}$ du résultat, par le moyen de sa valeur $\Delta^2 u_{n-3}+\Delta^3 u_{n-3}$, et ainsi de suite. Lorsque l'on veut se borner aux différences de l'ordre m, on fait $\Delta^{m+1} u=0$, etc. d'où il suit $\Delta^m u=\Delta^m u_1=\Delta^m u_2$, etc. il vient pour ce cas

$$u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-3}+\ldots\ldots+\Delta^{m-1} u_{n-m}+\Delta^m u.$$

En diminuant successivement d'une, deux, trois, etc. unités, les indices, et en soumettant chaque terme à une, deux, trois, etc.

nouvelles différentiations, on tirera de cette formule

$$\Delta u_{n-1} = \Delta u_{n-2} + \Delta^2 u_{n-3} + \Delta^3 u_{n-4} \ldots\ldots + \Delta^{m-1} u_{n-m-1} + \Delta^m u$$
$$\Delta^2 u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-3} + \Delta^3 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-5} \ldots\ldots + \Delta^{m-1} u_{n-m-2} + \Delta^m u$$
$$\Delta^3 u_{n-3} = \Delta^3 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-5} + \Delta^5 u_{n-6} \ldots\ldots + \Delta^{m-1} u_{n-m-3} + \Delta^m u$$
etc.

Pour éclaircir cet usage du Calcul des différences, nous allons considérer successivement les fonctions logarithmiques et les fonctions circulaires, qui sont celles dont les tables servent le plus fréquemment.

884. Soit $u = \text{l}.x$, on aura, par la formule du n°. 863,

$$\Delta u = M \left\{ \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \text{etc.} \right\}$$
$$\Delta^2 u = -M \left\{ \frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \text{etc.} \right\}$$
$$\Delta^3 u = M \left\{ \frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.} \right\}$$
etc.

On poussera ces suites, selon la grandeur du nombre x, jusqu'à ce que la dernière différence soit assez petite pour être négligée sans erreur sensible. Si l'on avoit, par exemple, $x = 10000$, et $h = 1$, on trouveroit pour les logarithmes ordinaires,

$$\Delta u = 0{,}00004 \ 34272 \ 76863$$
$$\Delta^2 u = -0{,}00000 \ 00043 \ 42077$$
$$\Delta^3 u = 0{,}00000 \ 00000 \ 00867;$$

et il est évident que si l'on ne veut avoir les derniers résultats qu'avec dix chiffres seulement, on pourra, sans craindre d'erreur sensible, négliger $\Delta^4 u$.

Cela posé, on aura le logarithme de 10001, en ajoutant à celui de 10000, qui est 4,00000 00000 00000, la valeur de Δu rapportée ci-dessus; pour passer à celui de 10002, il faudra ajouter à celui de 10001 la quantité $\Delta u - \Delta^2 u$, puisque $\Delta^2 u$ est négatif; et si l'on représente cette quantité par Δu_1, le logarithme de 10003 s'obtiendra en augmentant celui de 10002 de la quantité $\Delta u_1 - \Delta^2 u + \Delta^3 u$. Faisant $\Delta u_1 - \Delta^2 u + \Delta^3 u = \Delta u_2$, $-\Delta^2 u + \Delta^3 u = -\Delta^2 u_1$, la

quantité $\Delta u_2 - \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u$ sera ce qu'il faut ajouter au logarithme de 10003, pour avoir celui de 10004, et ainsi de suite. On pourra former ainsi, par de simples additions, les logarithmes de tous les nombres entiers consécutifs à 10000, tant que la somme des différences qu'on néglige à chaque opération ne sera pas assez considérable pour influer sur le dernier chiffre décimal auquel on veut borner l'exactitude de la table, et c'est ce qu'on reconnoîtra au moyen de quelques logarithmes calculés rigoureusement à des intervalles éloignés; car lorsque par la suite des additions successives, on sera parvenu à ces logarithmes, il faudra que la méthode des différences les donne tels qu'ils ont été déduits *à priori*, au moins dans les dix premiers chiffres, si c'est à ce nombre que l'on veut s'arrêter. On iroit, par ce qui précède, jusqu'à 10100, sans trouver d'erreur sur la dixième décimale; parvenu à ce but, on calculeroit de nouveau *à priori* les différences Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, et on se serviroit de ces derniers résultats comme des précédens, pour obtenir les logarithmes des nombres entiers qui suivent 10100.

885. Voici d'autres expressions plus convergentes des différences premières et secondes de la fonction logarithmique. La série

$$l(n+z)=l\,n+2M\left\{\frac{z}{2n+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5+\text{etc.}\right\},$$

obtenue dans le n°. 28 de l'Introduction, donne, en changeant n en x et z en h,

$$\Delta u=2M\left\{\frac{h}{2x+h}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5+\text{etc.}\right\};$$

on pourroit former $\Delta^2 u$, en développant la série

$$\frac{d\Delta u}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2\Delta u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

mais on arrivera à un résultat plus simple, en ajoutant ensemble les deux équations

$$l(x+h)=l\,x+M\left\{\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\text{etc.}\right\}$$

$$l(x-h)=l\,x-M\left\{\frac{h}{x}+\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}+\frac{h^4}{4x^4}+\text{etc.}\right\},$$

d'où il résulte

$$l(x+h)+l(x-h)=2lx-2M\left\{\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^4}{4x^4}+\frac{h^6}{6x^6}+\text{etc.}\right\}.$$

Si l'on change $x-h$ en x, et qu'on écrive par conséquent $x+h$ pour x et $x+2h$ pour $x+h$, il viendra

$$l(x+2h)-2l(x+h)+lx=$$
$$-2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2}+\frac{h^4}{4(x+h)^4}+\frac{h^6}{6(x+h)^6}+\text{etc.}\right\};$$

or le premier membre, qui est équivalent à u_2-2u_1+u, se réduit $\Delta^2 u$: on a donc

$$\Delta^2 u=-2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2}+\frac{h^4}{4(x+h)^4}+\frac{h^6}{6(x+h)^6}+\text{etc.}\right\}.$$

Lorsque x est un peu grand par rapport à h, il suffit de tenir compte des deux premiers termes de l'expression de Δu. En effet, quand $x=10000$ et $h=1$, le second terme, savoir, $\frac{2M}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3$ donne seulement 0,00000 00000 00036, et le suivant auroit 21 zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif. A l'égard de $\Delta^2 u$ on peut se borner au premier terme; car le second, $\frac{M}{2}\frac{h^4}{(x+h)^4}$, se réduit à 0,00000 00000 00000 0217. Il suit de là qu'en désignant par N un nombre au-dessus de 10000, on a avec une fort grande exactitude

$$\Delta l N=2M\left(\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}\right),$$

$$\Delta^2 l N=-\frac{M}{(N+1)^2};$$

quant à la différence troisième, on auroit le premier terme de sa valeur en calculant le premier terme du développement de $d.\frac{\Delta^2 l N}{dN}$, dont l'expression est $\frac{2M}{(N+1)^3}$. On voit par-là que la valeur de $\Delta^3 N$ deviendra bientôt assez petite pour qu'on puisse la négliger, et rien

rien ne sera alors plus facile que de construire une table de logarithmes d'après ce qui vient d'être dit. Au reste, si l'on vouloit plus de détail sur ce sujet, il faudroit consulter un Mémoire de Delambre, imprimé parmi ceux de l'Académie de Turin, pour les années 1790-91, d'où nous avons tiré ce qui précède, et duquel nous extrairons encore ce qui regarde les différences des fonctions circulaires.

886. Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur les expressions des différences de la fonction a^x, parce qu'elles sont d'un usage beaucoup moins fréquent que celles des différences logarithmiques; elles sont d'ailleurs très-faciles à former, après ce qu'on a vu dans le n°. 864. On a en effet $\Delta^n . a^x = a^x(a^h - 1)^n$, et le développement de $(a^h - 1)^n$ se trouve dans le n°. 866.

On obtiendra tout aussi simplement le développement de $\Delta^n . a^x y$, y étant une fonction quelconque de x; on aura d'abord l'équation

$$\Delta . a^x y = (y + \Delta y) a^{x+h} - y a^x = a^x[(a^h - 1)y + a^h \Delta y],$$

et faisant $(a^h - 1)y + a^h \Delta y = y'$, il viendra

$$\Delta^2 . a^x y = a^x[(a^h - 1)y' + a^h \Delta y'];$$

puis posant $(a^h - 1)y' + a^h \Delta y' = y''$, on en tirera

$$\Delta^3 . a^x y = a^x[(a^h - 1)y'' + a^h \Delta y'']:$$

etc.

chassant ensuite y', y'', etc. après avoir fait pour simplifier $a^h = \alpha$, on trouvera

$$\Delta^2 . a^x y = a^x[(\alpha - 1)^2 y + 2(\alpha - 1)\alpha \Delta y + \alpha^2 \Delta^2 y]$$

$$\Delta^3 . a^x y = a^x[(\alpha - 1)^3 y + 3(\alpha - 1)^2 \alpha \Delta y + 3(\alpha - 1)\alpha^2 \Delta^2 y + \alpha^3 \Delta^3 y],$$

et en général

$$\Delta^n . a^x y = a^x\left[(\alpha - 1)^n y + n(\alpha - 1)^{n-1} \alpha \Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha - 1)^{n-2} \alpha^2 \Delta^2 y \ldots + \alpha^n \Delta^n y\right].$$

887. Puisqu'on a $\sin(x + h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$, on en déduira

$$\Delta \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$$
$$= \cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h);$$

et en observant que $1 - \cos h = 2(\sin \tfrac{1}{2} h)^2$, il viendra

$$\Delta \sin x = \cos x \sin h - 2 \sin x (\sin \tfrac{1}{2} h)^2.$$

Telle est l'expression rigoureuse de la différence première de $\sin x$,

par laquelle on passe de $\sin x$ à $\sin(x+h)$. Pour obtenir celle qui mène de $\sin x$ à $\sin(x-h)$, on aura

$$\begin{aligned}\sin x - \sin(x-h) &= \sin x - \sin x \cos h + \cos x \sin h \\ &= \cos x \sin h + \sin x (1-\cos h)\end{aligned}$$

et si on désigne cette différence par $\Delta' \sin x$, on aura

$$\Delta' \sin x = \cos x \sin h + 2 \sin x (\sin \tfrac{1}{2} h)^2,$$

d'où on tirera

$$\Delta \sin x - \Delta' \sin x = -4 \sin x (\sin \tfrac{1}{2} h)^2.$$

Il est évident que $\Delta \sin x - \Delta' \sin x$ n'est autre chose que la différence seconde de $\sin(x-h)$; et si on veut en déduire celle de $\sin x$, il suffira de changer $x-h$ en x, et d'écrire par conséquent $x+h$ pour x, ce qui donnera

$$\Delta^2 \sin x = -4 \sin(x+h)(\sin \tfrac{1}{2} h)^2.$$

On donnera une forme analogue à la différence première par le moyen de la formule

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A-B) \cos \tfrac{1}{2}(A+B),$$

de laquelle il résulte

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} h \cos \tfrac{1}{2}(2x+h);$$

et comme on a aussi

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \tfrac{1}{2}(A-B) \sin \tfrac{1}{2}(A+B),$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\Delta^2 \sin x &= 2 \sin \tfrac{1}{2} h \left[\cos \tfrac{1}{2}(2x+3h) - \cos \tfrac{1}{2}(2x+h)\right] \\ &= -4(\sin \tfrac{1}{2} h)^2 \sin \tfrac{1}{2}(2x+2h) = -4(\sin \tfrac{1}{2} h)^2 \sin(x+h).\end{aligned}$$

En poursuivant ainsi on arrivera à ces formules générales

$$\begin{aligned}\Delta^{4i} \sin x &= 2^{4i} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{4i} \sin \tfrac{1}{2}(2x+4ih) \\ \Delta^{4i+1} \sin x &= 2^{4i+1} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{4i+1} \cos \tfrac{1}{2}(2x+(4i+1)h) \\ \Delta^{4i+2} \sin x &= -2^{4i+2} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{4i+2} \sin \tfrac{1}{2}(2x+(4i+2)h) \\ \Delta^{4i+3} \sin x &= -2^{4i+3} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{4i+3} \cos \tfrac{1}{2}(2x+(4i+3)h),\end{aligned}$$

renfermées dans les deux suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta^{2n} \sin x &= \pm 2^{2n} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{2n} \sin \tfrac{1}{2}(2x+2nh) \\ \Delta^{2n+1} \sin x &= \pm 2^{2n+1} (\sin \tfrac{1}{2} h)^{2n+1} \cos \tfrac{1}{2}(2x+(2n+1)h),\end{aligned}$$

dans lesquelles il faut prendre le signe $+$ lorsque n est un nombre pair, et le signe $-$ dans le cas contraire.

888. Les formules ci-dessus sont déjà très-commodes, mais Legendre est parvenu à quelque chose de plus simple encore, en exprimant les différences de l'ordre n par celles de l'ordre $n-1$ et de l'ordre $n-2$, au moyen de cette équation :

$$\Delta^n \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\{\Delta^{n-1}\sin x + \Delta^{n-2}\sin x\}.$$

Pour en prouver la vérité, nous ferons remarquer premièrement que

$$\Delta^{4i}\sin x = 2^{4i}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i}\sin(x+2ih)$$
$$= -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\times -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+2ih),$$

et que $\quad -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+2ih) = \Delta^2\sin(x+(2i-1)h)$,
ce qui donne

$$\Delta^{4i}\ \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^2\sin(x+(2i-1)h) \quad (1).$$

Par de semblables décompositions on trouvera de même

$$\Delta^{4i+1}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^3\sin(x+(2i-1)h) \quad (2)$$
$$\Delta^{4i+2}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\Delta^4\sin(x+(2i-1)h) \quad (3)$$

et si l'on diminue l'exposant de Δ, il viendra aussi

$$\Delta^{4i-1}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{i-2}\Delta\ \sin(x+(2i-1)h) \quad (4)$$
$$\Delta^{4i-2}\sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i-2}\ \ \sin(x+(2i-1)h) \quad (5);$$

multiplions maintenant par $-(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, la somme des équations (4) et (5), en faisant pour abréger $x+(2i-1)h=x'$, nous aurons
$-(2\sin\frac{1}{2}h)^2\{\Delta^{4i-1}\sin x+\Delta^{4i-2}\sin x\}=(2\sin\frac{1}{2}h)^{4i}(\sin x'+\Delta\sin x')$;
or $\sin x'+\Delta\sin x'=\sin(x'+h)=\sin(x+2ih)$
et $(2\sin\frac{1}{2}h)^{4i}\sin(x+2ih)=\Delta^{4i}\sin x$:
donc $\Delta^{4i}\sin x = -(2\sin\frac{1}{2}h)^2(\Delta^{4i-1}\sin x+\Delta^{4i-2}\sin x)$.

Si l'on traite de la même manière les expressions de $\Delta^{4i-1}\sin x$, et de $\Delta^{4i}\sin x$, on trouvera que leur somme multipliée par $-\left(2\sin\frac{1}{2}h\right)^2$ est égale à la première valeur de $\Delta^{4i+1}\sin x$; il en sera de même des expressions de $\Delta^{4i}\sin x$ et de $\Delta^{4i+1}\sin x$, par rapport à $\Delta^{4i+2}\sin x$; enfin de celles de $\Delta^{4i+1}\sin x$ et de $\Delta^{4i+2}\sin x$, à l'égard de $\Delta^{4i+3}\sin x$. Dans tous ces calculs il faut prendre chaque différence avec le signe dont elle est affectée; et comme les quatre résultats indiqués comprennent les diverses variations qu'il peut y avoir dans ces signes, l'équation posée au commencement de cet article se trouve démontrée pour tous les cas.

889. L'expression générale $u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_1 + \Delta u + \Delta^2 u$ donne $\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, lorsqu'on y met pour $\Delta^2 \sin x$ sa valeur du n°. 887. Cette formule est très-expéditive pour calculer des tables de sinus; car en faisant successivement $x=0°$, $x=1°$, $x=2°$, etc. et prenant $h=1°$, on aura

$$\sin 2° = \sin 1° + (\sin 1° - \sin 0°) - \sin 1°(2\sin 30')^2$$
$$\sin 3° = \sin 2° + (\sin 2° - \sin 1°) - \sin 2°(2\sin 30')^2$$
$$\sin 4° = \sin 3° + (\sin 3° - \sin 2°) - \sin 3°(2\sin 30')^2$$
etc.

et il ne sera besoin de calculer par la série

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \text{ etc.}$$ (*Int.* n°. 35);

que le sinus de 30' et celui de 1°, pour lesquels cette série est très-convergente: si l'on forme ensuite les produits des neuf premiers nombres par le terme constant $(2\sin 30')^2$, il ne restera plus à effectuer que de simples additions et soustractions. En calculant avec treize décimales, l'erreur, suivant Delambre, n'iroit qu'à 0,00000 00000 06 sur le sinus de 60°. Passé ce terme, les sinus s'obtiendront par la formule $\sin(60°+A) = \sin(60°-A) + \sin A$,
et l'on aura, pour se vérifier dans l'intervalle, les sinus suivans

$$\sin 15° = \sqrt{\tfrac{3}{8}} - \sqrt{\tfrac{1}{8}}, \quad \sin 18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}, \quad \sin 30° = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin 45° = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \sin 54° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}, \quad \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

En écrivant $x-1'$, $x-10''$, au lieu de x, dans la formule $\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, et faisant $h=1'$, $h=10''$, on aura ces deux équations:

$$\sin(x+1') = \sin x + [\sin x - \sin(x-1')] - \sin x(2\sin 30'')^2$$
$$\sin(x+10'') = \sin x + [\sin x - \sin(x-10'')] - \sin x(2\sin 5'')^2$$

qui serviront à calculer les sinus de minute en minute et de dix secondes en dix secondes, lorsqu'on aura obtenu, par la série rapportée ci-dessus, les valeurs de sin 1' et de sin 30'', celles de sin 10'' et de sin 5''.

L'équation dont nous venons de faire usage peut être retournée ainsi:

$$\sin x = \sin(x+h) - [\sin(x+2h) - \sin(x+h)] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2$$

et devient

$$\sin(x-2h) = \sin(x-h) - [\sin x - \sin(x-h)] - \sin(x-h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2$$

par la substitution de $x-2h$, au lieu de x; dans cet état elle

donneroit successivement les sinus, en partant de l'arc de 90° et en allant vers 0°.

890 La manière d'employer la formule

$$\Delta^n \sin x = -\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \{\Delta^{n-1}\sin x + \Delta^{n-2}\sin x\}$$

n'est pas difficile à trouver. En partant d'abord de 0°, pour passer à un arc très-petit, que je supposerai représenté par h, les expressions de $\Delta \sin x$ et de $\Delta^2 \sin x$ donneront d'abord

$$\Delta . \sin 0° = 2\sin\tfrac{1}{2}h \cos\tfrac{1}{2}h$$
$$\Delta^2 \sin 0° = (2\sin\tfrac{1}{2}h)^2 \sin h.$$

Ces deux différences étant calculées, on aura $\sin h$ et $\sin 2h$; puis formant les produits des neuf premiers nombres par le facteur constant $(2\sin\frac{1}{2}h)^2$, on tirera des équations

$$\Delta^3 \sin 0° = -\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \{\Delta \sin 0° + \Delta^2 \sin 0°\}$$
$$\Delta^4 \sin 0° = -\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2 \{\Delta^2 \sin 0° + \Delta^3 \sin 0°\}$$

etc.

par de simples additions et soustractions, les valeurs des différences successives, au moyen desquelles on formera celles de $\sin 3h$, $\sin 4h$, etc. (n°. 883).

C'est par des procédés semblables qu'ont été calculées dans les bureaux du cadastre, les grandes tables des sinus naturels, avec 25 décimales, pour les 10000emes parties du quart de cercle. Prony, qui a dirigé ce beau travail, le plus étendu qu'on ait encore exécuté dans ce genre, ne manquera pas sans doute de faire connoître en détail les méthodes dont on s'est servi pour en simplifier le calcul. Les tables des sinus sont déjà stéréotypées, et il est bien à désirer qu'on en fasse bientôt jouir l'Europe savante; il ne reste plus qu'à imprimer les logarithmes des sinus et des tangentes qui ont été calculés avec seize décimales.

Les tangentes se déduisent si facilement des sinus et des cosinus, qu'il est inutile de recourir à d'autres formules; d'ailleurs leurs différences ne se présentent pas sous une forme commode, et

puis dès qu'on les a jusqu'à 45°, on obtient celles des arcs suivans par l'équation

$$\tang(45° + \tfrac{1}{2}A) = 2\tang A - \tang(45° - \tfrac{1}{2}A).$$

Les sécantes se déduisent sans peine de la formule

$$\sec A = \tang(45° \pm \tfrac{1}{2}A) \mp \tang A.$$

891. Nous passerons donc au calcul des logarithmes des sinus; nous observerons d'abord, que la formule $\sin\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\sin A}{2\cos\tfrac{1}{2}A}$ donne tous ceux des sinus des arcs moindres que 45° par le moyen de ceux des sinus des arcs compris entre 45° et 90°. Pour obtenir ces derniers de degré en degré, Delambre propose la série

$$l\sin(x+h) = l\sin x + 2M\left\{\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x}\right]^3 + \text{etc.}\right\}$$

qui se déduit de la série

$$l(n+z) = ln + 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

(*Int.* n°. 28), en faisant $n = \sin x$, et $n + z = \sin(x+h)$, d'où il résulte $z = \sin(x+h) - \sin x$. En mettant $\Delta\sin x$, au lieu de z, on aura

$$l\sin(x+h) = l\sin x + 2M\left\{\frac{\Delta\sin x}{2\sin x + \Delta\sin x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta\sin x}{2\sin x + \Delta\sin x}\right)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

Si l'on prend $x = 45°$ et $h = 1°$, on aura pour le sinus de 46° une série très-convergente, et qui le deviendra de plus en plus à mesure qu'on avancera vers 90°, parce que la différence $\Delta\sin x$ va toujours en diminuant: quant au sinus de 45°, son logarithme est $\tfrac{1}{2}l\tfrac{1}{2}$ (*).

Les différences successives de $\Delta l\sin x$, déduites de la formule ci-dessus, ne se présentent pas sous une forme assez commode pour

(*) Nous ne pouvons passer sous silence une série très-simple, propre à donner le logarithme du cosinus lorsque l'arc est très-petit, et que Delambre a fait remarquer le premier. On sait que

$$l(1-x^2) = -2M\left\{\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^6 + \text{etc.}\right\}, \text{ (n°. 40).}$$

Si l'on change x en $\sin x$, on aura $1 - x^2 = \cos x^2$, $l(1-x^2)$ deviendra $l\cos x^2$ ou $2l\cos x$, et on obtiendra par conséquent

$$l\cos x = -M\left\{\tfrac{1}{2}\sin x^2 + \tfrac{1}{4}\sin x^4 + \tfrac{1}{6}\sin x^6 + \text{etc.}\right\}.$$

être employées dans la pratique; mais lorsqu'il ne faudra qu'interpoler des valeurs très-resserrées, on pourra prendre le premier, ou les deux premiers termes du développement de cette différence, obtenu par le théorême de Taylor, termes qui sont

$$M\left[\cot x\frac{h}{1}+(1+\cot x^2)\frac{h^2}{1.2}\right],$$

puisque

$$\frac{d.\mathrm{l}\sin x}{dx}=M\frac{\cos x}{\sin x}=M\cot x$$

$$\frac{d^2\mathrm{l}\sin x}{dx^2}=-M\frac{1}{\sin x^2}=-M\frac{\sin x^2+\cos x^2}{\sin x^2}=-M(1+\cot x^2).$$

Quand on ne se propose que de vérifier des tables déjà calculées, ou de les corriger, on peut donner à l'expression de $\mathrm{l}\sin(x+h)$ une forme qui permette d'employer, au lieu des sinus naturels, les logarithmes contenus dans ces tables. En effet,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{\sin(x+h)+\sin x}=\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}(x+h-x)}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}(x+h+x)}=\frac{\mathrm{tang}\frac{1}{2}h}{\mathrm{tang}(x+\frac{1}{2}h)}=\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}h\cot(x+\tfrac{1}{2}h);$$

on aura donc

$$\mathrm{l}.\sin(x+h)=\mathrm{l}\sin x+2M\ \mathrm{tang}\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{2M}{3}\left(\mathrm{tang}\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)^3$$
$$+\frac{2M}{5}\left(\mathrm{tang}\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)^5+\text{etc.}$$

Les termes de cette formule étant des fractions assez petites, pour les mettre en nombres, on se servira des logarithmes des tangentes et des cotangentes, donnés par les tables proposées, parce que l'erreur qui pourroit se trouver dans les dernières décimales de ces logarithmes ne sera d'aucune conséquence par rapport aux résultats. C'est ainsi que Delambre a relevé plusieurs inexactitudes dans les grandes tables de Wlacq.

892. La première idée de calculer ou d'étendre des tables par les différences, paroît appartenir à Mouton, qui publia sur ce sujet, dès 1670, une méthode dont je vais donner un exemple. Soit la série des nombres 0, 15, 41, 87, 162, 275, etc. dont les différences

troisièmes sont constantes, entre les termes successifs de laquelle on se propose d'en insérer deux nouveaux assujettis à la même loi; il faudra par conséquent que dans la nouvelle série les différences troisièmes soient également constantes. Désignant pour abréger, par les lettres a, b, c, d, le premier terme de cette série, sa différence première, sa différence seconde et sa différence troisième, on formera par les principes du n°. 860, ce tableau,

Indices.	Nombres.	Différences 1res.	Différ. 2mes.	Différ. 3mes.
1	a	b	c	d
2	$a+b$	$b+c$	$c+d$	d
3	$a+2b+c$	$b+2c+d$	$c+2d$	d
4	$a+3b+3c+d$	$b+3c+3d$	$c+3d$	d
5	$a+4b+6c+4d$	$b+4c+6d$	$c+4d$	d
6	$a+5b+10c+10d$	$b+5c+10d$	$c+5d$	d
7	$a+6b+15c+20d$	$b+6c+15d$	$c+6d$	d
8	$a+7b+21c+35d$	$b+7c+21d$	$c+7d$	
9	$a+8b+28c+56d$	$b+8c+28d$		
10	$a+9b+36c+84d$			

et en le prolongeant aussi loin qu'il sera nécessaire, on y trouvera, dans la première colonne, tous les termes d'une serie quelconque, dont les différences troisièmes sont constantes; mais lorsqu'on aura intercalé deux nouveaux termes entre chacun de ceux de la série proposée, le second de cette série se trouvera le quatrième de la nouvelle, le troisième deviendra le septième, etc. et en général il faudra laisser dans la première colonne du tableau, entre chacun des termes qu'on prendra, autant de termes intermédiaires qu'on veut en intercaler,

Dans l'exemple actuel les termes donnés répondront aux suivans

Indices.	Nombres.	Différences 1res.	Différ. 2mes.	Différ. 3mes.
1	a	$3b+3c+d$	$9c+18d$	$27d$
4	$a+3b+3c+d$	$3b+12c+19d$	$9c+45d$	
7	$a+6b+15c+20d$	$3b+21c+64d$		
10	$a+9b+36c+84d$			
	etc.			

dont les différences, placées à côté, doivent être identiques avec celles qui

qui résultent des nombres 0, 15, 41, 87, etc. En calculant ces dernières, on obtient 15 pour la première différence, 11 pour la deuxième, et 9 pour la troisième; comparant avec la formule qui occupe la première place dans chaque colonne du tableau ci-dessus, en commençant par la droite, on trouve

$$27d=9, \quad 9c+18d=11, \quad 3b+3c+d=15,$$

d'où l'on tire $d=\frac{1}{3}$, $c=\frac{5}{9}$, $b=\frac{13}{3}$: on a de plus $a=0$, et par le moyen de ces valeurs on formera successivement tous les termes de la série interpolée.

893. Mouton ne put résoudre lui-même la question qu'il s'étoit proposée; ce fut un de ses amis, nommé Regnaud, qui construisit le tableau qu'il rapporte dans son ouvrage, et dans lequel ce sont les différences cinquièmes qui sont supposées constantes. Regnaud, qui ne connoissoit point l'expression analytique de la loi que suivoient les termes des diverses colonnes de son tableau, le construisit en commençant par celle qui se trouve à droite, au moyen de laquelle il forma les autres par de simples additions; cette espèce d'induction, beaucoup moins commode que les expressions algébriques, fit oublier le procédé proposé par Mouton. Prony l'a repris et en a déduit des formules par une marche qui doit ressembler à peu près à celle-ci.

Supposons qu'on veuille intercaler $m-1$ quantités équidistantes, entre les deux quantités u et u_1, qui répondent à deux indices dont la différence est l'unité, il faudra partager cette différence en m parties égales, et chercher par la formule du n°. 873 les valeurs de u, qui répondent aux indices $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, ... $\frac{n}{m}$, etc. on obtiendra cette nouvelle suite:

$$u+\frac{1}{m}\Delta u+\frac{1(1-m)}{m.2m}\Delta^2 u+\frac{1(1-m)(1-2m)}{m.2m.3m}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

$$u+\frac{2}{m}\Delta u+\frac{2(2-m)}{m.2m}\Delta^2 u+\frac{2(2-m)(2-2m)}{m.2m.3m}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

$$u+\frac{3}{m}\Delta u+\frac{3(3-m)}{m.2m}\Delta^2 u+\frac{3(3-m)(3-2m)}{m.2m.3m}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

....

$$u+\frac{n}{m}\Delta u+\frac{n(n-m)}{m.2m}\Delta^2 u+\frac{n(n-m)(n-2m)}{m.2m.3m}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

dont il s'agira de trouver les différences successives, et c'est ce qui s'effectuera d'une manière commode, en prenant séparément celles de chaque terme. Le résultat se présentera sous une forme très-élégante et très-simple, si l'on fait attention que les suites

$$\begin{array}{llll} 0, & 1, & 2, & 3,\ldots\ldots\ldots\ldots n, \\ 0, & 1(1-m), & 2(2-m), & 3(3-m),\ldots\ldots\ldots n(n-m), \\ 0, & 1(1-m)(1-2m), & 2(2-m)(2-2m), & 3(3-m)(3-2m),\ldots n(n-m)(n-2m), \end{array}$$

etc.

peuvent être regardées comme $n+1$ valeurs successives déduites respectivement des termes généraux

$$x, \quad x(x-m), \quad x(x-m)(x-2m), \text{ etc.}$$

en prenant pour x tous les nombres entiers, depuis 0, jusqu'à n inclusivement; en sorte que les $n+1$ valeurs de u, rapportées plus haut, se tireront de cette expression

$$u+\frac{x}{m}\Delta u+\frac{x(x-m)}{1.2m^2}\Delta^2 u+\frac{x(x-m)(x-2m)}{1.2.3m^3}\Delta^3 u\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x(x-m)(x-2m)\ldots(x-(n-1)m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots n\,m^n}\Delta^n u+\frac{x(x-m)(x-2m)\ldots(x-nm)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+1)m^{n+1}}\Delta^{n+1}u$$
$$+\frac{x(x-m)(x-2m)\ldots(x-(n+1)m)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots(n+2)m^{n+2}}\Delta^{n+2}u+\text{etc.}$$

en y faisant varier seulement x, par des différences égales à l'unité. Si on désigne par δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u \ldots \delta^n u$, les différences de u lorsque l'indice augmente de la quantité $\frac{1}{m}$, en conservant toujours la caractéristique Δ pour les cas où l'indice varie de l'unité, on aura

$$\delta u=\frac{\Delta x}{m}\Delta u+\frac{\Delta[x(x-m)]}{1.2m^2}\Delta^2 u+\frac{\Delta[x(x-m)(x-2m)]}{1.2.3m^3}\Delta^3 u+\text{etc.}$$
$$\delta^2 u=\frac{\Delta^2[x(x-m)]}{1.2m^2}\Delta^2 u+\frac{\Delta^2[x(x-m)(x-2m)]}{1.2.3m^3}\Delta^3 u+\text{etc.}$$
$$\delta^3 u=\frac{\Delta^3[x(x-m)(x-2m)]}{1.2.3m^3}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

et en général $\delta^n u=\dfrac{\Delta^n[x(x-m)(x-2m)\ldots(x-(n-1)m)]}{1.2.3\ldots n\,m^n}\Delta^n u$

$$+\frac{\Delta^n[x(x-m)(x-2m)\ldots(x-nm)]}{1.2.3\ldots(n+1)m^{n+1}}\Delta^{n+1}u$$
$$+\frac{\Delta^n[x(x-m)(x-2m)\ldots(x-(n+1))m]}{1.2.3\ldots(n+2)m^{n+2}}\Delta^{n+2}u+\text{etc.}$$

en observant de faire $x=0$, après les différentiations. Il est évident que si dans la série des quantités données u, u_1, u_2, u_3, etc. les différences de l'ordre p sont constantes, l'expression de $\delta^n u$ s'arrêtera à cet ordre, puisqu'on aura $\Delta^{p+1}u=0$, et le dernier terme sera

$$\frac{\Delta^n[x(x-m)(x-2m)\ldots(x-(p-1)m)]}{1.2.3\ldots p\,m^p}\Delta^p u.$$

Il ne reste plus, pour avoir l'expression générale de $\delta^n u$, qu'à développer les différences des fonctions

$$x,\quad x(x-m),\quad x(x-m)(x-2m),\ldots.x(x-m)\ldots(x-im).$$

Ces fonctions étant ordonnées par rapport aux puissances de x, prennent en général la forme

$$x^{i+1}+Amx^i+Bm^2x^{i-1}+Cm^3x^{i-2}\ldots+Im^ix,$$

où les lettres A, B, $C\ldots$, I, désignent des coefficiens numériques indépendans de x et de m. Si l'on fait successivement

$$i=n-1,\quad i=n,\quad i=n+1,\quad i=n+2,\ \text{etc.}$$

on trouvera pour les différences n^{emes} de cette fonction, des résultats de la forme

$$\alpha,\qquad \alpha' m+\beta',\qquad \alpha'' m^2+\beta'' m+\gamma'',\ \text{etc.}$$

α, α', β', etc. étant des nombres ; et il viendra par conséquent

$$\delta^n u=\frac{1}{1.2\ldots nm^n}\left\{\alpha\Delta^n u+\frac{(\alpha' m+\beta')}{(n+1)m}\Delta^{n+1}u+\frac{\alpha'' m^2+\beta'' m+\gamma''}{(n+1)(n+2)m^2}\Delta^{n+2}u+\text{etc.}\right\},$$

expression que l'on peut écrire comme il suit :

$$\frac{\delta^n u}{\delta x^n}=\frac{1}{1.2\ldots.n}\left\{\alpha\Delta^n u+\frac{\alpha'+\frac{\beta'}{m}}{n+1}\Delta^{n+1}u+\frac{\alpha''+\frac{\beta''}{m}+\frac{\gamma''}{m^2}}{(n+1)(n+2)}\Delta^{n+2}u+\text{etc.}\right\},$$

en observant que $\delta x=\frac{1}{m}$, puisque l'intervalle compris entre deux indices et représenté par l'unité est partagé en m parties égales. Passant aux limites relatives à la supposition de m infinie, le rapport des différences, dans le premier membre, devient le coefficient différentiel $\frac{d^n u}{dx^n}$, et l'on trouve

$$\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{1}{1.2\ldots.n}\left\{\alpha\Delta^n u+\frac{\alpha'}{n+1}\Delta^{n+1}u+\frac{\alpha''}{(n+1)(n+2)}\Delta^{n+2}u+\text{etc.}\right\},$$

formule analogue à celle du n°. 867, et où l'on peut facilement restituer la quantité h que nous avons supposée égale à l'unité.

894. Nous n'avons encore donné des formules d'interpolation que pour les séries résultantes des fonctions d'une seule variable; nous n'entrerons pas dans le même détail à l'égard des séries dont le terme général est une fonction de plusieurs variables : nous nous bornerons seulement à faire connoître pour ces séries une formule analogue à celle du n°. 873. Nous observerons en premier lieu qu'elles ne peuvent être coordonnées avec leurs indices que dans une table de la forme de celle qu'on trouve à la page 449 du premier volume de cet ouvrage, et dont voici un exemple particulier tiré de la fonction $u = 5 + x^2 + 2xy + 3y^2$.

Valeurs de y. \ *Valeurs de x.*	0	1	2	3	4	etc.
0	5	6	9	14	21	etc.
1	8	11	16	23	32	etc.
2	17	22	29	38	49	etc.
3	32	39	48	59	72	etc.
4	53	62	73	86	101	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

Une pareille table se nomme *Table à double entrée*, parce que, pour y trouver un nombre quelconque, il faut connoître le numéro de

la colonne verticale et celui de la bande horisontale, où il se trouve, circonstances qui sont marquées par les indices placés horisontalement à la partie supérieure de la table, et par ceux qui se trouvent sur le côté gauche. La valeur que reçoit la fonction u, lorsque $x=3$ et $y=4$, par exemple, est le nombre 86, situé dans la colonne marquée 3, sur la bande numérotée 4. Si, pour plus de généralité, on suppose que la différence entre les valeurs successives de x, soit représentée par h, et que k désigne celle qui règne entre les valeurs de y, il est évident que l'on passera de l'un des nombres à celui qui le suit dans la bande où il se trouve, en changeant dans la fonction donnée x en $x+h$, et à celui qui le suit dans la même colonne où il est placé, et mettant $y+k$ pour y. Pour interpoler des valeurs intermédiaires entre les termes d'une même bande, ou d'une même colonne, on n'a besoin que des formules

$$u'=u+\frac{h'}{h}\Delta_x u+\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2{}_x u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3{}_x u+\text{ etc.}$$

$$u_{\prime}=u+\frac{k'}{k}\Delta_y u+\frac{k'(k'-k)}{k.2k}\Delta^2{}_y u+\frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k.2k.3k}\Delta^3{}_y u+\text{ etc.}$$

puisque dans le premier cas y est regardé comme constant, et que x l'est supposé dans le second: mais pour considérer la question en général, il faut assigner l'expression d'un terme qui se trouveroit sur une bande intermédiaire, entre deux bandes consécutives du tableau, et dans une colonne intermédiaire aussi entre deux colonnes consécutives, ce qui revient à chercher l'expression de ce que devient u lorsqu'on y change en même tems x en $x+h'$ et y en $y+k'$. Soit U cette quantité; on verra facilement que son développement doit résulter de la substitution de $y+k'$ à la place de y dans celui de u', ou de la substitution de $x+h'$ à la place de x dans celui de $u_{\prime}$: arrêtons-nous à la première substitution; nous aurons

$$U=u'+\frac{k'}{k}\Delta_y u'+\frac{k'(k'-k)}{k.2k}\Delta^2{}_y u'+\frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k.2k.3k}\Delta^3{}_y u'+\text{ etc.}$$

en observant que $\Delta_y u'$, $\Delta^2{}_y u'$, etc. représentent les différences successives de u', prises en faisant varier y de la quantité k. Développant

cette équation sous ce point de vue, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} U = u &+ \frac{h'}{h}\Delta_x u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h}\Delta^2{}_x u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h}\Delta^3{}_x u + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'}{k}\Delta_y u + \frac{k'}{k}\,\frac{h'}{h}\,\overset{1+1}{\underset{x.y}{\Delta}} u + \frac{k'}{k}\,\frac{h'(h'-h)}{h.2h}\,\overset{2+1}{\underset{x.y}{\Delta}} u + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'(k'-k)}{k.2k}\Delta^2{}_y u + \frac{k'(k'-k)}{k.2k}\,\frac{h'}{h}\,\overset{1+2}{\underset{x.y}{\Delta}} u + \text{etc.} \\ &+ \frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k.2k.3k}\Delta^3{}_y u + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour faire usage de cette formule, qu'il est aisé de pousser aussi loin qu'on voudra, il faut former les quantités

$$\begin{array}{lllll} u, & \Delta_x u, & \Delta^2{}_x u, & \Delta^3{}_x u, & \text{etc.} \\ \Delta_y u, & \overset{1+1}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \overset{2+1}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \overset{3+1}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \text{etc.} \\ \Delta^2{}_y u, & \overset{1+2}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \overset{2+2}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \overset{3+2}{\underset{x.y}{\Delta}} u, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & & \end{array}$$

Celles de la première ligne s'obtiennent en prenant comme à l'ordinaire les différences de la suite des nombres écrits dans la première bande du tableau; puis en désignant par u_{y_1}, u_{y_2}, u_{y_3}, etc. le premier terme de la seconde, celui de la troisième, etc. bandes, et prenant les différences successives dans chacune de ces bandes, ainsi qu'on a pris celles de la première, on aura

$$\begin{array}{lllll} u, & \Delta_x u, & \Delta^2{}_x u, & \Delta^3{}_x u, & \text{etc.} \\ u_{y_1}, & \Delta_x u_{y_1}, & \Delta^2{}_x u_{y_1}, & \Delta^3{}_x u_{y_1}, & \text{etc.} \\ u_{y_2}, & \Delta_x u_{y_2}, & \Delta^2{}_x u_{y_2}, & \Delta^3{}_x u_{y_2}, & \text{etc.} \\ u_{y_3}, & \Delta_x u_{y_3}, & \Delta^2{}_x u_{y_3}, & \Delta^3{}_x u_{y_3}, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & & \end{array}$$

retranchant les termes de chaque ligne de ceux qui leur correspondent dans la ligne suivante, on trouvera

$$\begin{array}{llll} \Delta_y u = u_{y_1} - u, & \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \Delta_x u_{y_1} - \Delta_x u, & \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \Delta^2{}_x u_{y_1} - \Delta^2{}_x u, & \text{etc.} \\ \Delta_y u_{y_1} = u_{y_2} - u_{y_1}, & \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} = \Delta_x u_{y_2} - \Delta_x u_{y_1}, & \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} = \Delta^2{}_x u_{y_2} - \Delta^2{}_x u_{y_1}, & \text{etc.} \\ \Delta_y u_{y_2} = u_{y_3} - u_{y_2}, & \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_2} = \Delta_x u_{y_3} - \Delta_x u_{y_2}, & \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_2} = \Delta^2{}_x u_{y_3} - \Delta^2{}_x u_{y_2}, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

en opérant de même sur ces dernières lignes, il viendra

$$\Delta^2_y u = \Delta_y u_{y_1} - \Delta_y u, \quad \overset{1+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} - \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u, \quad \overset{2+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} - \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u, \text{ etc.}$$

$$\Delta^2_y u_{y_1} = \Delta_y u_{y_3} - \Delta_y u_{y_1}, \quad \overset{1+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} = \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_2} - \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1}, \quad \overset{2+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} = \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_2} - \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u, \text{ etc.}$$

etc.

puis

$$\Delta^3_y u = \Delta^2_y u_{y_1} - \Delta^2_y u, \quad \overset{1+3}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \overset{1+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} - \overset{1+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u, \quad \overset{2+3}{\underset{x,y}{\Delta}} u = \overset{2+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u_{y_1} - \overset{2+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u, \text{ etc.}$$

etc.

Afin d'éclaircir ceci nous allons l'appliquer à l'exemple contenu dans le tableau de la page 60, dans lequel on a $h=1$, $k=1$. Nous en tirerons, 1°. en prenant le premier terme de chaque bande et ses différences successives,

5	1	2	0
8	3	2	0
17	5	2	0
32	7	2	0
etc.			

2°. en retranchant, terme à terme, chacune des lignes ci-dessus de celle qui la suit,

3	2	0
9	2	0
15	2	0
etc.		

3°. en opérant de même sur ces dernières lignes,

6	0
6	0;

4°. enfin

0;

il résulte de là

$$u=5, \quad \Delta_x u = 1, \quad \Delta^2_x u = 2, \quad \Delta^3_x u = 0$$

$$\Delta_y u = 3, \quad \overset{1+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u = 2, \quad \overset{2+1}{\underset{x,y}{\Delta}} u = 0,$$

$$\Delta^2_y u = 6, \quad \overset{1+2}{\underset{x,y}{\Delta}} u = 0,$$

$$\Delta^3_y u = 0,$$

et substituant ces valeurs dans celle de U, après y avoir fait $h=1$,

$k=1$, il viendra, par les réductions, $U=5+h'^2+2h'k'+3k'^2$, fonction semblable à celle qui a servi à construire le tableau.

La solution du problème proposé est rigoureuse dans le cas actuel, parce que la fonction qui représente le terme général de la suite proposée est algébrique, rationnelle et entière; mais quand on voudra faire usage de la formule générale, pour des suites d'une autre nature, il faudra que les différences aillent en décroissant, comme lorsqu'il s'agit des suites dérivées des fonctions d'une seule variable.

895. On parviendroit facilement, d'après ce qu'on vient de voir, à la formule d'interpolation relative aux fonctions d'un nombre quelconque de variables, c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas; nous terminerons ce que nous avons à dire pour le présent sur ce sujet, auquel nous reviendrons par la suite, en faisant remarquer que l'expression de U, du n°. précédent, peut s'obtenir par l'analogie qui règne entre les puissances et les différences. On a, par les n°s. 865, 869, $U-u=\Delta' u=e^{\frac{du}{dx}h'+\frac{dy}{dy}k'}-1$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\mathrm{l}(1+\Delta_x u)}{h},\quad \frac{du}{dx}h'=\frac{h'}{h}\mathrm{l}(1+\Delta_x u)$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{\mathrm{l}(1+\Delta_y u)}{k},\quad \frac{du}{dx}k'=\frac{k'}{k}\mathrm{l}(1+\Delta_y u),$$

ce qui donne $\Delta' u=(1+\Delta_x u)^{\frac{h'}{h}}(1+\Delta_y u)^{\frac{k'}{k}}-1$, et en développant, avec l'attention de changer les produits de la forme $(\Delta_x u)^p(\Delta_y u)^q$ en $\Delta^{p+q}_{x,y}u$, on retombera sur le même résultat qui se déduiroit de l'expression de U, trouvée plus haut (n°. précéd.)

En poussant l'analogie aussi loin qu'elle peut aller, on auroit, quel que fût le nombre des variables de la fonction u,

$$\Delta'^n u=\left\{(1+\Delta_x u)^{\frac{h'}{h}}(1+\Delta_y u)^{\frac{k'}{k}}(1+\Delta_z u)^{\frac{l'}{l}}\ldots-1\right\}^n,$$

pourvu qu'après le développement, on écrivît $\Delta^{p+q+r\ldots}_{x,y,z\ldots}u$, au lieu de $(\Delta_x u)^p(\Delta_y u)^q(\Delta_z u)^r\ldots$

896.

896. Le Calcul inverse des différences est, à l'égard du Calcul direct, ce qu'est le Calcul intégral, par rapport au Calcul différentiel : il a pour objet de remonter des différences aux fonctions primitives. Nous nous occuperons d'abord du cas où les différences sont données explicitement par les variables indépendantes, c'est-à-dire, où l'on a, pour déterminer la fonction u, une équation de cette forme $\Delta^n u = f(x, h)$, h étant la différence de la variable indépendante x.

Du Calcul inverse des différences, par rapport aux fonctions explicites.

Soit premiérement $n = 1$, ou $\Delta u = f(x, h)$. Cette équation ne fait connoître que le changement qu'éprouve la fonction u lorsque x devient $x+h$, et ne détermine rien sur la valeur absolue de cette fonction ; mais si l'on suppose que quand $x=a$, on ait $u=b$, il sera facile de former, en partant de ces données, toutes les valeurs de u ; car aux indices

$a,\ a+h,\qquad a+2h,\qquad\qquad a+3h,\qquad\qquad$ etc.

correspondront ces valeurs de u :

$b,\ b+f(a,h),\ b+f(a,h)+f(a+h,h),\ b+f(a,h)+f(a+h,h)+f(a+2h,h)$, etc.

L'introduction de la quantité arbitraire b a lieu ici comme dans le Calcul intégral, pour remplacer la constante que la différentiation fait disparoître (n°. 15) ; mais on voit que la signification de l'équation $\Delta u = f(x, h)$ repose dans le cas actuel sur la valeur assignée à l'accroissement h, et qu'on ne tire de cette équation qu'une suite de valeurs discontinues qui se succèdent d'après une loi donnée.

Si l'on avoit $\Delta^2 u = f(x, h)$, on ne pourroit tirer parti de cette équation, qu'en se donnant une première valeur de u avec celle de Δu qui lui correspond, ou deux valeurs consécutives de u. En effet, si, lorsque $x=a$, on posoit $u=b$, et $\Delta u = c$, on auroit, par le tableau du n°. 883, pour les indices

$a,\ a+h,\ a+2h,\qquad\qquad a+3h,\qquad\qquad$ etc.

cette suite de valeurs

$b,\ b+c,\ b+2c+f(a,h),\ b+3c+2f(a,h)+f(a+h,h)$, etc.

Les différences de l'équation $\Delta^2 u = f(x, h)$ donnant successivement $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, etc. on peut aussi s'élever immédiatement à u_n, par la formule $u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u \ldots + \Delta^n u$,

dans laquelle on voit évidemment que les deux premiers termes u et $n\Delta u$ demeurent arbitraires. Il est facile maintenant d'étendre ces considérations à tel ordre qu'on voudra.

897. Les valeurs successives de u, données par l'équation $\Delta u = f(x, h)$, n'étant autre chose que les sommes consécutives des termes de la série

$$f(a, h), \quad f(a+h, h), \quad f(a+2h, h), \ldots f(a+nh, h),$$

correspondans aux indices

$$a, \qquad a+h, \qquad a+2h, \ldots\ldots\ldots a+nh,$$

augmentées de la quantité arbitraire b, il s'ensuit que si l'on regarde $a+nh$ comme représentant la valeur indéterminée de x, l'expression générale de la somme des termes de la même série, pris depuis le commencement jusqu'au terme correspondant à ce dernier indice, inclusivement, sera $u+f(a+nh, h)-b$, ou $u+f(x, h)-b$, ou enfin $u+\Delta u-b$. Pour s'en convaincre, il suffit de former la valeur de u, qui répond à l'indice $a+nh$, et dont le développement est $b+f(a, h)+f(a+h, h)+f(a+2h, h) \ldots\ldots +f(a+(n-1)h, h)$. On peut déduire immédiatement ce résultat des formules générales du n°. 860, en faisant la somme des équations (1), qui donnera

$$u_n - u = \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1},$$

et par conséquent

$$u_n + \Delta u_n - u = \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 \ldots\ldots + \Delta u_{n-1} + \Delta u_n,$$

ou, comme ci-dessus,

$$u + \Delta u - b = f(a, h) + f(a+h, h) \ldots\ldots + f(a+nh, h),$$

en changeant u_n en u, u en b, et mettant pour Δu, Δu_1, etc. leurs expressions relatives.

On voit par ce qui précède, que la recherche des fonctions primitives, par le moyen de leurs différences premières, revient à la sommation des suites, et que l'une de ces opérations conduit à l'autre. En effet, si l'on désigne par S_n l'expression générale de la somme des termes de la suite

$$\Delta u, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \ldots \Delta u_{n-1}, \quad \Delta u_n,$$

on aura $\quad S_n = u_n + \Delta u_n - u$ et $u_n = S_n - \Delta u_n + u$,

équations dans lesquelles u_n est la fonction primitive dont la diffé-

rence première est exprimée par le terme général Δu_n de la suite proposée, et u représente la constante arbitraire. Par la première, on obtiendra la somme de la suite proposée, lorsqu'on pourra trouver la fonction primitive correspondante à son terme général, et la seconde donnera cette fonction primitive dans tous les cas où l'on connoîtra *à priori* le terme général et la somme.

Pour indiquer le passage d'une différence à la fonction primitive dont elle tire son origine, on se sert le plus communément du signe Σ; ainsi, lorsque $\Delta u = \mathrm{f}(x, h)$, on a $u = \Sigma \mathrm{f}(x, h) + const.$ D'après cette notation et les équations précédentes, il viendra pour la série dont le terme général est $\mathrm{f}(x, h)$,

$$S\mathrm{f}(x,h) = \Sigma \mathrm{f}(x,h) + \mathrm{f}(x,h) - const.$$
$$\Sigma \mathrm{f}(x,h) = S\mathrm{f}(x,h) - \mathrm{f}(x;h) + const.$$

en changeant, par analogie, S_n en $S\mathrm{f}(x,h)$.

On donne aussi le nom d'intégrale aux fonctions primitives : u est l'intégrale de Δu, $\Sigma \mathrm{f}(x, h)$ est celle de $\mathrm{f}(x, h)$. Cette dénomination se présente naturellement lorsqu'on regarde le Calcul différentiel comme un cas particulier du Calcul des différences. (*Voyez* la note de la page 2 du deuxième volume, et n°. 470.) L'expression générale de la somme d'un nombre quelconque de termes de la suite proposée, ou $S\mathrm{f}(x, h)$, s'appelle *terme sommatoire*; et les équations rapportées ci-dessus, donnent la relation entre le terme général, son intégrale première et le terme sommatoire.

898. Les règles pour l'intégration des différences sont en très-petit nombre, et malheureusement les cas où l'on peut s'en servir avec succès sont très-bornés. Il suit de la formation des différences, 1°. que

$$\Delta(X + Y - Z) = \Delta X + \Delta Y - \Delta Z,$$

et en remontant aux fonctions primitives, on a

$$\Sigma(\Delta X + \Delta Y - \Delta Z) = \Sigma\Delta X + \Sigma\Delta Y - \Sigma\Delta Z,$$

ce qui ramène l'intégration des différences polynomes à celle des monomes;

2°. que $\Delta . aX = a\Delta X$, d'où $aX = \Sigma . a\Delta X = a\Sigma\Delta X$, ce qui prouve qu'on peut à volonté faire sortir du signe Σ, ou introduire sous ce signe un facteur constant.

3°. Lorsque $u = x^{m+1}$ et que m est un nombre entier, il vient

$$\Delta u = \frac{(m+1)}{1}x^m h + \frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}x^{m-3}h^4 \ldots + h^{m+1}x^0.$$

En intégrant terme à terme chaque membre de cette équation, remettant dans le premier x^{m+1}, au lieu de u, et passant hors du signe Σ les facteurs constans, on obtiendra

$$x^{m+1} = \frac{m+1}{1}h\Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2}h^2\Sigma x^{m-1} + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{m-2} + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}h^4\Sigma x^{m-3} \ldots + h^{m+1}\Sigma x^0.$$

Cette équation feroit connoître l'intégrale Σx^m, si l'on avoit Σx^{m-1}, $\Sigma x^{m-2}, \ldots \Sigma x^0$, puisqu'on en tireroit

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left\{\frac{m}{1.2}h\Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.3}h^2\Sigma x^{m-2} \ldots + \frac{1}{m+1}h^m\Sigma x^0\right\}.$$

Si l'on écrit successivement dans cette dernière $m-1$, $m-2$, $m-3$, etc. pour m, on formera des expressions de Σx^{m-1}, Σx^{m-2}, Σx^{m-3}, etc. qui ne dépendront que des intégrales des puissances de x qui leur sont respectivement inférieures. On peut aussi former ces valeurs en remontant; et si l'on prend d'abord $m=0$, il vient $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$, parce que l'accolade ne doit renfermer qu'un nombre m de termes. Cette conclusion se vérifie d'ailleurs *à priori*, soit en observant que de $u=x$, il résulte $\Delta x = h.x^0$, $x = h\Sigma x^0$, et par conséquent $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$; soit en prenant la différence de la fonction primitive $\frac{x}{h}$, pour laquelle on trouve

$$\frac{x+h}{h} - \frac{x}{h} = 1 = x^0.$$

Faisant ensuite $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc. et substituant

successivement pour Σx^2, Σx^3, Σx^4, etc. les valeurs auxquelles on parviendra, on formera cette table :

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}xh$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4}\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2h$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5}\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3h - \frac{1}{5.6}xh^3$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6}\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4h - \frac{1}{2.6}x^2h^3$$

etc.

Au lieu de pousser plus loin cette induction, supposons qu'on ait en général

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{etc.}$$

nous aurons, en prenant la différence première de chaque membre,

$$\begin{aligned} x^m = A\frac{(m+1)}{1}x^m h + A\frac{(m+1)m}{1.2}x^{m-1}h^2 &+ A\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}x^{m-2}h^3 + \text{etc.}\\ + B\frac{m}{1}x^{m-1}h &+ B\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \text{etc.}\\ &+ C\frac{(m-1)}{1}x^{m-2}h + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

et comparant entr'eux les termes affectés d'une même puissance de x, nous obtiendrons entre les coefficiens A, B, C, D, etc. les relations suivantes

$$A = \frac{1}{(m+1)h}$$

$$B = -A\frac{(m+1)h}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$C = -A\frac{(m+1)mh^2}{2.3} - B\frac{mh}{2}$$

$$D = -A\frac{(m+1)m(m-1)h^3}{1.2.3.4} - B\frac{m(m-1)h^2}{2.3} - C\frac{(m-1)}{2}h$$

etc.

avec lesquelles on déduira facilement les uns des autres les coefficiens de l'expression de Σx^m, quel que soit l'exposant de la puissance m. En calculant immédiatement les douze premiers termes, on trouvera

$$\begin{aligned}\Sigma x^m = & \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}\frac{mh}{2.3}x^{m-1} - \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2.3.4.5}x^{m-3} \\ & + \frac{1}{6}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2.3.4.5.6.7.}x^{m-5} \\ & - \frac{3}{10}\frac{m(m-1)\ldots.(m-6)h^7}{2.3\ldots..8.9}x^{m-7} \\ & + \frac{5}{6}\frac{m(m-1)\ldots.(m-8)h^9}{2.3\ldots..10.11}x^{m-9} \\ & - \frac{691}{210}\frac{m(m-1)\ldots.(m-10)h^{11}}{2.3\ldots..12.13}x^{m-11} \\ & + \frac{35}{2}\frac{m(m-1)\ldots.(m-12)h^{13}}{2.3\ldots..14.15}x^{m-13} \\ & - \frac{3617}{30}\frac{m(m-1)\ldots.(m-14)h^{15}}{2.3\ldots..16.17}x^{m-15} \\ & + \frac{43867}{42}\frac{m(m-1)\ldots.(m-16)h^{17}}{2.3\ldots..18.19}x^{m-17} \\ & - \frac{1222277}{110}\frac{m(m-1)\ldots.(m-18)h^{19}}{2.3\ldots..20.21}x^{m-19} \\ & \text{etc.} \qquad + \textit{const.}\end{aligned}$$

formule dans laquelle les coefficiens exprimés en nombres méritent attention, parce qu'ils reviennent souvent dans la Théorie des suites.

Nous observerons, avant de finir cet article, que si l'on multiplie Σx^m par h, et qu'on passe cet accroissement sous le signe Σ, on aura cette équation

$$\Sigma x^m h = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}x^m h + \frac{1}{2}\frac{mh^2}{2.3}x^{m-1} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

dont le second membre a pour limite $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \textit{const.}$ lorsque h s'évanouit, cas auquel $\Sigma x^m h$ se change en $\int x^m dx$, d'après ce qu'on a vu dans le n°. 470.

899. Ce qui précède fournit le moyen d'intégrer toutes les fonctions algébriques rationnelles entières, dans le cas où la variable indépendante reçoit un accroissement constant. Prenons pour exemple la fonction $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;
nous aurons

$$\Sigma(Ax^3+Bx^2+Cx+D) = A\Sigma x^3 + B\Sigma x^2 + C\Sigma x + D\Sigma x^0,$$

et mettant pour Σx^3, Σx^2, Σx et Σx^0, leurs valeurs, il viendra

$$\Sigma(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$$
$$\frac{A}{4h}x^4 - \frac{3Ah-2B}{6h}x^3 + \frac{Ah^2-2Bh+2C}{4h}x^2 + \frac{Bh^2-3Ch+6D}{6h}x + const.$$

900. Il existe un genre de fonctions rationnelles qui s'intégrent avec la plus grande facilité; ce sont les produits de la forme

$$x = (x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\dots(x+a+mh);$$

en effet, si l'on en prend la différence, on obtiendra

$$\Delta u = \begin{cases} (x+a+h)(x+a+2h)(x+a+3h)\dots(x+a+(m+1)h) \\ -(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\dots(x+a+mh) \end{cases}$$
$$= (x+a+h)(x+a+2h)\dots\dots(x+a+mh)(m+1)h,$$

et comme $\Sigma\frac{\Delta u}{(m+1)h} = \frac{\Sigma\Delta u}{(m+1)h} = \frac{u}{(m+1)h}$, on aura

$$\Sigma\{(x+a+h)(x+a+2h)\dots(x+a+mh)\} =$$
$$\frac{(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\dots\dots(x+a+mh)}{(m+1)h} + const.$$

Si l'on écrit dans ce résultat $x-h$, au lieu de x, et $m+1$, au lieu de m, on aura

$$\Sigma\{(x+a)(x+a+h)(x+a+2h)\dots(x+a+mh)\} =$$
$$\frac{(x+a-h)(x+a)(x+a+h)\dots(x+a+mh)}{(m+2)h} + const.$$

On donne à ce résultat une forme plus simple et qui paroît d'abord plus générale, en représentant la fonction u par $XX_1X_2\dots X_m$, et supposant que les différences premières des quantités $X, X_1, X_2, \dots\dots X_m$, soient constantes: par cette notation on trouve

$$\Delta u = u_1 - u = X_1X_2X_3\dots X_{m+1} - XX_1X_2\dots X_m$$
$$= X_1X_2X_3\dots X_m(X_{m+1}-X) = X_1X_2X_3\dots X_m \times (m+1)\Delta X,$$

d'où il est facile de conclure, comme ci-dessus,

$$-\Sigma X_1X_2X_3\ldots X_m=\frac{XX_1X_2\ldots X_m}{(m+1)\Delta X}+const.$$

$$\text{et } \Sigma XX_1X_2\ldots X_m=\frac{X_{-1}XX_1\ldots X_m}{(m+2)\Delta X};$$

en mettant $m+1$ pour m, et diminuant ensuite de l'unité chaque indice.

On intègre aussi la fraction $\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}$,
parce qu'en la différentiant on trouve

$$\Delta\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}=\frac{1}{X_1X_2X_3\ldots X_{m+1}}-\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}$$
$$=\frac{X-X_{m+1}}{XX_1X_2X_3\ldots X_{m+1}}=-\frac{(m+1)\Delta X}{XX_1X_2X_3\ldots X_{m+1}}$$

ce qui donne

$$\Sigma\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m+1}}=-\frac{1}{(m+1)\Delta X}\,\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}+const.$$

et changeant $m+1$ en m, on obtient

$$\Sigma\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_m}=-\frac{1}{m\Delta X}\,\frac{1}{XX_1X_2\ldots X_{m-1}}+const.$$

901. Il est à propos d'observer que l'intégration des fonctions de la forme

$$Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\text{etc.},$$

peut s'effectuer par les formules ci-dessus, en les transformant en produits de facteurs dont les différences soient constantes. Pour le faire voir, je choisis cet exemple très-simple : x^3, et je fais
$x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)+A(x+h)(x+2h)+B(x+h)+C$,
en supposant que h désigne l'accroissement de x. Si l'on développe, et qu'on ordonne suivant les puissances de x, on aura

$$\begin{aligned}x^3=x^3+6hx^2&+11h^2x+6h^3\\+Ax^2&+3Ahx+2Ah^2\\&+B\;x+B\,h\\&\qquad+C;\end{aligned}$$

et

et comparant entr'eux les termes affectés de la même puissance de x, on formera les équations

$$6h + A = 0,$$
$$11h^2 + 3Ah + B = 0,$$
$$6h^3 + 2Ah^2 + Bh + C = 0,$$

desquelles on tirera

$$A = -6h, \quad B = 7h^2, \quad C = -h^3,$$

et $x^3 = (x+h)(x+2h)(x+3h) - 6h(x+h)(x+2h) + 7h^2(x+h) - h^3$,

ce qui donnera, en vertu du n°. précédent,

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4h} x(x+h)(x+2h)(x+3h)$$
$$-2x(x+h)(x+2h) + \frac{7}{2}hx(x+h) - h^2x + const.$$

Il paroîtra sans doute plus court d'appliquer immédiatement à la recherche de l'intégrale la méthode des coefficiens indéterminés, dès qu'on aura reconnu que cette intégrale est de la même forme que la différence, excepté qu'elle a un facteur de plus dans chacun de ses termes; on fera donc tout de suite

$$\begin{aligned} \Sigma x^3 = & A x(x+h)(x+2h)(x+3h) \\ & + Bx(x+h)(x+2h) \\ & + Cx(x+h) \\ & + Dx + const. \end{aligned}$$

et pour obtenir les coefficiens A, B, C, D, on prendra la différence de chaque membre de cette équation. On parviendra de cette manière à

$$\begin{aligned} x^3 = & 4Ah(x+h)(x+2h)(x+3h) \\ & + 3Bh(x+h)(x+2h) \\ & + 2Ch(x+h) \\ & + Dh; \end{aligned}$$

il ne restera plus qu'à développer le second membre de cette dernière équation, à l'ordonner par rapport à x, et à déterminer les lettres A, B, C, D, comme ci-dessus: ce qui ne présente aucune difficulté.

En généralisant ce qui précède, on verra sans peine que pour ramener la fonction $ax^\alpha + bx^\zeta + cx^\gamma +$ etc. à un produit de

facteurs *équidifférens*, il faut, si α désigne le plus haut exposant de x, la comparer à cette expression :

$$\begin{aligned}&A(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+\alpha h)\\&+B(x+h)(x+2h)\ldots.(x+(\alpha-1)h)\\&+C(x+h)(x+2h)\ldots.(x+(\alpha-2)h)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+I(x+h)\\&+L.\end{aligned}$$

Lorsqu'on voudra l'intégrer, on pourra poser immédiatement

$$\begin{aligned}\Sigma(ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{etc.})=&Ax(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+\alpha h)\\&+Bx(x+h)(x+2h)\ldots(x+(\alpha-1)h)\\&+Cx(x+h)(x+2h)\ldots(x+(\alpha-2)h)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+Ix(x+h)\\&+Lx+\mathit{const.}\end{aligned}$$

et opérer comme nous l'avons fait pour obtenir Σx^3.

Il est évident que cette méthode donne aussi le moyen d'intégrer le produit de facteurs équidifférens

$$(x+p)(x+p+q)(x+p+2q)\ldots.(x+p+(n-1)q),$$

quoique leur différence première ne soit pas égale à l'accroissement de x, que nous continuons à désigner par h, puisque ce produit étant développé devient de la forme $ax^{\alpha}+bx^{\beta}+$ etc.

902. La considération des produits de facteurs équidifférens est d'une telle importance dans le Calcul des différences et des suites, ils y reviennent si souvent, qu'il est convenable d'entrer dans quelque détail sur la transformation dont nous venons de montrer l'utilité dans le n°. précédent, et en même tems de désigner ces produits par une notation plus concise. Nous choisirons celle que Vandermonde a proposée dans le Mémoire de l'Académie des Sciences pour l'année 1772 (première partie, page 489), parce qu'elle nous a paru réunir à la simplicité, l'analogie et la facilité de se prêter au calcul.

Par l'expression x^n on entend le produit d'un nombre n de termes consécutifs de la suite

$$x,\quad x,\quad x,\quad x,\quad x,\ \text{etc.}$$

dont les différences premières sont nulles. Après cette suite, se présente immédiatement celle-ci,

$$x,\quad x+\Delta x,\quad x+2\Delta x,\quad x+3\Delta x,\ \text{etc.}$$

dont les différences premières sont constantes et les secondes nulles : il paroît donc naturel de regarder le produit d'un nombre n de termes de cette dernière, comme venant après la fonction x^n, dans l'ordre de la simplicité, et de l'exprimer d'une manière analogue ; c'est pourquoi nous représenterons la quantité

$$x(x+\Delta x)\ldots.(x+(n-1)\Delta x),\ \text{par}\ [x,\Delta]^{n},$$

Δ tenant ici la place de Δx pour désigner la différence commune des facteurs, et n étant leur nombre. Passant aux suites dont les différences secondes sont constantes et les troisièmes nulles, suites dont la formule générale est

$$x,\quad x+\Delta,\quad x+2\Delta+\Delta^2,\quad x+3\Delta+3\Delta^2,\ \text{etc.}$$

nous indiquerons le produit des n premiers termes, ou la quantité

$$x(x+\Delta)(x+2\Delta+\Delta^2)\ldots(x+n\Delta+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2)$$

par le symbole $[x,\Delta,\Delta^2]^{n}$, dont il est facile maintenant de sentir l'esprit, et d'après lequel on peut former ceux qui conviennent aux suites dont les différences constantes sont d'un ordre quelconque. De ces considérations naît un genre de fonctions liées entr'elles et avec les puissances de x, par une analogie très-simple et très-naturelle, et jouissant de propriétés très-remarquables que nous ferons connoître dans la suite. Nous nous bornerons pour le moment à faire quelques observations sur la fonction $[x,\Delta]^{n}$, que nous nommerons *puissance de* x *du second ordre.*

1°. On peut la présenter de manière à rendre la différence $\Delta=1$, et faire ensuite abstraction de cette différence, ce qui simplifie un peu la notation ; en effet, en reprenant la valeur attachée au symbole $[x,\Delta]^{n}$, on a $x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\ldots.(x+(n-1)\Delta x)$

$$=\Delta x^n\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\left(\frac{x}{\Delta x}+1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}+2\right)\ldots.\left(\frac{x}{\Delta x}+n-1\right),$$

ce qui donne $[x,\Delta]^{n}=\Delta x^n\left[\frac{x}{\Delta x},1\right]^{n}=\Delta x^n\left[\frac{x}{\Delta x}\right]^{n}$, en convenant de

ne point écrire la différence des facteurs toutes les fois qu'elle est égale à l'unité.

2°. Nous avons supposé que la suite

$$x, \quad x+\Delta x, \quad x+2\Delta x, \quad x+3\Delta x, \text{ etc.}$$

étoit croissante, on indiqueroit le contraire, en affectant la caractéristique Δ du signe —, mais pour donner aux produits désignés par $\left[\frac{x}{\Delta x}\right]^{n}$ la forme des coefficiens du binome dont les facteurs sont écrits dans un ordre décroissant, nous supposerons que x est le dernier terme de la suite proposée et que

$$\left[\frac{x}{\Delta x}\right]^{n} = \frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)\ldots\left(\frac{x}{\Delta x}-n+1\right).$$

Cela posé, faisons pour abréger $\frac{x}{\Delta x}=p$, et montrons les rapports du symbole $[p]^{n}$, avec l'expression si bien connue p^{n}.

3°. Il est d'abord évident que de même qu'on a $p^{n}=p^{m}.p^{n-m}$, on a aussi $[p]^{n}=[p]^{m}[p-m]^{n-m}$; car

$$[p]^{n}=p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$$
$$[p]^{m}=p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)$$
$$[p-m]^{n-m}=(p-m)(p-m-1)\ldots(p-m-(n-m-1)),$$

et le troisième produit, dont le dernier facteur se réduit à $p-n+1$, renferme tous ceux du premier qui ne se trouvent pas dans le second.

4°. Les conséquences qui résultent de l'équation $p^{n}=p^{m}.p^{n-m}$, lorsqu'on y fait $m=0$ et m négative, ont leurs analogues pour les puissances du second ordre. Quand $m=0$, on a $p^{n}=p^{o}p^{n}$, d'où $p^{o}=1$, et l'équation $[p]^{n}=[p]^{m}[p-m]^{n-m}$, devenant $[p]^{n}=[p]^{0}[p]^{n}$, donne aussi $[p]^{0}=1$.

5°. En faisant $n=0$, dans la même équation, on en tire $[p]^{0}=[p]^{m}[p-m]^{-m}$, ce qui conduit à $[p-m]^{-m}=\frac{[p]^{0}}{[p]^{m}}=\frac{1}{[p]^{m}}$, comme

l'équation $p^{0}=p^{m}.p^{0-m}$, dans la même hypothèse, mène à $p^{-m}=\frac{p^{0}}{p^{m}}=\frac{1}{p^{m}}$: si l'on écrit $p+m$, au lieu de p, on aura

$$[p]^{-m}=\frac{1}{[p+m]^{m}}.$$

Ces deux dernières remarques établissent la loi de continuité entre

$$[p]^{n}=p(p-1)(p-2)(p-3)\dots\dots(p-n+1)$$

$$[p]^{0}=1$$

$$[p]^{-n}=\frac{1}{(p+n)(p+n-1)(p+n-2)\dots\dots(p+1)}.$$

En écrivant dans la dernière, les facteurs du dénominateur suivant l'ordre direct de leur grandeur, on aura

$$[p]^{-n}=\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots\dots(p+n)};$$

et si l'on fait $p=0$, on tombera sur cette expression :

$$[0]^{n}=\frac{1}{1.2.3\dots\dots n},$$

qui toute singulière qu'elle est, n'en doit pas moins être adoptée à cause de sa simplicité. Elle n'est point absurde, puisque le facteur 0 n'entre pas dans son développement.

Eclaircissons cette notation par quelques exemples, le produit $11.9.7.5$ s'écrira de ces deux manières : $[11,2]^{4}$, $2^{4}[\frac{11}{2}]^{4}$,

la fraction $\frac{1}{5.7.9.11}$ de celles-ci : $2^{-4}[\frac{5}{2}-1]^{-4}$, $\frac{1}{2^{4}}[\frac{3}{2}]^{-4}$,

la fraction $\frac{1}{1.4.7.10.13}$ revient à $3^{-5}[\frac{1}{3}-1]^{-5}$, ou $\frac{1}{3^{5}}[-\frac{2}{3}]^{-5}$,

enfin $\frac{1}{1.2.3.4.5}$ équivaut à $[0]^{-5}$.

La première et la seconde fraction se ramènent à la forme

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)\dots\dots(p+n)}=[p]^{-n},$$

en divisant chaque facteur du dénominateur par la différence qui règne entr'eux.

La formule du binome devient par ces nouveaux signes

$$(a+b)^n = a^n + [n]^{1}[o]^{-1}a^{n-1}b + [n]^{2}[o]^{-2}a^{n-2}b + [n]^{3}[o]^{-3}a^{n-3}b^3$$
$$\ldots\ldots + [n]^{m}[o]^{-m}a^{n-m}b^m + \text{etc.}$$

Ce qui les distingue de la plupart des notations qu'on auroit pu imaginer, c'est qu'ils sont susceptibles de devenir l'objet d'un calcul aussi simple que celui des exposans avec lesquels ils ont la plus grande analogie. Le lecteur se les rendra familiers par les fréquentes applications que nous aurons occasion d'en faire, mais il doit se rappeler soigneusement ces relations:

$[x, \Delta]^{n} = x^n$, lorsque $x = 0$;

$[x, \Delta]^{n} = x^n$, lorsque x est infini par rapport à n et à Δ (n°. 862),

$[p]^{n} = 0$, lorsque $p = 0$,

$[p]^{-n} = \frac{1}{0}$, lorsque $p = -1$,

$$\Delta[p]^{n} = n[p]^{n-}, \quad \Sigma[p]^{n} = \frac{[p]^{n+1}}{n+1} + const.$$

$$\Delta[p]^{-n} = -n[p]^{-n-1}, \quad \Delta[p]^{-n} = \frac{[p]^{-n+1}}{-n+1} + const.$$

Les quatre premières sont évidentes par elles-mêmes; les deux dernières s'obtiennent et se vérifient par le développement, en supposant que la quantité p augmente de l'unité, et offrent une nouvelle preuve de l'analogie que les puissances du second ordre ont avec celles du premier.

903. Occupons-nous maintenant de transformer les puissances du premier ordre, p^n, en fonctions de celles du second, $[p]^{n}$, $[p]^{n-1}$, etc. Pour cela soit

$$p^n = A[p]^{n} + B[p]^{n-1} + C[p]^{n-2} + D[p]^{n-3} \ldots + M[p]^{2} + N[p]^{1},$$

et supposons que n devienne $n+1$; à cause de $p^{n+1} = p^n . p$, on aura

$$p^{n+1} = Ap[p]^{n} + Bp[p]^{n-1} + Cp[p]^{n-2} + Dp[p]^{n-3} \ldots + Mp[p]^{2} + Np[p]^{1};$$

mais de $[p]^{n+1} = [p]^{n}(p-n)$ on tire $p[p]^{n} = [p]^{n+1} + n[p]^{n}$

$$[p]^{n} = [p]^{n-1}(p-n+1) \qquad p[p]^{n-1} = [p]^{n} + (n-1)[p]^{n-1}$$
$$[p]^{n-1} = [p]^{n-2}(p-n+2) \qquad p[p]^{n-2} = [p]^{n-1} + (n-2)[p]^{n-2}$$
$$[p]^{n-2} = [p]^{n-3}(p-n+3) \qquad p[p]^{n-3} = [p]^{n-2} + (n-3)[p]^{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[p]^{3} = [p]^{2}(p-2) \qquad p[p]^{2} = [p]^{3} + 2[p]^{2}$$
$$[p]^{2} = [p]^{1}(p-1) \qquad p[p]^{1} = [p]^{2} + 1[p]^{1},$$

substituant ces valeurs, il viendra

$$p^{n+1} = A[p]^{n+1} + \left.\begin{array}{r} B \\ +nA \end{array}\right| [p]^{n} + \left.\begin{array}{r} C \\ +(n-1)B \end{array}\right| [p]^{n-1} + \left.\begin{array}{r} D \\ +(n-2)C \end{array}\right| [p]^{n-2} \ldots + \left.\begin{array}{r} N \\ +2M \end{array}\right| [p]^{2} \left.\begin{array}{r} \\ +N \end{array}\right| [p]^{1}.$$

Le second membre de cette équation donne la manière de tirer successivement le coefficient d'une puissance quelconque de ceux de la puissance immédiatement inférieure; si l'on fait $n=0$, il en résultera $p = A[p]^{1}$ et comme $[p]^{1} = p$, on en conclura $A=1$. Ce premier coefficient étant connu, tous les autres se forment avec la plus grande facilité; et c'est ainsi qu'on a construit la table ci-dessous.

$$p^1 = [p]^{1}$$
$$p^2 = [p]^{2} + [p]^{1}$$
$$p^3 = [p]^{3} + 3[p]^{2} + [p]^{1}$$
$$p^4 = [p]^{4} + 6[p]^{3} + 7[p]^{2} + [p]^{1}$$
$$p^5 = [p]^{5} + 10[p]^{4} + 25[p]^{3} + 15[p]^{2} + [p]^{1}$$

etc.

On arriveroit à l'expression générale de p^n, avec le secours de l'intégration; car, par l'expression de p^{n+1}, on a

$$\Delta B = nA, \quad \Delta C = (n-1)B, \quad \Delta D = (n-2)C, \text{ etc.}$$

or A étant 1, on trouve $B = \Sigma n = \Sigma[n]^{1} = \frac{[n]^{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,

ce qui donne $\Delta C = \frac{(n-1)^2 n}{2}$, et en observant que d'après les formules précédentes, $(n-1)^2 = [n-1]^2 + [n-1]$, on changera ΔC en $\frac{[n]^4 + [n]^2}{2}$, d'où on tirera, en intégrant,

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{[n]^4}{4} + \frac{[n]^3}{3}\right) + const. = \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\right\} + const.$$

Les constantes se déterminent ici comme après l'intégration des différentielles, par une valeur donnée; et puisque les coefficiens B, C, doivent s'évanouir lorsque $n=0$, il s'ensuit que les constantes mises à la suite de leurs expressions doivent être supprimées.

Il est aisé maintenant de poursuivre, c'est pourquoi nous passerons aux puissances négatives, et nous ferons

$$p^{-n} = A[p]^{-n} + B[p]^{-n-1} + C[p]^{-n-2} \ldots + M[p]^{-n-m} + N[p]^{-n-m-1} + \text{etc.}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par p, nous aurons

$$p^{-n+1} = Ap[p]^{-n} + Bp[p]^{-n-1} + Cp[p]^{-n-2} \ldots + Mp[p]^{-n-m} + Np[p]^{-n-m-1} + \text{etc.}$$

$$[p]^{-n+1} = [p]^{-n}(p+n) \qquad \text{d'où } p[p]^{-n} = [p]^{-n+1} - n[p]^{-n}$$

$$[p]^{-n} = [p]^{-n-1}(p+n+1) \qquad p[p]^{-n-1} = [p]^{-n} - (n+1)[p]^{-n-1}$$

$$[p]^{-n-1} = [p]^{-n-2}(p+n+2) \qquad p[p]^{-n-2} = [p]^{-n-1} - (n+2)[p]^{-n-2}$$

etc. etc.

d'où nous conclurons

$$p^{-n+1} = A[p]^{-n+1} + \left.\begin{matrix} B \\ -nA \end{matrix}\right| [p]^{-n} + \left.\begin{matrix} C \\ -(n+1)B \end{matrix}\right| [p]^{-n-1} \ldots + \left.\begin{matrix} N \\ -(n+m)M \end{matrix}\right| [p]^{-n-m} + \text{etc.}$$

résultat qui ne diffère de son analogue dans le n°. précédent, que par le signe de n; et comme tous deux coïncident lorsque $n=0$, on est en droit d'affirmer que le second doit se déduire du premier, en y changeant simplement le signe de n. On prendra donc

$$A=1, \quad B=\frac{n(n+1)}{2}, \quad C=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right\}$$

etc.

et

et l'on voit que la série ne s'arrête plus comme pour le cas de l'exposant positif.

On peut former successivement les valeurs de p^{-1}, p^{-2}, p^{-3}, etc. en partant de la valeur de p^{0} qui est 1, et en faisant en conséquence $n=1$, dans l'expression de p^{-n+1} rapportée plus haut, laquelle, à cause de $p^{0}=\overset{0}{[p]}$, donne

$$A=1,\quad B-A=0,\quad C-2B=0,\ldots N-(1+m)M=0,$$

d'où on tire

$$p^{-1}=\overset{-1}{[p]}+1\overset{-2}{[p]}+1.2\overset{-3}{[p]}+1.2.3\overset{-4}{[p]}\ldots\ldots+1.2.3\ldots\ldots(m+1)\overset{-m-2}{[p]}+\text{etc.}$$

Supposant ensuite $n=2$, la puissance p^{-n+1} se changera en p^{-1}; en la comparant au développement ci-dessus, il viendra

$$A=1,\quad B-2A=1,\quad C-3B=1.2,\ \text{etc.}$$

et par conséquent

$$p^{-2}=\overset{-2}{[p]}+3\overset{-3}{[p]}+11\overset{-4}{[p]}+\text{ etc.}$$

En continuant ainsi, on trouvera

$$p^{-3}=\overset{-3}{[p]}+6\overset{-4}{[p]}+35\overset{-5}{[p]}+\text{ etc. } (*).$$

904. Avant de terminer l'exposition des propriétés générales des puissances du second ordre, il nous reste à montrer comment on exprime la fonction $\overset{n}{[p+q]}$, par le moyen de $\overset{n}{[p]}$, $\overset{n-1}{[p]}$, etc. Puisqu'on a $\overset{n}{[p]}=\overset{n-1}{[p]}(p-n+1)$, il s'ensuit que $\overset{n-1}{[p]}(p+1)=\overset{n}{[p]}+n\overset{n-1}{[p]}$; mais en développant l'expression $\overset{n}{[p+1]}$,

(*) Les formules de Stirling ne sont pas tout à fait les mêmes que celles-ci, parce que n'ayant pas apperçu la loi de continuité qui lie $\overset{n}{[p]}$ à $\overset{-n}{[p]}$, il prit pour analogues, dans le système des puissances du second ordre, les expressions p et $\frac{1}{p}$, qui ne le sont que dans celui des puissances du premier, et il trouva en conséquence

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p^{2}}=\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)(p+2)}+\frac{2}{p(p+1)(p+2)(p+3)}+\text{etc.}$$

etc.

résultats qui s'obtiennent en divisant par p les deux membres des valeurs de p^{0}, p^{-1}, etc. rapportées ci-dessus.

il est aisé de voir que $[p+1]^{n}=(p+1)[p]^{n-1}$: on aura donc

$$[p+1]^{n}=[p]^{n}+n[p]^{n-1}.$$

Maintenant si l'on met $p+1$, pour p, il viendra

$$[p+2]^{n}=[p+1]^{n}+n[p+1]^{n-1},$$

et substituant dans cette équation pour $[p+1]^{n}$ et $[p+1]^{n-1}$, leurs valeurs déduites de la précédente, soit immédiatement, soit en y changeant n en $n-1$, on trouve

$$[p+2]^{n}=[p]^{n}+2n[p]^{n-1}+n(n-1)[p]^{n-2}.$$

En écrivant encore $p+1$, au lieu de p, et en opérant comme ci-dessus, on obtiendra

$$[p+3]^{n}=[p]^{n}+3n[p]^{n-1}+3n(n-1)[p]^{n-2}+n(n-1)(n-2)[p]^{n-3}.$$

L'induction tirée de ces résultats, dans lesquels les coefficiens numériques sont ceux du binome, nous conduit à cette formule générale :

$$\begin{aligned}[p+q]^{n}=[p]^{n}&+[q]^{1}[0]^{-1}[n]^{1}[p]^{n-1}+[q]^{2}[0]^{-2}[n]^{2}[p]^{n-2}\\&+[q]^{3}[0]^{-3}[n]^{3}[p]^{n-3}+[q]^{4}[0]^{-4}[n]^{4}[p]^{n-4}+\text{etc.}\end{aligned}$$

qui peut se vérifier par un moyen analogue à celui que nous avons employé dans le n°. 860. Soit pour cela

$$[p+q]^{n}=[p]^{n}+A[n]^{1}[p]^{n-1}+B[n]^{2}[p]^{n-2}+C[n]^{3}[p]^{n-3}+\text{etc.}$$

et changeons q en $q+1$, nous aurons

$$[p+q+1]^{n}=[p+1]^{n}+A[n]^{1}[p+1]^{n-1}+B[n]^{2}[p+1]^{n-2}+C[n]^{3}[p+1]^{n-3}+\text{etc.}$$

mettant au lieu des puissances de $p+1$, leur expression déduite de l'équation $[p+1]^{n}=[p]^{n}+n[p]^{n-1}$, nous obtiendrons

$$[p+q+1]^{n}=[p]^{n}\left.\begin{matrix}+A\\+1\end{matrix}\right|[n]^{1}[p]^{n-1}\left.\begin{matrix}+B\\+A\end{matrix}\right|[n]^{2}[p]^{n-2}\left.\begin{matrix}+C\\+B\end{matrix}\right|[n]^{3}[p]^{n-3}+\text{etc.}$$

résultat qui montre évidemment que les coefficiens A, B, C, etc. suivent dans leurs accroissemens les mêmes loix que ceux de la puissance q du binome, et doivent par conséquent demeurer identiques avec ces derniers, puisqu'ils l'ont été à leur origine.

905. Retournons maintenant à l'intégration des différences; passons aux fractions rationnelles, et supposons-les décomposées en fractions simples, comme pour l'intégration des différentielles (n°. 364). On pourra toujours intégrer parmi ces dernières chaque couple de la forme

$$\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a};$$

car il est évident que

$$\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}=\Delta\frac{A}{x+a},$$

et en prenant l'intégrale de chaque membre, on arrive à

$$\Sigma\left\{\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}\right\}=\frac{A}{x+a}+const.$$

Il est à remarquer que ni l'une ni l'autre des fractions du premier membre ne peut s'intégrer.

Soit pour exemple $\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$. La décomposition de cette fraction en fractions simples conduit à

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+2h};$$

par la formule générale obtenue plus haut, on a

$$\Sigma\frac{A}{x+a}=\Sigma\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a},$$

et par conséquent $\Sigma\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x};$

en substituant cette valeur, on trouvera

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{2}{h}\left\{\Sigma\frac{1}{x+h}-\Sigma\frac{1}{x+2h}\right\}-\frac{1}{h}\frac{1}{x};$$

mais $\Sigma\left\{\frac{1}{x+2h}-\frac{1}{x+h}\right\}=\frac{1}{x+h}$: il viendra donc

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=-\frac{2}{h(x+h)}-\frac{1}{hx}+const.=-\frac{3x+h}{hx(x+h)}+const.$$

On auroit pu mettre immédiatement la formule proposée sous

une forme évidemment intégrable, en l'écrivant ainsi :

$$\Sigma \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = \frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x+h} + \frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+h} - \frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+2h};$$

et on auroit conclu sur le champ

$$\Sigma \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = -\frac{1}{h}\frac{1}{x} - \frac{2}{h}\frac{1}{x+h} + const.$$

Cet exemple suffit pour faire connoître l'esprit de la méthode, et l'on voit par ce qui précède combien il doit être rare de tomber sur des fractions rationnelles, qui soient la différence exacte de quelque fonction primitive. En revenant sur ce sujet par les méthodes d'approximation, nous ferons voir que la fraction $\frac{A}{x+a}$, n'est pas même intégrable par logarithmes, comme lorsqu'il s'agit des différentielles.

906. Les cas où l'on peut intégrer les différences irrationnelles sont si rares et si particuliers, que nous ne nous y arrêterons pas; on en reconnoîtra d'ailleurs les caractères, en différentiant des fonctions irrationnelles, et nous passerons en conséquence tout de suite aux fonctions transcendantes, parmi lesquelles il s'en trouve plusieurs qui se prêtent assez facilement aux intégrations. De ce nombre est la fonction a^x.

En effet, puisque $\Delta . a^x = a^x(a^h - 1)$, il s'ensuit $\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + const.$

On intègre aussi l'expression $a^x y$, lorsque y est une fonction rationnelle et entière de x; car si l'on fait $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$ que l'on suppose ensuite

$$\Sigma a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = a^x(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})$$

et qu'on prenne la différence de chaque membre, on trouvera

$$a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) = \begin{cases} a^{x+h}(A + B(x+h) + C(x+h)^2 + D(x+h)^3 + \text{etc.}) \\ -a^x(A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}) \end{cases}$$

développant le second membre et divisant tout par a^x, il viendra

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} = {} & (a^h - 1)(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) \\ & + a^h h\,(B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{etc.}) \\ & + a^h h^2 (C + 3Dx + \text{etc.}) \\ & + a^h h^3 (D + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Comparant les termes semblables dans chacun des membres, on aura

$$\alpha = -A + a^h(A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.}$$
$$\beta = -B + a^h(B + 2Ch + 3Dh^2 + \text{etc.})$$
$$\gamma = -C + a^h(C + 3Dh + \text{etc.})$$
$$\delta = -D + a^h(D + \text{etc.})$$
etc.

Si pour donner un exemple on veut terminer à γx^2 la fonction y, on fera $\delta = 0$, ce qui donnera $D = 0$, et on trouvera

$$C = \frac{\gamma}{a^h - 1}$$

$$B = \frac{\beta - 2Ca^h h}{a^h - 1} = \frac{a^h(\beta - 2\gamma h) - \beta}{(a^h - 1)^2}$$

$$A = \frac{\alpha - Ba^h h - Ca^h h^2}{a^h - 1} = \frac{a^{2h}(\alpha - \beta h + \gamma h^2) - a^h(2\alpha + \beta h - \gamma h^2) + \alpha}{(a^h - 1)^3},$$

d'où on tirera $\Sigma a^x(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = const. +$

$$a^x \left\{ \frac{a^{2h}(\alpha - \beta h + \gamma h^2) - a^h(2\alpha + \beta h - \gamma h^2) + \alpha}{(a^h - 1)^3} + \frac{(a^h(\beta - 2\gamma h) - \beta)x}{(a^h - 1)^2} + \frac{\gamma x^2}{a^h - 1} \right\}.$$

907. Venons maintenant à l'intégration des fonctions circulaires. Elle s'effectue par les formules trouvées plus haut, lorsqu'on fait usage des expressions exponentielles de ces fonctions; on a, par le n°. 37 de l'Introduction, et par le précédent,

$$\Sigma \sin x = \Sigma \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ \Sigma e^{x\sqrt{-1}} - \Sigma e^{-x\sqrt{-1}} \}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{e^{h\sqrt{-1}} - 1} - \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{-h\sqrt{-1}} - 1} \right\} + const.$$

$$= \frac{e^{(x-h)\sqrt{-1}} - e^{-(x-h)\sqrt{-1}} - (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}\,(2 - (e^{h\sqrt{-1}} + e^{-h\sqrt{-1}}))} + const.$$

Le dernier de ces résultats étant transformé en fonction de sinus et de cosinus, devient successivement

$$\Sigma \sin x = \frac{\sin(x-h) - \sin x}{2(1 - \cos h)} + const.$$

$$= -\frac{\sin x - \sin(x-h)}{4(\sin \tfrac{1}{2} h)^2} + const. = -\frac{\cos(x - \tfrac{1}{2} h)}{2 \sin \tfrac{1}{2} h} + const.$$

au moyen des relations
$1-\cos A=2(\sin\frac{1}{2}A)^2$, $\sin A-\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$.
On étendroit sans peine ce procédé à beaucoup d'autres fonctions du même genre, mais il paroitra sans doute plus commode d'opérer immédiatement sur les sinus et les cosinus, ainsi que nous allons le faire.

908. 1°. L'équation $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(A+B)$, donne

$$\Delta\cos x=\cos(x+h)-\cos x=-2\sin\tfrac{1}{2}h\sin(x+\tfrac{1}{2}h),$$

d'où on tire

$$\sin(x+\tfrac{1}{2}h)=-\frac{\Delta\cos x}{2\sin\frac{1}{2}h},\ \text{et}\ \sin x=-\frac{\Delta\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

en écrivant $x-\frac{1}{2}h$, au lieu de x; prenant ensuite l'intégrale de chaque membre de la dernière équation, on obtient, comme ci-dessus,

$$\Sigma\sin x=-\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}+const.$$

2°. L'équation $\sin A-\sin B=2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$, donne

$$\Delta\sin x=\sin(x+h)-\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h),$$

d'où il suit

$$\cos(x+\tfrac{1}{2}h)=\frac{\Delta\sin x}{2\sin\frac{1}{2}h},\qquad \cos x=\frac{\Delta\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h},$$

$$\Sigma\cos x=\frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h}+const.$$

3°. La conversion des puissances de sinus, de cosinus et de leurs produits, en fonction de sinus et de cosinus d'arcs multiples, ramenera aux deux formules que nous venons de trouver, l'intégration de la fonction générale $\sin x^m\cos x^n$, lorsque les exposans m et n seront des nombres entiers positifs.

En effet, cette fonction sera changée en une suite de termes de la forme $A\sin qx$, ou $A\cos qx$, dont les intégrales se déduiront de celles de $A\sin x$ et $A\cos x$, en écrivant qx et qh, au lieu de x et de h; et il est facile de voir que l'on aura en général

$$\Sigma\sin(p+qx)=-\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh}+const.$$

$$\Sigma\cos(p+qx)=\frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh}+const.$$

Lorsque le développement de la fonction $\sin x^m \cos x^n$ contiendra des termes constans, son intégrale renfermera l'arc de cercle x, puisque $\Sigma A = A \Sigma x^0 = A\frac{x}{h}$.

909. On peut encore pousser plus loin l'intégration des fonctions circulaires et obtenir la fonction primitive dont la différence est $x^p \sin x'$, ou $x^p \cos x'$, x' étant une fonction de x ayant pour différence première la constante h'. Les développemens des fonctions $\Delta\{(x-h)^p \cos(x'-\frac{1}{2}h')\}$ et $\Delta\{(x-h)^p \sin(x'-\frac{1}{2}h')\}$, donnent les équations

$$\Delta\{(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = x^p\cos(x'+\tfrac{1}{2}h') - (x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')$$
$$= x^p\{\cos(x'+\tfrac{1}{2}h') - \cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} +$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - \text{etc.}\right\}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h'),$$

$$\Delta\{(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = x^p\sin(x'+\tfrac{1}{2}h') - (x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')$$
$$= x^p\{\sin(x'+\tfrac{1}{2}h') - \sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\} +$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-1)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - \text{etc.}\right\}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h').$$

Substituant dans l'une la valeur de $\cos(x'+\frac{1}{2}h') - \cos(x'-\frac{1}{2}h')$, et dans l'autre celle de $\sin(x'+\frac{1}{2}h') - \sin(x'-\frac{1}{2}h')$, il viendra

$$\Delta\{(x-h)^p\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = -2x^p\sin x'\sin\tfrac{1}{2}h' +$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - \text{etc.}\right\}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h'),$$

$$\Delta\{(x-h)^p\sin(x'-\tfrac{1}{2}h')\} = 2x^p\cos x'\sin\tfrac{1}{2}h' +$$
$$\left\{\frac{p}{1}x^{p-1}h - \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}h^3 - \text{etc.}\right\}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h');$$

tirant de ces dernières la valeur de $x^p\sin x'$, celle de $x^p\cos x'$, et prenant l'intégrale de chaque terme du résultat, on aura

$$\Sigma x^p\sin x' = -\frac{(x-h)^p\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} +$$
$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\frac{p}{1}h\Sigma x^{p-1}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h') - \frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h')\right.$$
$$\left. + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\cos(x'-\tfrac{1}{2}h') - \text{etc.}\right\} + \textit{const.}$$

$$\Sigma x^p \cos x' = \frac{(x-h)^p \sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} -$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}h'}\left\{\frac{p}{1}h\,\Sigma x^{p-1}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h') - \frac{p(p-1)}{1.2}h^2\Sigma x^{p-2}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h') + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{p-3}\sin(x'-\tfrac{1}{2}h') - \text{etc.}\right\} + const.$$

Si l'on fait d'abord $p=1$, ces formules donneront

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\cos(x'-\tfrac{1}{2}h') + const.$$

$$\Sigma x \cos x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} - \frac{h}{2\sin\frac{1}{2}h'}\Sigma\sin(x'-\tfrac{1}{2}h') + const.$$

et comme, par le n°. précédent, on a

$$\Sigma\sin(x'-\tfrac{1}{2}h') = -\frac{\cos(x'-h')}{2\sin\frac{1}{2}h'}, \qquad \Sigma\cos(x'-\tfrac{1}{2}h') = \frac{\sin(x'-h')}{2\sin\frac{1}{2}h'},$$

il en résultera

$$\Sigma x \sin x' = -\frac{(x-h)\cos(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\sin(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2} + const.$$

$$\Sigma x \sin x' = \frac{(x-h)\sin(x'-\frac{1}{2}h')}{2\sin\frac{1}{2}h'} + \frac{h\cos(x'-h')}{(2\sin\frac{1}{2}h')^2} + const.$$

Avec ces expressions on obtiendra celles de $\Sigma x^2 \sin x'$, $\Sigma x^2 \cos x'$, en faisant $p=2$, puis celles de $\Sigma x^3 \sin x'$, $\Sigma x^3 \cos x'$, en faisant $p=3$, et ainsi de suite; on sera donc en état d'assigner l'intégrale des fonctions $y \sin x$, $y \cos x$, dans tous les cas où y sera une fonction rationnelle et entière de x.

Il est bon de remarquer que si l'on prend $x=ax'+b$, ce qui donnera $h=ah'$, on conclura immédiatement

$$\Sigma(ax'+b)^p \sin x', \qquad \Sigma(ax'+b)^p \cos x',$$

de $\Sigma x^p \sin x'$, $\Sigma x^p \cos x'$, en changeant hors des sinus et des cosinus seulement, x en $ax'+b$ et h en ah'. On n'a pu, jusqu'à présent, faire pour les tangentes et les sécantes, ni pour les fractions ayant pour dénominateurs des puissances de sinus et de cosinus, ce que nous venons de faire sur les fonctions rationnelles et entières de ces derniers.

910.

910. L'intégration par parties se pratique sur les différences aussi bien que sur les différentielles. Soient P et Q, deux fonctions quelconques de x, et faisons $\Sigma PQ = Q\Sigma P + z$, z étant une fonction inconnue de la même variable. En prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q + \Delta Q)\Sigma(P + \Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z;$$

développant et réduisant, en observant que $Q\Sigma\Delta P = PQ$, il viendra

$$0 = \Delta Q\Sigma(P + \Delta P) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta Q\Sigma(P + \Delta P),$$

et par conséquent

$$z = -\Sigma(\Delta Q\Sigma(P + \Delta P)) = -\Sigma\Delta Q\Sigma P_1, \qquad \Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma(\Delta Q\Sigma P_1).$$

Soit encore $\Sigma(\Delta Q\Sigma P_1) = \Delta Q\Sigma^2 P_1 + z$(*); si l'on prend les différences et que l'on opère comme ci-dessus, on trouvera successivement

$$\Delta Q\Sigma P_1 = (\Delta Q + \Delta^2 Q)\Sigma(\Sigma P_1 + P_1) - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta z$$

$$0 = \Delta^2 Q\Sigma(\Sigma P_1 + P_1) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta^2 Q\Sigma(\Sigma P_1 + P_1).$$

Il est facile de reconnoître que

$$\Sigma P_1 + P_1 = \Sigma P_1 + \Delta.\Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2,$$

et l'on aura par conséquent

$$\Delta z = -\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2, \qquad \Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2).$$

Pour aller au-delà de ce résultat, on fera $\Sigma(\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2) = \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 + z$, et on obtiendra

$$\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2 = (\Delta^2 Q + \Delta^3 Q)\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2) - \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 + \Delta z$$

$$0 = \Delta^3 Q\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2) + \Delta z, \text{ ou } \Delta z = -\Delta^3 Q\Sigma(\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2),$$

et comme

$$\Sigma^2 P_2 + \Sigma P_2 = \Sigma^2 P_2 + \Delta.\Sigma^2 P_2 = \Sigma^2(P_2 + \Delta P_2) = \Sigma^2 P_3,$$

on parviendra à

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma(\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3).$$

En général, soit $\Sigma(\Delta^n Q\Sigma^n P_n)$, le terme auquel on arrive après n opérations semblables aux précédentes; si l'on suppose que

$$\Sigma(\Delta^n Q\Sigma^n P_n) = \Delta^n Q\Sigma^{n+1} P_n + z,$$

et qu'on répète sur cette équation ce qui a été fait sur ses analogues, on en tirera l'équation

$$\Sigma(\Delta^n Q\Sigma^n P_n) = \Delta^n Q\Sigma^{n+1} P_n - \Sigma(\Delta^{n+1} Q\Sigma^{n+1} P_{n+1});$$

(*) Ici, de même que pour les différences, on écrit $\Sigma^2 X$, $\Sigma^3 X$, etc. au lieu de $\Sigma(\Sigma X)$, $\Sigma(\Sigma(\Sigma X))$, etc.

qui renferme la loi de cette expression élégante, donnée pour la première fois par Taylor, dans les Transactions philosophiques :

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{etc.}$$

Si l'on y met pour P_1, P_2, P_3, etc. leurs valeurs en P, et qu'on effectue les intégrations qui deviennent possibles, elle se change en

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{etc.}$$

C'est sous cette forme que Condorcet l'a présentée dans son *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions*, p. 163.

Elle s'arrête toutes les fois que la fonction Q mène à des différences constantes dans un ordre quelconque; et si la fonction P est susceptible d'un nombre suffisant d'intégrations successives, on parvient à l'intégrale exacte de la fonction PQ.

911. Il suit de là que l'on peut intégrer, 1°. toute fonction de la forme $\dfrac{A\alpha^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots\ldots}{[x]^{n}}$,

quand les exposans du numérateur seront entiers et positifs.

2°. Toute fonction de la forme

$$a^{mx}(Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots\ldots),$$

quel que soit le signe de m.

3°. Enfin toute fonction de la forme

$$\sin x^m \cos x^n (Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots\ldots),$$

pourvu que m et n soient positifs, et en changeant le produit $\sin x^m \cos x^n$ en sinus et cosinus d'arcs multiples.

Ces remarques sont fondées sur ce que les fonctions $[x]^{n}$, a^{mx}, $\sin x$ et $\cos x$, sont susceptibles d'un nombre quelconque d'intégrations successives (n°s. 902, 906, 908); elles méritent d'autant plus d'attention qu'elles comprennent à peu près tous les cas où l'on peut intégrer les différences qui ne dépendent que d'une seule variable, et qu'elles conduisent par conséquent à la sommation d'un grand nombre de suites (n°. 897).

912. On exprime aussi l'intégrale d'une fonction quelconque u, par le moyen de ses différences. Il suffit pour cela d'observer que si l'on fait $\Sigma u = U$, et que l'on désigne par U_{-n} la valeur que

prend U, lorsqu'on y change x en $x-nh$, on passera de U à U_{-n}, par la formule du n°. 873, qui devient dans ce cas

$$U_{-n}=U-\frac{n}{1}\Delta U+\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 U-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\Delta^3 U+\text{etc.}$$

et donne par conséquent

$$U-U_{-n}=\frac{n}{1}u-\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta u+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\Delta^2 u-\text{etc.}$$

après qu'on y a substitué pour ΔU, $\Delta^2 U$, $\Delta^3 U$, etc. leurs valeurs déduites de l'équation $U=\Sigma u$.

Mais il est visible que $U-U_{-n}$ n'est autre chose que l'intégrale de la fonction u, prise depuis x, jusqu'à $x-nh$, puisque d'après les conventions établies

$$\begin{aligned} U &= u_{-1}+u_{-2}+u_{-3}+\ldots\ldots+u_{-n}+u_{-n-1}+u_{-n-2}+\text{etc.} \\ U_{-n} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_{-n-1}+u_{-n-2}+\text{etc.} \end{aligned}$$

on aura donc

$$\Sigma u=\frac{n}{1}u-\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta u+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\Delta^2 u-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

en se rappelant que par cette valeur, l'intégrale est renfermée entre les limites x et $x-nh$.

Quoique pour rendre le passage indiqué ci-dessus plus facile à saisir, nous ayons supposé que le nombre n fût entier, il peut néanmoins ici, comme dans la formule du n°. 873, être quelconque; d'où il suit que si on veut pousser l'intégrale jusqu'à l'origine des x, on aura encore

$$\Sigma u=\frac{x'}{1}u-\frac{x'(x'+1)}{1.2}\Delta u+\frac{x'(x'+1)(x'+2)}{1.2.3}\Delta^2 u-\frac{x'(x'+1)(x'+2)(x'+3)}{1.2.3.4}\Delta^3 u+\text{etc.}$$

x' désignant le rapport de x à h.

Lorsque la différence h de l'abscisse devient évanouissante et qu'on prend les limites en conséquence, la valeur de Σu devient celle de $\int u\,dx$, que nous avons donnée dans le n°. 485, comme l'expression générale de u_n se change dans la série de Taylor (n°. 862).

En effet, on trouve successivement

$$\Sigma u h = \frac{x'h}{1} u - \frac{x'h^2(x'+1)}{1.2} \frac{\Delta u}{h} + \frac{x'h^3(x'+1)(x'+2)}{1.2.3} \frac{\Delta^2 u}{h^2} + \text{etc.}$$

$$\Sigma u h = \frac{x'h}{1} u - \frac{x'^2h^2\left(1+\frac{1}{x'}\right)}{1.2} \frac{\Delta u}{h} + \frac{x'^3h^3\left(1+\frac{1}{x'}\right)\left(1+\frac{2}{x'}\right)}{1.2.3} \frac{\Delta^2 u}{h^2} + \text{etc.}$$

d'où on conclura

$$\int u dx = x u - \frac{x^2}{1.2} \frac{du}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

si l'on fait attention qu'à cause de $x = x'h$, le rapport x' augmente à mesure que h diminue, et devient infiniment grand lorsque cet accroissement s'évanouit.

On parvient encore à une expression de Σu, qui diffère de celle que nous venons d'obtenir, en ce que les quantités u, Δu, $\Delta^2 u$, sont relatives à l'autre limite de l'intégrale. Supposons qu'on demande la valeur de l'intégrale Σu, prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + nh$: on désignera alors par A, ΔA, $\Delta^2 A$, ce que deviennent les quantités u, Δu, $\Delta^2 u$, etc. lorsqu'on y change x en a; on aura, par la formule du n°. 873

$$\Sigma u - \Sigma A = n A + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta A + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 A + \text{etc.}$$

et en prenant depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x'h$, il viendra

$$\Sigma u - \Sigma A' = x'A' + \frac{x'(x'-1)}{1.2} \Delta A' + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1.2.3} \Delta^2 A' + \text{etc.}$$

formule dans laquelle A' représente la valeur de u dans l'hypothèse où $x = 0$.

913. L'utilité dont est l'expression de Σu, pour la sommation des séries, a porté les Analystes à s'en occuper beaucoup, et ils sont parvenus à lui donner plusieurs formes très-élégantes. Euler la fit dépendre des coefficiens différentiels et de l'intégrale $\int u\, dx$. On arrive à ce résultat en partant de la formule

$$\Delta z = \frac{dz}{dx} \frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui donne $z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{etc.}$

Si on fait $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra $z = \int u\,dx$ et

$$\int u\,dx = h\Sigma u + \alpha h^2\Sigma\frac{du}{dx} + \beta h^3\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

en représentant par α, β, γ, etc. les coefficiens numériques; on tirera de là

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - \alpha h\Sigma\frac{du}{dx} - \beta h^2\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \text{etc.}$$

Si maintenant on prend les coefficiens différentiels de chaque membre, en observant que $\frac{d.\Sigma u}{dx} = \Sigma\frac{du}{dx}$, ce qu'il est fort aisé de vérifier, on obtiendra cette suite d'équations

$$\Sigma\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}u - \alpha h\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} - \beta h^2\Sigma\frac{d^3u}{dx^3}$$

$$\Sigma\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h}\frac{du}{dx} - \alpha h\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} - \beta h^2\Sigma\frac{d^4u}{dx^4}$$

$$\Sigma\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{h}\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha h\Sigma\frac{d^4u}{dx^4} - \beta h^2\Sigma\frac{d^5u}{dx^5},$$

etc.

on se servira de ces dernières pour éliminer successivement de la valeur de Σu les fonctions

$$\Sigma\frac{du}{dx}, \quad \Sigma\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \Sigma\frac{d^3u}{dx^3}, \text{ etc.}$$

et il est aisé de voir que le résultat sera nécessairement de la forme

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx + Au + Bh\frac{du}{dx} + Ch^2\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

La détermination des coefficiens A, B, C, etc. s'opère ici comme dans le n°. 864, par la considération de la fonction particulière e^x, pour laquelle on trouve

$$\Sigma e^x = \frac{e^x}{e^h - 1}, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \frac{d^m.e^x}{dx^m} = e^x,$$

d'où il suit $\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} + A + Bh + Ch^2 + \text{etc.}$

ce qui montre que les coefficiens A, B, C, etc. ne sont autre chose que ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de la fonction $\frac{1}{e^h-1}$, réduite en série ascendante par rapport à cette lettre.

914. On obtiendra de la même manière, et sans plus de difficulté, l'intégrale répétée $\Sigma^m u$; car la formule

$$\Delta^m z = \frac{d^m z}{dx^m}h^m + \alpha\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}h^{m+1} + \beta\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}}h^{m+2} + \text{etc.}$$

conduit à

$$z = h^m\Sigma^m\frac{d^m z}{dx^m} + \alpha h^{m+1}\Sigma^m\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + \beta h^{m+2}\Sigma^m\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}};$$

faisant ensuite $\frac{d^m z}{dx^m} = u$, on aura $z = \int^m u\,dx^m$, et par conséquent

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m}\int^m u\,dx^m - \alpha h\Sigma^m\frac{du}{dx} - \beta h^2\Sigma^m\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

prenant les coefficiens différentiels de chaque membre de cette dernière équation, on formera les suivantes:

$$\Sigma^m\frac{du}{dx} = \frac{1}{h^m}\int^{m-1}u\,dx^{m-1} - \alpha h\Sigma^m\frac{d^2u}{dx^2} - \beta h\Sigma^m\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.}$$

$$\Sigma^m\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{h^m}\int^{m-2}u\,dx^{m-2} - \alpha h\Sigma^m\frac{d^3u}{dx^3} - \beta h\Sigma^m\frac{d^4u}{dx^4} + \text{etc.}$$

etc.

à l'aide desquelles on chassera $\Sigma^m\frac{du}{dx}$, $\Sigma^m\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. de l'expression de Σu. L'équation finale pourra être représentée par

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m}\int^m u dx^m + \frac{A}{h^{m-1}}\int^{m-1}u dx^{m-1} + \frac{B}{h^{m-2}}\int^{m-2}u dx^{m-2} \ldots + \frac{M}{h}\int u dx$$
$$+ Nu + Ph\frac{du}{dx} + Qh^2\frac{d^2u}{dx^2} + \text{etc.}$$

et deviendra

$$\frac{1}{(e^h-1)^m} = \frac{1}{h^m} + \frac{A}{h^{m-1}} + \frac{B}{h^{m-2}} \ldots\ldots + \frac{M}{h}$$
$$+ N + Ph + Qh^2 + \text{etc.}$$

les coefficiens A, B, ... M, N, etc. sont donc encore ici

ceux qui multiplient les puissances de h dans le développement de $\frac{1}{(e^h-1)^m}$; et déjà nous ne pouvons nous empêcher de remarquer, entre les intégrales et les puissances négatives, une analogie qui n'est que la continuation de celle que les différences ont avec les puissances positives: en sorte que l'on peut regarder les intégrales comme des différences d'un ordre dont l'exposant est négatif. Il est visible en effet que d'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h}-1\right)^m},$$

pourvu qu'après le développement on change les puissances positives $\frac{du^p}{dx^p}$ en $\frac{d^p u}{dx^p}$, et les puissances négatives $\frac{du^{-p}}{dx^{-p}}$ en $\int^p u\,dx^p$; et puisque l'on a (n°. 864),

$$\Delta^m u = \left(e^{\frac{du}{dx}h}-1\right)^m,$$

il est évident que l'expression de $\Sigma^m u$ est comprise dans celle de $\Delta^m u$, dont elle se déduit en affectant l'exposant m du signe —.

915. Toute fonction qui pourra se réduire à une suite de termes contenant des puissances entières, soit positives, soit négatives, de Δu et de Σu, sera nécessairement égale à une pareille fonction de $e^{\frac{du}{dx}h}-1$, pourvu qu'en développant les deux membres on transporte aux caractéristiques Δ et d les exposans des puissances de Δu et de du, et qu'on change en intégrales celles qui répondront à des exposans négatifs. On doit conclure de ceci: 1°. que l'équation

$$\{\log(1+\Delta u)\}^m = \{\log(1+e^{\frac{du}{dx}h}-1)\}^m$$

aura également lieu de quelque signe que soit affecté l'exposant m, et comme elle se réduit à

$$\{\log(1+\Delta u)\}^m = h^m \frac{du^m}{dx^m},$$

on aura, si m est négatif,

$$\frac{1}{\{\log(1+\Delta u)\}^m} = \frac{1}{h^m}\int^m u\,dx^m;$$

et déjà dans le cas de m positif nous avons eu,

$$\{\log(1+\Delta u)\}^m = h^m \frac{d^m u}{dx^m} \text{ (n°. 867).}$$

2°. L'équation évidente

$$(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}} = (1+e^{\frac{du}{dx}h}-1)^{\frac{h'}{h}} = e^{\frac{du}{dx}h'},$$

qui donne

$$\{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}-1\}^m = \{e^{\frac{du}{dx}h'}-1\}^m,$$

et d'où nous avons tiré

$$\Delta'^m u = \{e^{\frac{du}{dx}h'}-1\}^m \text{ (n°. 873),}$$

pour l'expression de la différence de la fonction u, prise en supposant que x varie de h', subsiste encore dans le cas où m est négatif, et conduit alors à

$$\Sigma'^m u = \frac{1}{\{e^{\frac{du}{dx}h'}-1\}^m},$$

Σ' représentant ici l'intégrale de la fonction u, quand la différence de x est h'. De cette équation et de la précédente, on déduit celles-ci :

$$\Delta'^m u = \{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}-1\}^m$$

$$\Sigma'^m u = \frac{1}{\{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}-1\}^m},$$

qui ne sont à proprement parler que deux cas de la même équation; l'un se rapporte à l'exposant $+m$ et l'autre à l'exposant $-m$.

Léibnitz remarqua le premier sur les différentielles des produits de plusieurs variables l'analogie qu'elles ont avec les puissances; il montra bientôt après que les intégrales en avoient une semblable avec les puissances négatives. Cette connoissance demeura stérile jusqu'au mémoire que Lagrange publia sur ce sujet en 1772; il généralisa les idées de Léibnitz, les étendit aux différences, et en déduisit les formules qu'on vient de rapporter; mais ces formules n'étoient encore que les résultats d'une induction, à la vérité très-fine,

fine, et l'Auteur les regardoit comme très-difficiles à prouver directement, lorsque Laplace en donna, dans le septième volume des Savans étrangers, des démonstrations qui réunissent l'élégance à la simplicité ; il ajouta quelque chose à ce travail en 1777 : c'est ce dernier Mémoire que j'ai suivi dans ce qui précède. On verra dans le Chapitre II, ces mêmes formules faire partie d'une Théorie complète des suites, due entièrement à Laplace ; mais dès à présent il paroîtra sans doute que l'analogie des puissances avec les différences est précieuse pour trouver, retenir et généraliser des expressions qui coûteroient beaucoup de peine par d'autres méthodes.

916. La formule $\Sigma^m u = \dfrac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m}$ se développera par le procédé dont on a fait usage dans le n°. 866, à l'égard de la fonction $(e^\alpha - 1)^n$, et l'on aura les relations des coefficiens des puissances de la quantité $\frac{du}{dx}h$, qui tient ici la place de α, en écrivant $-m$, au lieu de n, dans les équations de la page 17. Il vient par cette opération

$$A' = -\frac{1}{2}m$$

$$2A'' = -\frac{1}{2}(m-1)A' + \frac{1}{2.3}m$$

$$3A''' = -\frac{1}{2}(m-2)A'' + \frac{1}{2.3}(m-1)A' - \frac{1}{2.3.4}m$$

$$4A^{IV} = -\frac{1}{2}(m-3)A''' + \frac{1}{2.3}(m-2)A'' - \frac{1}{2.3.4}(m-1)A' + \frac{1}{2.3.4.5}m$$

etc.

et on a par conséquent

$$\frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}h} - 1\right)^m} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-m}h^{-m} + A'\left(\frac{du}{dx}\right)^{-m+1}h^{-m+1} + A''\left(\frac{du}{dx}\right)^{-m+2}h^{-m+2} + \text{etc.}$$

changeant les puissances négatives en intégrale, d'après la règle prescrite dans le n°. 914, il en résultera

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m}\int^m u dx^m + \frac{A'}{h^{m-1}}\int^{m-1} u dx^{m-1} + \frac{A''}{h^{m-2}}\int^{m-2} u\, dx^{m-2} + \text{etc.}$$

Si l'on change le signe des coefficiens affectés d'un nombre impair d'accens, ou qu'on écrive

$$\Sigma^m u = \frac{1}{h^m}\int^m u\,dx^m - \frac{A'}{h^{m-1}}\int^{m-1} u\,dx^{m-1} + \frac{A''}{h^{m-2}}\int^{m-2} u\,dx^{m-2}$$
$$- \frac{A'''}{h^{m-3}}\int^{m-3} u\,dx^{m-3} + \text{etc.}$$

les lettres A', A'', A''', etc. dépendront alors de ces équations :

$$A' = \frac{1}{1}m$$
$$2A'' = \frac{1}{2}(m-1)A' + \frac{1}{2.3}m$$
$$3A''' = \frac{1}{2}(m-2)A'' + \frac{1}{2.3}(m-1)A' + \frac{1}{2.3.4}m$$
$$4A^{IV} = \frac{1}{2}(m-3)A''' + \frac{1}{2.3}(m-2)A'' + \frac{1}{2.3.4}(m-1)A' + \frac{1}{2.3.4.5}m$$

etc.

917. Examinons en particulier le cas où $m=1$, dans lequel on a

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - A'u + A''\frac{du}{dx}h - A'''\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \text{etc.}$$

en observant que le terme $-A'\int^{m-1} u\,dx^{m-1}$ devient

$$-A'\int^{1-1} u\,dx^{1-1} = -A'\int^0 u\,dx^0 = -A'u.$$

Les coefficiens A', A'', A''', etc. donnés alors par les équations

$$A' = \frac{1}{2}$$
$$2A'' = \frac{1}{2.3}$$
$$3A''' = -\frac{1}{2}A'' + \frac{1}{2.3.4}$$
$$4A^{IV} = -\frac{2}{2}A''' - \frac{1}{2.3}A'' + \frac{1}{2.3.4.5}$$
$$5A^{V} = -\frac{3}{2}A^{IV} - \frac{2}{2.3}A''' - \frac{1}{2.3.4}A'' + \frac{1}{2.3.4.5.6}$$

etc.

s'évanouissent de deux en deux, en commençant au troisième ;

c'est-à-dire, qu'on trouve $A'''=0$, $A^{v}=0$, $A^{vii}=0$, et qu'on a par conséquent

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - \frac{1}{2}u + A''\frac{du}{dx}h - A^{iv}\frac{d^3u}{dx}h^3 + A^{vi}\frac{d^5u}{dx}h^5 - \text{etc.}$$

918. On s'est beaucoup occupé de la recherche des coefficiens numériques de la valeur de Σu, etc. voici comment Laplace est parvenu à l'expression générale de l'un quelconque, indépendamment de tous ceux qui le précèdent. On a premièrement

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{A}{h} + A_1 + A_2 h + A_3 h^2 + A_4 h^3 + \text{etc.}$$

en multipliant les deux membres par h, il viendra

$$\frac{h}{e^h - 1} = A + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \text{etc.}$$

Cette série étant ordonnée suivant les puissances entières et positives de h, il résulte du théorème de Taylor que

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots.n} \cdot \frac{d^n \left\{\frac{h}{e^h - 1}\right\}}{dh^n},$$

en observant de faire $h=0$, après les différentiations; cependant si l'on effectue les calculs indiqués, les valeurs A, A_1, A_2, etc. se présenteront toutes sous la forme de $\frac{0}{0}$: Laplace a évité cette difficulté par un artifice d'analyse très-ingénieux. La fraction

$$\frac{h}{e^h - 1} = \frac{h}{(e^{\frac{1}{2}h} - 1)(e^{\frac{1}{2}h} + 1)}$$ se décompose en $\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h} - 1} - \frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h} + 1}$;

de plus, il est visible que lorsqu'on fait $h=0$, on a

$$\frac{d^q \left\{\frac{ph}{e^{ph} \pm 1}\right\}}{(p\,dh)^q} = \frac{d^q \left\{\frac{h}{e^h \pm 1}\right\}}{dh^q},$$

puisqu'il est indifférent d'écrire, au lieu de la quantité h, son multiple ph qui s'évanouit en même tems qu'elle. On tire de là, toujours dans l'hypothèse de $h=0$,

$$\frac{d^q \left\{\frac{ph}{e^{ph} \pm 1}\right\}}{dh^q} = p^q \frac{d^q \left\{\frac{h}{e^h \pm 1}\right\}}{dh^q};$$

en faisant $p=\frac{1}{2}$ et $q=n$, on aura donc

$$\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}\right\}}{dh^n}-\frac{d^n\left\{\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right\}}{dh^n}=$$

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n}-\frac{1}{2^n}\,\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h+1}\right\}}{dh^n}=\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n}=-\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h+1}\right\}}{dh^n},$$

équation dont le second membre ne devient plus $\frac{0}{0}$, quand on y met o pour h.

Si l'on donne à $\frac{h}{e^h+1}$ la forme $h(e^h+1)^{-1}$, on obtiendra par la formule du n°. 107,

$$d^n\{h(e^h+1)^{-1}\}=d^n h(e^h+1)^{-1}+n\,d^{n-1}h\,d.(e^h+1)^{-1}\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+n\,dh\,d^{n-1}.(e^h+1)^{-1}+h\,d^n.(e^h+1)^{-1};$$

la différentielle dh étant prise pour constante, il ne reste que les deux derniers termes du second membre, et la supposition de $h=0$ fait encore disparoître le dernier, en sorte qu'on a seulement

$$d^n\{h(e^h+1)^{-1}\}=n\,dh\,d^{n-1}.(e^h+1)^{-1},$$

lorsque $h=0$, ce qui donne

$$\frac{d^n\left\{\frac{h}{e^h-1}\right\}}{dh^n}=-\frac{n}{2^n-1}\cdot\frac{d^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{dh^{n-1}}=-\frac{n}{2^n-1}\,\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}$$

et par conséquent $A_n=\dfrac{-1}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)(2^n-1)}\,\dfrac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}$.

Si maintenant on calcule les différentielles successives de la quantité $\frac{1}{e^h+1}$, pour en connoître la loi, on trouvera

$$\frac{d\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh}=\frac{-e^h}{(e^h+1)^2},\qquad \frac{d^2\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^2}=\frac{e^{2h}-e^h}{(e^h+1)^3},\ \text{etc.}$$

et l'on en conclura que l'on doit avoir en général

$$\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}=\frac{B_1 e^{(n-1)h}+B_2 e^{(n-2)h}+B_3 e^{(n-3)h}\ldots+\text{etc.}}{(e^h+1)^n},$$

B_1, B_2, B_3, etc. désignant des coefficiens numériques indépendans de h. Il est d'ailleurs évident que le numérateur de cette fraction ne doit contenir que des puissances positives de e^h, et que par conséquent le second membre de l'équation

$$(e^h+1)^n.\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}=B_1 e^{(n-1)h}+B_2 e^{(n-2)h}+B_3 e^{(n-3)h}\ldots+B_{n-1}e^h$$

doit s'arrêter à $B_{n-1}e^h$; d'où il suit que si on développe le premier en une série descendante, ordonnée suivant les puissances de e^h, cette série doit aussi se terminer à e^h. Or on a

$$(e^h+1)^{-1}=e^{-h}(1+e^{-h})^{-1}=e^{-h}-e^{-2h}+e^{-3h}-e^{-4h}+\text{etc.}$$
$$\frac{d^{n-1}(e^h+1)^{-1}}{dh^{n-1}}=\mp\{e^{-h}-2^{n-1}e^{-2h}+3^{n-1}e^{-3h}-4^{n-1}e^{-4h}+\text{etc.}\};$$

le signe — se rapportant au cas où n est pair et le signe + à celui où il est impair; on obtiendra donc

$$\begin{aligned}&\mp(e^h+1)^n\{e^{-h}-2^{n-1}e^{-2h}+3^{n-1}e^{-3h}-4^{n-1}e^{-4h}+\text{etc.}\}\\&=B_1 e^{(n-1)h}+B_2 e^{(n-2)h}+B_3 e^{(n-3)h}\ldots+B_{n-1}e^h,\end{aligned}$$

en observant de s'arrêter dans le développement du premier membre au terme multiplié par e^h, parce que tous les autres doivent évidemment s'évanouir. D'après cette remarque, il viendra

$$(e^h+1)^n\,\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^{n-1}}=$$

$$\mp\left\{\begin{aligned}&e^{(n-1)h}-e^{(n-2)h}\{2^{n-1}-n\}+e^{(n-3)h}\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}\\&-e^{(n-4)h}\left\{4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

Si l'on divise les deux membres de cette équation par $(e^h+1)^n$, qu'on fasse ensuite $h=0$, dans le second, il en résultera

$$\frac{d^{n-1}\left\{\frac{1}{e^h+1}\right\}}{dh^n}=\mp\frac{1}{2^n}\left\{\begin{array}{l}1-\{2^{n-1}-n\}+\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}\\ -\left\{4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

et enfin

$$A_n=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(n-1)(2^n-1)2^n}\left\{\begin{array}{l}1-\{2^{n-1}-n\}+\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}\ldots\ldots\ldots\\ \pm\left\{(n-1)^{n-1}-(n-2)^{n-1}n+(n-3)^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\text{etc.}\right\}\end{array}\right\}.$$

Il ne faut pas oublier que le signe supérieur convient au cas où n est pair, et le signe inférieur a lieu dans le cas contraire.

Cette valeur ne peut être employée que quand $n>1$, car elle devient infinie lorsque $n=1$; et on prouve avec la plus grande facilité qu'elle s'évanouit dans tous les cas où n est impair. En effet, par la formation des différences successives (n°. 860), et en mettant à part les termes dans lesquels les facteurs de la forme $(n-i)^{n-1}$ deviennent de celle-ci $(-p)^{n-1}$, parce que i l'emporte sur n, on a

$$\Delta^n.(n-1)^{n-1}=\left.\begin{array}{l}(n-1)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1}\ldots\ldots\\ \mp n(n-n)^{n-1}\pm(n-n-1)^{n-1}\end{array}\right\}=$$

$$=(n-1)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1}\ldots\ldots\pm(-1)^{n-1}$$

$$\Delta^n.(n-2)^{n-1}=(n-2)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-3)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1}\ldots\mp\{n(-1)^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$$

$$\Delta^n.(n-3)^{n-1}=(n-3)^{n-1}-\frac{n}{1}(n-4)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1}\ldots\pm\left\{\frac{n(n-1)}{1.2}(-1)^{n-1}-(-2)^{n-1}+(-3)^{n-1}\right\}$$

etc.

mais comme il résulte de la formule du n°. 864, qu'en général $\Delta^n.x^{n-1}=0$, les premiers membres des équations ci-dessus s'évanouissent, et les seconds donnent alors

$$(n-1)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} \ldots = 1$$

$$(n-2)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} \ldots = 2^{n-1} - n$$

$$(n-3)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} \ldots = 3^{n-1} - 2^{n-1}n + \frac{n(n-1)}{1.2},$$

en ne comprenant dans les premiers membres de chacune de ces dernières équations que les termes où la quantité $n-i$ est positive entre les parenthèses des puissances $n-1$. Cela posé, il est évident que le numérateur de l'expression de A_n renferme un nombre pair de termes lorsque n est impair; si l'on substitue à la place de la première moitié de ces termes, qui forment les seconds membres des équations précédentes, leurs valeurs, et que l'on fasse attention aux signes de la seconde moitié qui se déduisent de celui du dernier terme, on aura le résultat suivant:

$$(n-1)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} - \ldots$$

$$-(n-2)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} + \ldots$$

$$+(n-3)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(n-3)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-4)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-5)^{n-1} + \ldots$$

$$+(n-2)^{n-1} - \frac{n}{1}(n-3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1} - \ldots$$

$$-(n-1)^{n-1} + \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1} + \ldots$$

dans lequel les lignes placées à égale distance de la première et de la dernière sont composées de mêmes termes, mais pris avec un signe contraire; or le nombre de ces lignes étant pair, leur assemblage sera identiquement nul; ainsi $A_n = 0$, lorsque n est impair.

Lorsque n est pair, le numérateur de A_n a un terme moyen exprimé par $\pm\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1} - \text{etc.}\right\}$,

et ceux qui sont placés à égale distance des termes extrêmes sont affectés du même signe, en sorte que si l'on met à la place du dernier, et de ceux qui le précèdent, jusqu'au terme moyen exclusivement, les expressions équivalentes

$$1,\quad 2^{n-1}-n,\quad 3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{2},\ \text{etc.}$$

il viendra, en réunissant les termes semblables placés à égale distance avant et après le terme moyen,

$$\begin{array}{l} 2.1 \\ -2\{2^{n-1}-n\} \\ +2\left\{3^{n-1}-2^{n-1}\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mp 2\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}-\frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-3\right)^{n-1}-\ldots\ldots\right\} \\ \pm\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}-\frac{n}{1}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n}{2}-2\right)^{n-1}-\ldots\ldots\right\}; \end{array}$$

le signe supérieur ayant lieu quand $\frac{n}{2}$ est impair, et le signe inférieur lorsque ce nombre est pair. Soit fait $\frac{n}{2}=p$, et concevons qu'après la substitution on divise par 2 le numérateur et le dénominateur de A_n, on aura

$$A_{2p}=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(2p-1)(2^{2p}-1)2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left\{p^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-1)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-2)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\ -\left\{(p-1)^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-2)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-3)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\ +\left\{(p-2)^{2p-1}-\frac{2p}{1}(p-3)^{2p-1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}(p-4)^{2p-1}-\text{etc.}\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

ce résultat étant ordonné par rapport aux puissances de p, $p-1$, $p-2$, etc. prendra la forme

$$A_{2p}=\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(2p-1)(2^{2p}-1)2^{2p-1}}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}p^{2p-1}-(p-1)^{2p-1}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2p}{1}\right\}+(p-2)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)}{1.2}\right\} \\ \quad-(p-3)^{2p-1}\left\{1+\frac{2p}{1}+\frac{2p(2p-1)}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}\right\} \\ \quad+\text{etc.} \end{array}\right.$$

Telle

Telle est l'expression du coefficient du terme général de la suite

$$\frac{1}{e^h-1}=\frac{1}{h}\{A+A_1h+A_2h^2+A_4h^4+A_6h^6\ldots\ldots+A_{2p}h^{2p}+\text{etc.}\},$$

d'après laquelle on forme celle-ci :

$$\Sigma u=\frac{1}{h}A\int u\,dx+A_1u+A_2\frac{du}{dx}h+A_4\frac{d^3u}{dx^3}h^3+A_6\frac{d^5u}{dx^5}h^5\ldots+A_{2p}\frac{d^{2p-1}u}{dx^{2p-1}}h^{2p-1}+\text{etc.}$$

919. Si l'on fait $u=x^m$ dans la formule de l'article précédent, on aura

$$\Sigma.x^m=A\frac{x^{m+1}}{(m+1)h}+A_1x^m+A_2mx^{m-1}h+A_4m(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3$$
$$+A_6m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5}h^5+\text{etc.}$$

La série s'arrêtera toutes les fois que l'exposant m sera entier et positif ; le dernier terme sera

$$A_m\,m(m-1)(m-2)\ldots\ldots2.x\,h^{m-1},$$

si m est pair, et

$$A_{m+1}m(m-1)(m-2)\ldots\ldots1.h^m,$$

si ce nombre est impair.

En rapprochant ce résultat de celui que nous avons rapporté dans le n°. 898, on reconnoîtra l'accord qui règne entre l'un et l'autre. Si on désigne par $3B_1$, $5B_3$, $7B_5$, $9B_7$, $11B_9$, les nombres absolus, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, etc. qui multiplient les termes de l'expression de la page 70, à partir du troisième terme, on aura

$$\left.\begin{aligned}A_2&=3B_1.\frac{1}{2.3}\\A_4&=-5B_3.\frac{1}{2.3.4.5}\\A_6&=7B_5.\frac{1}{2.3.4.5.6.7}\\A_8&=-9B_7.\frac{1}{2.3.4.5.7.8.9}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\A_{2p}&=\pm(2p+1)B_{2p-1}\frac{1}{2.3.4\ldots(2p+1)}\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned}B_1&=2A_2\\B_3&=-2.3.4A_4\\B_5&=2.3.4.5.6A_6\\B_7&=-2.3.4.5.6.7.8A_8\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\B_{2p-1}&=\pm2.3.4\ldots2pA_{2p}\end{aligned}\right.$$

et comme la formation des coefficiens A, A_1, A_2, A_4, etc. est connue ;

celle des nombres B_1, B_3, etc. le sera pareillement. Il est visible qu'on peut donner à l'expression de $\Sigma . x^m$ cette forme :

$$\Sigma . x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2}x^m + B_1 \frac{m}{2} x^{m-1}h - B_3 \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4} x^{m-3}h^3 + B_5 \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6} x^{m-5}h^5 - \text{etc.}$$

dans laquelle

$$B_1 = \tfrac{1}{6}, \quad B_3 = \tfrac{1}{30}; \quad B_5 = \tfrac{1}{42}, \quad B_7 = \tfrac{1}{30}, \quad B_9 = \tfrac{5}{66}, \text{ etc.}$$

Ces derniers nombres ont été remarqués d'abord par Jacques Bernoulli, qui donna le premier l'expression de la somme de la suite $1^m, 2^m, 3^m, \ldots x^m$; mais il n'en connut pas la loi ; Moivre, dans ses *Miscellanea analytica*, indiqua la suivante :

$$B_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}$$

$$-B_3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{4}{2}B_1$$

$$B_5 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{7} - \tfrac{4}{2}B_1 - \frac{6.5.4}{2.3.4}(-B_3)$$

$$-B_7 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{8}{2}B_1 - \frac{8.7.6}{2.3.4}(-B_3) - \frac{8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6}B$$

$$B_9 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{11} - \tfrac{10}{2}B_1 - \frac{10.9.8}{2.3.4}(-B_3) - \frac{10.9.8.7.6}{2.3.4.5.6}.B_5 - \frac{10.9.8.7.6.5.4}{2.3.4.5.6.7.8}(-B_7)$$

etc.

Euler trouva d'autres relations très-élégantes entre les nombres B_1, B_3, B_5, etc. qu'il nomma nombres de Bernoulli (*numeri Bernoulliani*) ; mais il n'en découvrit point encore le terme général qui se déduit facilement de l'expression de A_{2p} ; car de l'équation

$$B_{2p-1} = \pm 2.3.4\ldots.2pA_{2p},$$

il résulte $B_{2p-1} =$

$$\frac{2p}{(2^{2p}-1)\,2^{2p-1}} \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}p^{2p-1} - (p-1)^{2p-1}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\frac{2p}{1}\right\} + (p-2)^{2p-1}\left\{+\frac{2p}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{2p(2p-1)}{1.2}\right\} \\ \quad - (p-3)^{2p-1}\left\{1 + \frac{2p}{1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} + \tfrac{1}{2}\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}\right\} \\ \quad + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Exprimée par les nombres B_1, B_3, etc. la valeur de Σu devient

$$\Sigma u = \frac{1}{h}\int u\,dx - \frac{1}{2}u + B_1\frac{du}{dx}\frac{h}{2} - B_3\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3.4} + B_5\frac{d^5u}{dx^5}\frac{h^5}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

920. L'intégrale $\int u\,dx$ qui entre dans la formule précédente, pourroit en être chassée au moyen de la série

$$\int u\,dx = ux - \frac{du}{dx}\frac{x^2}{2} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{x^3}{2.3} - \text{etc. (n°. 485)},$$

qui s'arrête aussi lorsque la fonction u a dans un ordre quelconque des différences constantes; mais on parvient directement à une expression délivrée du signe $\int$, par le moyen du théorême de Taylor qui, pour les quantités u_{-1}, u_{-2}, $u_{-3} \ldots u_{-n}$, antécédentes à u, donne les séries

$$u - \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$u - 2\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + 4\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - 9\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + 16\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u - n\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + n^2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - n^3\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + n^4\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

En ajoutant toutes ces valeurs ensemble, on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma u = nu &- (1 + 2 + 3 \ldots + n)\frac{du}{dx}\frac{h}{1} \\ &+ (1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2)\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \\ &- (1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3)\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} \\ &+ (1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots + n^4)\frac{d^4u}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} \\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

désignant par Sn, Sn^2, Sn^3, etc. les sommes des puissances des termes de la série $1, 2, 3, \ldots n$, on obtient cette formule

$$\Sigma u = nu - Sn.\frac{du}{dx}\frac{h}{1} + Sn^2.\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - Sn^3.\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et on a pour déterminer Sn, Sn^2, Sn^3, etc. les équations

$$Sn = \Sigma n + n,\ Sn^2 = \Sigma n^2 + n^2,\ Sn^3 = \Sigma n^3 + n^3, \text{ etc. (n°. 897).}$$

On rendra semblables entr'eux tous les termes de cette expression de Σu, en observant que $n = Sn^0$, et on aura

$$\Sigma u = Sn^0 . u - Sn . \frac{du}{dx} \frac{h}{1} + Sn^2 . \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - Sn^3 . \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

921. Si on rapproche cette formule de celle du n°. 919, on en déduira l'expression suivante :

$$\frac{1}{h}\int u\,dx = (Sn^0 + \tfrac{1}{2})u - (Sn + \tfrac{1}{2}B_1)\frac{h}{1}\frac{du}{dx} + Sn . \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$-(Sn^3 - \tfrac{1}{4}B_3)\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3} + Sn^4 . \frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{d^4u}{dx^4} - (Sn^5 + \tfrac{1}{6}B_5)\frac{h^5}{1.2.3.4.5}\frac{d^5u}{dx^5} + \text{etc.}$$

qui peut servir à calculer les valeurs approchées des intégrales, et qui se change en

$$\int u\,dx = (Sx^0 + \tfrac{1}{2})u - (Sx + \tfrac{1}{2}B_1)\frac{du}{dx} + Sx^2 . \frac{d^2u}{2.dx^2}$$
$$-(Sx^3 - \tfrac{1}{4}B_3)\frac{d^3u}{2.3dx^3} + Sx^4 . \frac{d^4u}{2.3.4dx^4} - (Sx^5 + \tfrac{1}{6}B^5)\frac{d^5u}{2.3.4.5dx^5} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

quand on fait $h = 1$, et que l'on part de l'origine des x.

On trouve une autre expression de $\int u\,dx$, qui ne dépend que des différences, en mettant dans le développement de l'équation

$$\frac{1}{h}\int u\,dx = \frac{1}{\log.(1 + \Delta u)},$$

au lieu de Σu la valeur obtenue, n°. 912. En effet, cette équation donne par le changement de Δu^{-1} en Σu et de Δu^0 en u,

$$\frac{1}{h}\int u\,dx = \Sigma u + C_1 u + C_2 \Delta u + C_3 \Delta^2 u + \text{etc.}$$

C_1, C_2, C_3, etc. désignant des coefficiens numériques faciles à obtenir, puisque ce sont ceux des puissances de Δu dans le polynome

$$\{1 - \tfrac{1}{2}\Delta u + \tfrac{1}{3}\Delta u^2 - \tfrac{1}{4}\Delta u^3 + \text{etc.}\}^{-1}.$$

Cela posé, si l'on chasse Σu par le moyen de la formule citée, il viendra, en prenant $h = 1$, ce qui rend $x' = x$, et se servant

pour abréger, de la notation de Vandermonde (n°. 902),

$$\int u\,dx = (C_1 + x)u + (C_2 - [0]^{-2}[x+1]^{2})\Delta u + (C_3 + [0]^{-3}[x+2]^{3})\Delta^2 u + (C_4 - [0]^{-4}[x+3]^{4})\Delta^3 u + \text{etc.}$$

Cette formule qui a été remarquée en premier lieu par Lorgna, peut être fort utile pour obtenir des valeurs approchées de $\int u\,dx$ par les différences de u, ou les aires des courbes par les différences de leurs ordonnées équidistantes.

922. On étend sans peine l'expression de Σu donnée dans le n°. 919, au cas où l'on a $u = a^x y$, y étant une fonction quelconque de x, parce qu'en intégrant par parties, d'après la formule du n°. 910, on trouve $\Sigma a^x y = \frac{a^x y - a^h \Sigma a^x \Delta y}{a^h - 1}$; substituant pour Δy la série qui l'exprime, il vient

$$(a^h - 1)\Sigma a^x y = a^x y - a^h \left\{ \frac{h}{1}\Sigma a^x \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\}$$

Si, à la place de y, on met successivement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. on trouvera les équations

$$(a^h - 1)\Sigma a^x \frac{dy}{dx} = a^x \frac{dy}{dx} - a^h \left\{ \frac{h}{1}\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^2}{1.2}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\}$$

$$(a^h - 1)\Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2} = a^x \frac{d^2y}{dx^2} - a^h \left\{ \frac{h}{1}\Sigma a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.} \right\}$$

etc.

avec le secours desquelles on éliminera les intégrales

$$\Sigma a^x \frac{dy}{dx}, \quad \Sigma a^x \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

Il est visible que le résultat sera de la forme

$$(a^h - 1)\Sigma a^x y = a^x y + Aha^x \frac{dy}{dx} + Bh^2 a^x \frac{d^2y}{dx^2} + Ch^3 a^x \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

Euler détermine les coefficiens A, B, C, etc. en substituant dans cette dernière équation les valeurs de $a^x y$, $a^x \frac{dy}{dx}$, $a^x \frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

prises dans les précédentes. Par ce moyen on obtient l'équation

$$(a^h-1)\Sigma a^x y=(a^h-1)\Sigma a^x y+\frac{a^h h}{1}\Sigma a^x\frac{dy}{dx}+\frac{a^h h^2}{1.2}\Sigma a^x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a^h h^3}{1.2.3}\Sigma a^x\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+A(a^h-1)h\Sigma a^x\frac{dy}{dx}+\frac{Aa^h h^2}{1}\Sigma a^x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Aa^h h^3}{1.2}\Sigma a^x\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+B(a^h-1)h^2\Sigma a^x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Ba^h h^3}{1}\Sigma a^x\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+C(a^h-1)h^3\Sigma a^x\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$+\text{etc.}$$

qui, devant être identique, donne

$$A(a^h-1)+a^h=0$$
$$B(a^h-1)+\frac{1}{1}Aa^h+\frac{a^h}{1.2}=0$$
$$(a^h-1)+\frac{1}{1}Ba^h+\frac{1}{1.2}Aa^h+\frac{a^h}{1.2.3}=0$$
$$D(a^h-1)+\frac{1}{1}Ca^h+\frac{1}{1.2}Ba^h+\frac{1}{1.2.3}Aa^h+\frac{a^h}{1.2.3.4}=0$$

etc.

C'est par ce procédé qu'Euler détermine aussi les coefficiens de la formule du n°. 913, et l'on voit aisément qu'il peut s'employer également pour parvenir à la formule du n°. 864.

923. Si dans l'expression

$$\Sigma PQ=Q\Sigma P-\Delta Q\Sigma^2 P_1+\Delta^2 Q\Sigma^3 P_2-\Delta^3 Q\Sigma^4 P_3+\text{etc.}$$

obtenue n°. 910, on remplace les différences de la fonction Q par leurs valeurs en séries, formées d'après le n°. 864, et que nous représenterons pour abréger par

$$\Delta Q=h\frac{dQ}{dx}+\alpha h^2\frac{d^2Q}{dx^2}+\beta h^3\frac{d^3Q}{dx^3}+\text{etc.}$$
$$\Delta^2 Q=h^2\frac{d^2Q}{dx^2}+\alpha' h^3\frac{d^3Q}{dx^3}+\beta' h^4\frac{d^4Q}{dx^4}+\text{etc.}$$
$$\Delta^3 Q=h^3\frac{d^3Q}{dx^3}+\alpha'' h^4\frac{d^4Q}{dx^4}+\beta'' h^5\frac{d^5Q}{dx^5}+\text{etc.}$$

on aura

$$\Sigma P\,Q = Q\,\Sigma P - \frac{dQ}{dx}h\,\Sigma^2 P_1 + \frac{d^2Q}{dx^2}h^2(\Sigma^3 P_2 - \alpha\,\Sigma^2 P_1)$$
$$-\frac{d^3Q}{dx^3}h^3(\Sigma^4 P_3 - \alpha'\Sigma^3 P_2 + \beta\,\Sigma^2 P_1) + \text{etc.}$$

Examinons en particulier le cas où $P = a^x$; il viendra pour ce cas

$$\Sigma P = \frac{a^x}{a^h - 1},\quad \Sigma^2 P_1 = \Sigma^2 a^{x+h} = \frac{a^{x+h}}{(a^h-1)^2},\quad \Sigma^3 P_2 = \Sigma^3 a^{x+2h} = \frac{a^{x+2h}}{(a^h-1)^3},\ \text{etc.}$$

et par conséquent

$$\Sigma a^x Q = \frac{a^x Q}{a^h - 1} - a^x\frac{dQ}{dx}\,\frac{a^h h}{(a^h-1)^2} + a^x\frac{d^2Q}{dx^2}\left\{\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} - \alpha\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^2$$
$$-a^x\frac{d^3Q}{dx^3}\left\{\frac{a^{3h}}{(a^h-1)^4} - \alpha'\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} + \beta\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^3 + \text{etc.}$$

formule qui rentre dans celle du n°. précédent, lorsqu'on y substitue les valeurs des coefficiens α, β, ... α', β', etc.

En faisant usage dans le cas actuel, ainsi que dans les précédens, de la considération des exponentielles, il faut prendre $Q = e^x$; il vient alors

$$\Sigma a^x Q = \Sigma a^x e^x = \Sigma e^{x(1+la)} = \frac{e^{x(1+la)}}{e^{h(1+la)} - 1} = \frac{a^x e^x}{a^h e^h - 1},$$

et dans la même hypothèse la série qui exprime $\Sigma a^x Q$ devenant divisible par $a^x e^x$, on a

$$\frac{1}{a^h e^h - 1} = \frac{1}{a^h - 1} - \frac{a^h h}{(a^h-1)^2} + \left\{\frac{a^{2h}}{(a^h-1)^3} - \frac{\alpha\,a^h}{(a^h-1)^2}\right\}h^2$$
$$-\left\{\frac{a^{3h}}{(a^h-1)^4} - \frac{\alpha' a^{2h}}{(a^h-1)^3} + \frac{\beta\,a^h}{(a^h-1)^2}\right\} + \text{etc.}$$

équation dont le second membre peut être mis sous la forme

$$\frac{1}{a^h - 1} - \frac{a^h h}{(a^h-1)^2} + \left\{\frac{A a^h + A_1 a^{2h}}{(a^h-1)^3}\right\}h^2 - \left\{\frac{A' a^h + A'_1 a^{2h} + A'_2 a^{3h}}{(a^h-1)^4}\right\} + \text{etc.}$$

Il reste maintenant à développer le premier sous une forme analogue; pour y parvenir, il faut remarquer que

$$\frac{1}{a^h e^h - 1} = \frac{1}{(a^h - 1)e^h + (e^h - 1)} = \frac{e^{-h}}{(a^h-1) - (e^{-h} - 1)},$$

parce qu'il en résulte

$$\frac{e^{-h}}{(a^h-1)-(e^{-h}-1)}=e^{-h}\left\{\frac{1}{(a^h-1)}+\frac{e^{-h}-1}{(a^h-1)^2}+\frac{(e^{-h}-1)^2}{(a^h-1)^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$=\left\{1-\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1.2}-\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right\}\left\{\frac{1}{a^h-1}-\frac{h\left\{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2.3}-\frac{h^3}{2.3.4}+\text{etc.}\right\}}{(a^h-1)^2}-\right.$$

$$\left.+\frac{h^2\left\{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{2.3}-\frac{h^3}{2.3.4}+\text{etc.}\right\}^2}{(a^h-1)^3}-\text{etc.}\right\},$$

série qui prend évidemment la forme

$$\frac{1}{a^h-1}-\left\{\frac{B}{a^h-1}+\frac{B_1}{(a^h-1)^2}\right\}h+\left\{\frac{B'}{a^h-1}+\frac{B'_1}{(a^h-1)^2}+\frac{B'_2}{(a^h-1)^3}\right\}h^2-\text{etc.}$$

et rentre par conséquent dans celle de la précédente.

Si donc on y change les puissances de h en produits de la forme $h\frac{dQ}{dx}$, $h^2\frac{d^2Q}{dx^2}$, etc. et qu'on la multiplie par a^x, on aura l'expression de $\Sigma a^x Q$; d'où il suit que l'on peut écrire cette équation :

$$\Sigma a^x y = \frac{a^x}{a^h e^{\frac{dy}{dx}h}-1},$$

pourvu qu'on en développe le second membre comme il a été dit ci-dessus ; ce qui s'opérera en faisant pour abréger $\frac{dy}{dx}h=z$, et en réduisant la fonction $\frac{1}{a^h e^z-1}$ en série ascendante suivant les puissances de z.

Le théorême de Taylor s'applique à cette fonction et donne

$$\frac{1}{a^h-1}-\frac{a^h}{(a^h-1)^2}z+\frac{1}{2}\left\{\frac{2a^{2h}}{(a^h-1)^3}-\frac{a^h}{(a^h-1)^2}\right\}z^2-\text{etc.}$$

le coefficient du $n^{ème}$ terme de cette suite, ou de z^{n-1}, sera égal à $\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}\frac{1}{a^h e^z-1}$, en observant de faire $z=0$ après les différentiations ; il se déterminera d'une manière analogue à

à celle dont on a trouvé $d^{n-1}\frac{1}{c^h+1}$ dans le n°. 918. On a en effet

$$d^{n-1}\frac{1}{a^hc^z-1}=\frac{C_1a^{(n-1)h}c^{(n-1)z}+C_2a^{(n-2)h}c^{(n-2)z}+C_3a^{(n-3)h}c^{(n-3)z}\ldots+C_{n-1}c^hc^z}{(a^hc^z-1)^n}$$

$$\frac{1}{a^hc^z-1}=a^{-h}c^{-z}+a^{-2h}c^{-2z}+a^{-3h}c^{-3z}+a^{-4h}c^{-4z}+\text{etc.}$$

par cette dernière série on trouve

$$d^{n-1}\frac{1}{a^hc^z-1}=\mp\{a^{-h}c^{-z}+2^{n-1}a^{-2h}c^{-2h}+3^{n-1}a^{-3h}c^{-3z}+4^{n-1}a^{-4h}c^{-4z}+\text{etc.}\};$$

multipliant le second membre de cette équation par le développement de $(a^hc^z-1)^n$, pour le comparer au numérateur de la première expression de $d^{n-1}\frac{1}{a^hc^z-1}$, on trouvera

$$\mp\left\{\begin{array}{r} a^{(n-1)h}c^{(n-1)z}+2^{n-1}a^{(n-2)h}c^{(n-2)z}+3^{n-1}a^{(n-3)h}c^{(n-3)z}+4^{n-1}a^{(n-4)h}c^{(n-4)z}+\text{etc.} \\ -\,n\,a^{(n-2)h}c^{(n-2)z}-2^{n-1}na^{(n-3)h}c^{(n-3)z}-3^{n-1}na^{(n-4)h}c^{(n-4)z}+\text{etc.} \\ +\frac{n(n-1)}{2}a^{(n-3)h}c^{(n-3)z}+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{2}a^{(n-4)h}c^{(n-4)z}+\text{etc.} \\ -\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{(n-4)h}c^{(n-4)z}-\text{etc.} \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$=C_1a^{(n-1)h}c^{(n-1)z}+C_2a^{(n-2)h}c^{(n-2)z}+C_3a^{(n-3)h}c^{(n-3)z}\ldots+C_{n-1}a^hc^z,$$

d'où on déduira

$$C_1=\mp1,\quad C_2=\mp(2^{n-1}-n),\quad C_3=\mp\left(3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$C_4=\mp\left(4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\right),\ \text{etc.}$$

Faisant ensuite $z=0$, dans l'expression de $d^{n-1}\frac{1}{a^hc^z-1}$, et se rappelant qu'il faut remplacer z^{n-1} par $h^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, on aura pour le terme général de la valeur de Σa^xy, cette formule

$$\mp\frac{\{a^{(n-1)h}+(2^{n-1}-n)a^{(n-2)h}+\left(3^n-2^nn+\frac{n(n-1)}{2}\right)a^{(n-3)h}+\text{etc.}\}}{1.2.3\ldots(n-1)(a^h-1)^n}h^{n-1}a^x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Il est visible que la valeur de $\Sigma a^x y$ sera terminée toutes les fois que y sera une fonction rationnelle et entière de x. Nous n'insisterons sur aucun cas particulier de cette formule, parce qu'il est trop facile de les déduire du cas général ; nous observerons seulement qu'elle ne peut servir quand $a=1$: les dénominateurs des coefficiens s'évanouissent alors comme au commencement du n°. 918, puisqu'on retombe sur l'équation $\Sigma y = \frac{1}{e^{\frac{dy}{dx}h}-1}$.

Nous ferons encore remarquer que l'équation $\Sigma a^x y = \frac{a^x}{a^h e^{\frac{dy}{dx}h}-1}$ n'est qu'un cas particulier de cette autre plus générale :

$$\Sigma^m a^x y = \frac{a^x}{(a^h e^{\frac{dy}{dx}h}-1)^m},$$

donnée en premier lieu par Laplace. On y parviendroit par des considérations analogues à celles dont nous avons fait usage dans le n°. 914 ; mais devant la déduire dans le chapitre suivant de la même source dont ce Géomètre l'a tirée, il seroit superflu de nous y arrêter ici.

924. Nous n'avons donné dans le n°. 912 que l'expression de l'intégrale simple Σu, mais on peut déduire celle de $\Sigma^m u$ de l'équation

$$\Sigma'^m u = \frac{1}{\{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}}-1\}^m} \quad (\text{n}°.\ 915),$$

en y faisant $h'=h$, ce qui change Σ' en Σ, et avec l'attention d'en développer le second membre dans la forme suivante :

$$\frac{1}{\{(1+\Delta u)-1\}^m} = (1+\Delta u)^{-m} + \frac{m}{1}(1+\Delta u)^{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.2}(1+\Delta u)^{-m-2} + \text{etc.}$$

puis d'écrire u, à la place de l'unité qui forme le premier terme de chaque binome et qu'il faut regarder comme tenant la place de $(\Delta u)^0$,

et enfin substituer $\Delta^n u$, au lieu de Δu^n, on obtiendra ainsi

$$\Sigma^m u = \left\{1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \text{etc.}\right\} u$$
$$-\left\{\frac{m}{1} + \frac{m}{1}\,\frac{m+1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2}\,\frac{(m+2)}{1} + \text{etc.}\right\} \Delta u$$
$$+\left\{\frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m}{1}\,\frac{(m+1)(m+2)}{1.2} + \text{etc.}\right\} \Delta^2 u$$
$$-\left\{\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\right\} \Delta^3 u$$
$$+ \text{etc.}$$

Quoique les séries qui multiplient u, Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. dans cette expression, se présentent sous une forme infinie, il faut néanmoins n'en prendre la somme que depuis l'indice $x=0$, jusqu'à l'indice $\frac{x}{h}$. C'est ce dont on peut se convaincre, au moins pour le cas où $m=1$, en comparant le résultat que donne alors la formule ci-dessus, avec celui qu'on déduiroit de ces relations :

$$\Sigma u = u_{-1} + u_{-2} + u_{-3} + u_{-4} + \text{etc}$$
$$= \begin{cases} u - \Delta u + \Delta^2 u - \Delta^3 u + \text{etc.} \\ + u - 2\Delta u + 3\Delta^2 u - 4\Delta^3 u + \text{etc.} \\ + u - 3\Delta u + 6\Delta^2 u - 10\Delta^3 u + \text{etc.} \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

fondées sur les n°s. 897, 873.

Au reste, il est facile de voir que la formule ci-dessus est plus curieuse qu'utile ; je ne l'ai rapportée que pour compléter ce qui regarde l'analogie des puissances négatives et des intégrales, et je ferai remarquer à cette occasion que l'équation

$$\Delta'^m u = \{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}} - 1\}^m$$

est vraie aussi dans les mêmes hypothèses ; car elle devient $\Delta^m u = \{(1+\Delta u) - 1\}^m$, quand on fait $h'=h$.

925. Nous aurons peu de chose à dire pour le moment, sur la manière d'intégrer par approximation les différences. Ce procédé, de même que son analogue dans le Calcul intégral des différentielles,

consiste à réduire les fonctions proposées en séries dont chaque terme soit facilement intégrable. On atteindra ce but toutes les fois qu'il sera possible de transformer ces fonctions en séries dont les termes procèdent suivant les puissances du second ordre, parce que ces puissances s'intègrent immédiatement (n°. 902).

Supposons qu'on ait la fonction $\frac{1}{x^2}$, et que la différence de la variable x soit égale à l'unité, ce qu'on peut toujours obtenir en substituant $\frac{x}{h}$ à x. La fraction $\frac{1}{x^2}$ étant convertie en

$$\overset{-2}{[x]} + 3\overset{-3}{[x]} + 11\overset{-4}{[x]} + \text{etc. (n°. 903)},$$

aura pour intégrale cette suite

$$-\overset{-1}{[x]} - \tfrac{3}{2}\overset{-2}{[x]} - \tfrac{11}{3}\overset{-3}{[x]} - \text{etc.} + \textit{const.} \text{ (n°. 902)}.$$

L'expression $\frac{1}{x}$ échappe à ce moyen parce qu'elle renferme le terme $\overset{-1}{[x]}$ dont l'intégrale se présente sous la forme $\frac{\overset{-1+1}{[x]}}{-1+1}$, semblable à celle que prend la formule $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, lorsque $m = -1$. Si l'on employe la valeur de Σu, obtenue dans le n°. 919, on trouvera

$$\Sigma \overset{-1}{[x]} =$$
$$\Sigma \frac{1}{x+1} = l(x+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{B_1}{2(x+1)^2} + \frac{B_3}{4(x+1)^4} - \frac{B_5}{6(x+1)^6} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

résultat qui contient un logarithme.

Les autres valeurs de Σu fournissent aussi des séries infinies qui peuvent conduire à des résultats approchés, lorsqu'elles sont convergentes. Celle du n°. 912 donne

$$\Sigma\overset{-1}{[x]} = \overset{1}{[x]}\overset{-1}{[0]}\overset{-1}{[x]} - \overset{2}{[x+1]}\overset{-2}{[0]}\overset{-2}{[x]} + 2\overset{3}{[x+2]}\overset{-3}{[0]}\overset{-3}{[x]} - 2.3\overset{4}{[x+3]}\overset{-4}{[0]}\overset{-4}{[x]} + \text{etc.}$$

en prenant les valeurs de $\Delta\overset{-1}{[x]}$, $\Delta^2\overset{-1}{[x]}$, d'après les formules du n°. 902; ce résultat devient, après les réductions dont chacun de

ses termes est susceptible,

$$\Sigma\left[\overset{-1}{x}\right]=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{2(x+2)}+\frac{x}{3(x+3)}+\frac{x}{4(x+4)}+\text{etc.}+\mathit{const.}$$

Cet exemple suffit pour montrer ce qu'on doit faire dans tous les cas.

926. Fidèles au devoir que nous nous sommes imposé, de rattacher au plan de cet ouvrage tout ce qui, dans les traités de Calcul différentiel et intégral d'Euler, peut avoir quelqu'importance, par rapport à l'état actuel de l'analyse, nous allons rapporter une méthode pour obtenir l'expression approchée de Σu, au moyen d'une équation différentielle du premier degré et d'un ordre indéfini.

Si l'on fait $\Sigma u = z$, il viendra $u = \Delta z$, et on aura, par le théorême de Taylor, cette équation :

$$u=\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

lorsque la quantité h sera très-petite, ou que renfermés entre des limites connues et très-resserrées, les coefficiens différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, etc. formeront nécessairement une série convergente, on pourra terminer cette équation ; on aura alors une équation différentielle du premier degré, à coefficiens constans, d'un ordre marqué par celui du terme auquel on s'arrêtera, et dont l'intégration feroit connoître la fonction z (n°. 649).

Il convient de remarquer que l'on peut toujours rendre la quantité h aussi petite qu'on voudra ; car si u étoit fonction de x' et de h', et qu'on y fît $x=\frac{x'}{n}$, on auroit $h=\frac{h'}{n}$; mais il faudroit, pour qu'on pût tirer parti de cette transformation, qu'elle ne rendît pas trop divergente la série des coefficiens différentiels.

Au lieu d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus, pour en tirer la valeur de u, nous ferons usage de la méthode des substitutions successives. En négligeant d'abord les puissances de h, supérieures à la première, on aura $u=\frac{dz}{dx}\frac{h}{1}$, d'où $z=\frac{1}{h}\int u dx$. Soit pour abréger

$\frac{1}{h}\int u\,dx = P$, et posons $z = P + ph$; en substituant cette valeur dans l'expression de u, nous aurons

$$u = \begin{cases} \frac{dP}{dx}\,\frac{h}{1} + \frac{d^2P}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3P}{dx^3}\,\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + \frac{dp}{dx}\,\frac{h^2}{1} + \frac{d^2p}{dx^2}\,\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3p}{dx^3}\,\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.} \end{cases}$$

mais il est évident que la première ligne du second membre est égale à ΔP, et en se bornant dans la seconde au terme affecté de h^2, on obtiendra $u - \Delta P = \frac{dp}{dx}h^2$, d'où $p = \frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)\,dx$. Faisons encore $\frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)\,dx = P'$, et prenons $p = P' + p'h$, l'équation

$$u - \Delta P = \frac{dp}{dx}\,\frac{h^2}{1} + \frac{d^2p}{dx^2}\,\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3p}{dx^3}\,\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.}$$

deviendra

$$u - \Delta P = \begin{cases} \frac{dP'}{dx}\,\frac{h^2}{1} + \frac{d^2P'}{dx^2}\,\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3P'}{dx^3}\,\frac{h^4}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + \frac{dp'}{dx}\,\frac{h^3}{1} + \frac{d^2p'}{dx^2}\,\frac{h^4}{1.2} + \frac{d^3p'}{dx^3}\,\frac{h^5}{1.2.3} + \text{etc.} \end{cases}$$

la première ligne du second membre étant égale à $h\Delta P'$, on aura, en se bornant au premier terme de la seconde,

$u - \Delta P - h\Delta P' = \frac{dp'}{dx}h^3$, d'où $p' = \frac{1}{h^3}\int(u - \Delta P - h\Delta P')\,dx$.

Il est facile de continuer ce procédé, qui donnera

$$\Sigma u = z = P + P'h + P''h^2 + \text{etc.}$$

$P = \frac{1}{h}\int u\,dx$, $P' = \frac{1}{h^2}\int(u - \Delta P)\,dx$, $P'' = \frac{1}{h^3}\int(u - \Delta P - h\Delta P')\,dx$, etc.

Pour en montrer l'application, nous ferons avec Euler $u = x^2$, $h = 1$; il viendra

$$P = \tfrac{1}{3}x^3, \quad P' = \int(x^2 - \tfrac{1}{3}(3x^2 + 3x + 1))\,dx = -(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x)$$
$$P'' = \int\{-(x + \tfrac{1}{3}) + x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\}\,dx = \tfrac{1}{2}x, \quad P''' = 0,$$

et par conséquent

$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - (\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x) + \tfrac{1}{2}x + \mathit{const.} = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x + \mathit{const.}$$

résultat qui s'accorde avec celui du n°. 898.

927. Lorsque la fonction u est de la forme vy, on parvient à un résultat délivré du signe d'intégration, en faisant $\Sigma vy = vz$, ce qui donne

$$vy = \Delta . vz = z\Delta v + v\Delta z + \Delta v\Delta z = z\Delta v + v_{,}\Delta z,$$

en mettant $v_{,}$ à la place de $v + \Delta v$, et d'où on tire

$$vy - z\Delta v = v_{,}\left\{\frac{dz}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}.$$

En négligeant les termes multipliés par h, on obtient d'abord $z = \frac{vy}{\Delta v}$. Faisant $\frac{vy}{\Delta v} = P$ et $z = P + ph$, il vient ensuite

$$-ph\Delta v = v_{,}\left\{\begin{array}{l}\frac{dP}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2P}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3P}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \\ + \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2P}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \frac{d^3P}{dx^3}\frac{h^4}{1.2.3}\end{array}\right\},$$

d'où l'on déduira, en raisonnant comme dans le n°. précédent;

$$-ph\Delta v = v_{,}\Delta P, \text{ et } p = -\frac{v_{,}\Delta P}{h\Delta v};$$

puis on posera $-\frac{v_{,}\Delta P}{h\Delta v} = P'$, $p = P' + p'h$,

et en vertu de l'équation

$$-ph\Delta v = v_{,}\Delta P + v_{,}\left\{\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2p}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \text{etc.}\right\}$$

on aura

$$-p'h^2\Delta v = v_{,}\left\{\begin{array}{l}\frac{dP'}{dx}\frac{h^2}{1} + \frac{d^2P'}{dx^2}\frac{h^3}{1.2} + \text{etc.} \\ + \frac{dp'}{dx}\frac{h^3}{1} + \frac{d^2p'}{dx^2}\frac{h^4}{1.2} + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

d'où on tirera $-p'h\Delta v = v_{,}\Delta P'$, $p' = -\frac{v_{,}\Delta P'}{h\Delta v}$.

La marche du reste de l'opération est semblable à ce commencement, et en la suivant on parvient à

$$\Sigma vy = vz = v\{P + P'h + P''h^2 + \text{etc.}\}$$

$$P = \frac{vy}{\Delta v}, \quad P' = -\frac{v_{,}\Delta P}{h\Delta v}, \quad P'' = -\frac{v_{,}\Delta P'}{h\Delta v}, \text{ etc.}$$

928. En intégrant plusieurs fois de suite et par parties, chaque terme de la formule,

$$\Sigma^m P Q = Q \Sigma P - \Delta Q \Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q \Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q \Sigma^4 P_3 + \text{etc.}$$

on obtiendra successivement les expressions de $\Sigma^2 PQ$, $\Sigma^3 PQ$, etc. Taylor a donné celle de $\Sigma^m PQ$, savoir :

$$\Sigma^m P Q = Q \Sigma^m P - \frac{m}{1} \Delta Q \Sigma^{m+1} P_1 + \frac{m(m+1)}{1.2} \Sigma^{m+2} P_2$$
$$- \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \Delta^3 Q \Sigma^{m+3} P_3 + \text{etc.}$$

Cette formule se vérifie facilement de proche en proche, en observant que les coefficiens de $Q\Sigma^m P$, $\Delta Q \Sigma^{m+1} P_1$, etc. sont les mêmes que ceux des puissances de x dans le développement de $(1+x)^{-m}$, analogie que l'on prouve comme il suit : si on fait

$$\Sigma^m PQ = A Q \Sigma^m P + B \Delta Q \Sigma^{m+1} P_1 + C \Delta^2 Q \Sigma^{m+2} P_2 + \text{etc.}$$

et que l'on prenne la différence de cette équation en n'y faisant varier que les fonctions P et Q, on aura

$$\Sigma^{m-1} PQ = A Q \Sigma^{m-1} P + \left.\begin{matrix} B \\ +A \end{matrix}\right| \Delta Q \Sigma^m P_1 + \left.\begin{matrix} C \\ +B \end{matrix}\right| \Delta^2 Q \Sigma^{m+1} P_2 + \text{etc.}$$

parce que $\Delta . \Sigma^m PQ = \Sigma^{m-1} PQ$, et $\Delta . XY = X \Delta Y + Y_1 \Delta X$; mais si l'on fait aussi

$$(1+x)^{-m} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

on trouvera

$$(1+x)^{-(m-1)} = (1+x)^{-m}(1+x) = A + \left.\begin{matrix} B \\ +A \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} C \\ +B \end{matrix}\right| x^2 + \text{etc.}$$

Il suit de là que l'on passe de $\Sigma^m PQ$ à $\Sigma^{m-1} PQ$, comme de $(1+x)^{-m}$ à $(1+x)^{-(m-1)}$; cette correspondance ayant toujours lieu jusqu'au cas où $m = 1$, pour lequel les coefficiens de ΣPQ et de $(1+x)^{-1}$ sont identiques, il est incontestable que toute la suite des développemens de ΣPQ, $\Sigma^2 PQ$, $\Sigma^3 PQ$, etc. sera semblable à cet égard à celle des développemens de $(1+x)^{-1}$, $(1+x)^{-2}$, $(1+x)^{-3}$, etc. (*).

(*) Taylor démontre immédiatement son résultat par des intégrations qu'il est aisé de reconnoitre dans l'expression de $\Sigma^{m-1} PQ$ et d'effectuer ensuite. Il est évident que si l'on change m en $m+1$ et qu'on écrive en conséquence A_1, B_1, C_1 etc.

Nous

Nous ferons remarquer en passant que par suite de l'analogie des puissances et des différences on auroit

$$\Delta^m PQ = Q\Delta^m P + \frac{m}{1}\Delta Q\Delta^{m-1}P_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 Q\Delta^{m-2}P_2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 Q\Delta^{m-3}P_3 + \text{etc.}$$

929. Nous ne nous arrêterons pas au cas où la fonction u

---

pour A, B, C, etc. $\Sigma^{m-1}PQ$, devenant alors $\Sigma^m PQ$, on aura

$$A_1 = A, \quad B_1 + A_1 = B, \quad C_1 + B_1 = C, \text{ etc.}$$

d'où $\quad \Delta A = 0, \quad \Delta B = -A_1, \quad \Delta C = -B_1$, etc.

La première de ces équations donne d'abord $A = const.$ puis $A = 1$, puisque $m=0$ donne aussi $A=1$; la seconde conduit à $\Delta B = -1$, $B = -\frac{m}{1}$, à cause de $B=0$, quand $m=0$; poursuivant de la même manière on obtiendra :

$$\Delta C = \frac{m+1}{1}, \quad C = \frac{m(m+1)}{1.2}, \quad \Delta D = \frac{m(m+1)}{1.2}, \quad D = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

Pour mettre plus d'uniformité dans la méthode, j'ai préféré ce procédé, la considération de l'analogie des puissances et des différences, si souvent employée dans ce qui précède : en le suivant j'aurois rendu la démonstration indépendante de celle du binome ; mais j'observerai que l'on peut se servir de l'intégration pour parvenir cette dernière, sans tomber dans aucun cercle vicieux. En effet, si l'on prend

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$$
$$(1+x)^{m+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \text{etc.}$$

on aura $\quad A' = A + 1, \quad B' = B + A, \quad C' = C + B$, etc.

$\quad \Delta A = 1, \quad \Delta B = A, \quad \Delta C = B$, etc.

en intégrant d'après le n°. 899, qui ne suppose point la théorie des puissances, et faisant attention que A, B, C, etc. doivent être nuls quand $m=0$, on obtiendra

$$A = \frac{m}{1}; \quad B = \frac{m(m-1)}{1.2}, \quad C = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

quel que soit l'exposant m. Il seroit facile de donner à cette démonstration une forme purement élémentaire ; c'est ce qu'on peut voir dans l'Encyclopédie méthodique (Dictionn. de Math. au mot *binome*) et dans les *Nova acta Acad. Petropolitanæ*, ann. 1787.

renferme plusieurs variables; nous nous bornerons à indiquer les formules

$$\Sigma^m u = \frac{1}{\left\{ e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \text{etc.}} - 1 \right\}^m}$$

$$\Sigma'^m u = \frac{1}{\left\{ (1+\Delta_x u)^{\frac{h'}{h}} (1+\Delta_y u)^{\frac{k'}{k}} (1+\Delta_z u)^{\frac{l'}{l}} \ldots - 1 \right\}^m},$$

qui résultent des expressions

$$\Delta^m u = \left\{ e^{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \text{etc.}} - 1 \right\}^m \quad (\text{n}^\circ.\ 865)$$

$$\Delta'^m u = \left\{ (1+\Delta_x u)^{\frac{h'}{h}} (+\Delta_y u)^{\frac{k'}{k}} (1+\Delta_z u)^{\frac{l'}{l}} \ldots - 1 \right\}^m \quad (\text{n}^\circ.895),$$

lorsqu'on y change $+m$ en $-m$, en vertu de l'analogie des puissances négatives et des intégrales. Le lecteur familiarisé avec les démonstrations que nous avons données des cas les plus simples de ces formules, trouvera sans peine le moyen de les prouver en général.

Application du Calcul des différences à la sommation des suites.

930. D'après l'équation $Sf(x, h) = \Sigma f(x, h) + f(x, h) - const.$ obtenue dans le n°. 897, chacune des fonctions intégrées dans ce qui précède, nous donnera la somme de la suite dont cette fonction représente le terme général. Ayant trouvé, n°. 902,

$$\Sigma \overset{n}{[p]} = \frac{\overset{n+1}{[p]}}{n+1} + const. \quad \Sigma \overset{-n}{[p]} = \frac{\overset{-n+1}{[p]}}{-n+1} + const.$$

nous en déduirons

$$S\overset{n}{[p]} = \frac{\overset{n+1}{[p]}}{n+1} + \overset{n}{[p]} - const. = \frac{\overset{n+1}{[p]} + (n+1)\overset{n}{[p]}}{n+1} - const.$$

$$S\overset{-n}{[p]} = \frac{\overset{-n+1}{[p]}}{-n+1} + \overset{-n}{[p]} - const. = \frac{\overset{-(n-1)}{[p]} - (n-1)\overset{-n}{[p]}}{-n+1} - const.$$

mais

$$\overset{n+1}{[p]} + (n+1)\overset{n}{[p]} = (p-n)\overset{n}{[p]} + (n+1)\overset{n}{[p]} = (p+1)\overset{n}{[p]} = \overset{n+1}{[p+1]},$$

donc $S[p]^{n} = \frac{[p+1]^{n+1}}{n+1} - const.$

de même

$$[p]^{-(n-1)} - (n-1)[p]^{-n} = (p+n)[p]^{-n} - (n-1)[p]^{-n} = (p+1)[p]^{-n} = [p+1]^{-(n-1)},$$

donc $S[p]^{-n} = \frac{[p+1]^{-n+1}}{-n+1} - const.$

résultat qui se tire du précédent en changeant seulement le signe de n.

L'un et l'autre se concluent immédiatement de $\Sigma[p]^{n}$, en y écrivant $p+1$, au lieu de p ; car on voit en général que $Sf(x,h)$ est aussi, à la constante près, ce que devient $\Sigma f(x,h)$, lorsque x devient $x+h$.

Les expressions que nous venons d'obtenir nous donnent la somme des suites de nombres figurés, ou dont les termes ont, avec un numérateur constant, ces nombres pour dénominateurs ; on a par ces expressions

$$1+1+\ 1+\ 1+\dots\dots+[p]^{0} = \frac{[p]^{1}}{1} = \frac{p}{1}$$

$$1+2+\ 3+\ 4\dots\dots+\frac{[p]^{1}}{1} = \frac{[p+1]^{2}}{2} = \frac{p(p+1)}{1.2}$$

$$1+3+\ 6+10,\dots\dots+\frac{[p+1]^{2}}{1.2} = \frac{[p+2]^{3}}{1.2.3} = \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}$$

$$1+4+10+20,\dots\dots+\frac{[p+2]^{3}}{1.2.3} = \frac{[p+3]^{4}}{1.2.3.4} = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3.4}$$

etc.

Il n'est pas nécessaire d'ajouter de constante à ces valeurs, parce qu'elles s'évanouissent en même tems que p.

On a de même la somme des séries inverses des précédentes, en exceptant néanmoins celle-ci

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\dots\dots+1[p-1]^{-1},$$

pour laquelle $S[p-1]^{-1}$ devient $\frac{[p-1]^{0}}{0}$ (n°. 925); on trouve ensuite

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}\ldots\ldots+\quad 1.2[p-1]^{-2}=-\quad 2[p]^{-1}+const.$$
$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{20}\ldots\ldots+\quad 1.2.3[p-1]^{-3}=-\quad 3[p]^{-2}+const.$$
$$1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}\ldots\ldots+1.2.3.4[p-1]^{-4}=-2.4[p]^{-3}+const.$$

etc.

La constante est ici nécessaire pour compléter les résultats obtenus qui doivent donner l'unité, lorsqu'on fait $p=1$; mais comme dans cette hypothèse

$$[p]^{-1}=\frac{1}{p+1},\qquad [p]^{-2}=\frac{1}{(p+1)(p+2)},\ \text{etc.}$$

se réduisent respectivement à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, etc. on a pour le premier, *const.* $=\frac{2}{1}$; pour le deuxième, *const.* $=\frac{3}{2}$; pour le troisième, *const.* $=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; etc.

Il convient de remarquer que la valeur de chaque constante est la limite de la série à laquelle elle se rapporte, car les puissances négatives du second ordre $[p]^{-1}$, $[p]^{-2}$, etc. s'évanouissent lorsque p est supposé infini.

Cela posé, on aura

$$\frac{2}{1}-2[p]^{-1},\quad \frac{3}{2}-3[p]^{-2},\quad \frac{4}{3}-2.4[p]^{-3},\ \text{etc.}$$

ou $\frac{2}{1}-\frac{2}{p+1},\ \frac{3}{2}-\frac{3}{(p+1)(p+2)},\ \frac{4}{3}-\frac{2.4}{(p+1)(p+2)(p+3)}$, etc.

pour les sommes des séries dont les termes généraux sont

$$1.2[p-1]^{-1},\quad 1.2.3[p-1]^{-3},\quad 1.2.3.4[p-4]^{-4},\ \text{etc.}$$

ou $\quad\frac{1.2}{p(p+1)},\quad \frac{1.2.3}{p(p+1)(p+2)},\quad \frac{1.2.3.4}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$.

Il est bon d'observer que tout ce qui précède reposant entièrement sur le n°. 899, peut être facilement ramené, s'il étoit besoin, à une forme élémentaire.

Toutes les séries dont le terme général pourra se décomposer en puissances du second ordre, soit positives ou négatives, seront sommées facilement par ce qui précède.

931. La fraction $\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$, que nous avons intégrée dans le n°. 905, produit, dans le cas où $h=1$, la série

$$\frac{5}{6}, \quad \frac{8}{24}, \quad \frac{11}{60}, \quad \frac{14}{120}, \text{ etc.}$$

on en obtient la somme, soit en mettant $x+1$, au lieu de x, dans l'expression $-\frac{3x+1}{x(x+1)}+ const.$ que donne l'intégrale, par la supposition de $h=1$; soit en ajoutant à cette intégrale le terme général: on a par l'un et l'autre procédé

$$S\frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}=-\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}+ const.$$

En égalant au premier terme $\frac{5}{6}$, ce que devient la somme quand $x=1$, on a $const.=2$, d'où $S\frac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}=2-\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}$.

On se conduira de même dans tous les cas où l'on aura intégré le terme général de la série proposée; mais, sans nous arrêter davantage à des exemples particuliers, parcourons successivement les divers résultats que donnent les expressions générales de Σu.

932. Si dans la formule

$$Sf(x,h)=\Sigma f(x,h)+f(x,h)-const. \text{ (n°. 897)},$$

ou $Su=\Sigma u+u-const.$ on met à la place de Σu, les diverses expressions que nous avons obtenues jusqu'ici, on en déduira les principales formules qu'Euler a données pour la sommation des suites dans ses *Institutiones Calculi differentialis.*

1°. L'expression de Σu du n°. 912, en y faisant $h=1$, et en employant pour abréger la notation du n°. 902, donne

$$Su=(x+1)u-[x+1]^{2}[0]^{-2}\Delta u+[x+2]^{3}[0]^{-3}\Delta^{2}u-[x+3]^{4}[0]^{-4}\Delta^{3}u$$
$$+[x+4]^{5}[0]^{-5}\Delta^{4}u-\text{etc.}-const.$$

2°. Il résulte de l'expression de Σu, rapportée dans le n°. 919,

$$Su=\int udx+\tfrac{1}{2}u+B_{1}[1]^{1}\frac{du}{dx}-B_{3}[1]^{-3}\frac{d^{3}u}{dx^{3}}+B_{5}[1]^{-5}\frac{d^{5}u}{dx^{5}}-\text{etc.}-const.$$

Lorsqu'on prend $u=x^m$, il vient par la dernière

$$Su=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{1}{2}x^m+B_1\overset{1}{[m]}\overset{-1}{[1]}x^{m-1}-B_3\overset{3}{[m]}\overset{-3}{[1]}x^{m-3}+B_5\overset{5}{[m]}\overset{-5}{[1]}x^{m-5}$$
$$-\text{etc.}-const.$$

en remettant, au lieu des lettres B_1, B_3, B_5, etc. les nombres qu'elles représentent, on a cette valeur:

$$Sx^m=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{6}\overset{1}{[m]}\overset{-1}{[1]}x^{m-1}-\frac{1}{30}\overset{3}{[m]}\overset{-3}{[1]}x^{m-3}+\frac{1}{42}\overset{5}{[m]}\overset{5}{[1]}x^{m-5}$$
$$-\frac{1}{30}\overset{7}{[m]}\overset{-7}{[1]}x^{m-7}+\frac{5}{66}\overset{9}{[m]}\overset{-9}{[1]}x^{m-9}-\frac{691}{2730}\overset{11}{[m]}\overset{-11}{[1]}x^{m-11}$$
$$+\frac{7}{6}\overset{13}{[m]}\overset{-13}{[1]}x^{m-13}-\frac{3617}{510}\overset{15}{[m]}\overset{-15}{[1]}x^{m-15}+\frac{43867}{798}\overset{17}{[m]}\overset{-17}{[1]}x^{m-17}$$
$$-\frac{174611}{330}\overset{19}{[m]}\overset{-19}{[1]}x^{m-19}+\frac{854513}{138}\overset{21}{[m]}\overset{-21}{[1]}x^{m-21}-\frac{236364091}{2730}\overset{23}{[m]}\overset{-23}{[1]}x^{m-23}$$
$$+\frac{8553103}{6}\overset{25}{[m]}\overset{-25}{[1]}x^{m-25}-\frac{23749461029}{870}\overset{27}{[m]}\overset{-27}{[1]}x^{m-27}$$
$$+\frac{8615841276005}{14322}\overset{29}{[m]}\overset{-29}{[1]}x^{m-29}-\text{etc.}+const.$$

La constante arbitraire satisfera aux conditions relatives au terme d'où l'on commence à prendre la somme. Si l'on veut, par exemple, qu'elle soit nulle en même tems que x, la constante doit être nulle pour tous les cas où m est pair; mais il faudra la prendre égale au dernier terme et de signe contraire, pour ceux où m est impair.

3°. L'expression du n°. 920 donne

$$Su=(Sn^0+1)u-Sn.\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+Sn^2.\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-Sn^3.\frac{d^3u}{dx^3}+\text{etc.}$$

4°. Enfin les expressions des n°s. 910, 923, conduisent à

$$SPQ=Q(\Sigma P+P)-\Delta Q\Sigma^2P_1+\Delta^2Q\Sigma^3P_2-\Delta^3Q\Sigma^4P_3+\text{etc.}$$

$$SPQ=Q(\Sigma P+P)-\frac{dQ}{dx}h\Sigma^2P_1+\frac{d^2Q}{dx^2}h^2(\Sigma^3P_2-\alpha\Sigma^2P_1)$$
$$-\frac{d^3Q}{dx}h^3(\Sigma^4P_3-\alpha'\Sigma^3P_2+\beta\Sigma^2P_1)+\text{etc.}$$

Par les trois premières formules on obtiendra la somme des suites dont le terme général est une fonction rationnelle et entière, et par

les deux dernières celles des suites dont le terme général est composé de deux facteurs dont l'un est une fonction rationnelle et entière de u, et l'autre une fonction susceptible d'un nombre indéfini d'intégrations.

933. L'un des cas les plus simples de cette dernière classe de séries est compris dans le terme général $a^x x^m$, appartenant à la suite

$$a \cdot 1^m, \quad a^2 \cdot 2^m, \quad a^3 \cdot 3^m \ldots\ldots a^x \cdot x^m,$$

résultante de la multiplication terme à terme d'une progression par quotiens (ou progression géométrique), par la suite des puissances m des nombres naturels. L'expression de $\Sigma a^x y$, du n°. 923, qui donne

$$Sa^x y = \frac{a^{x+h} y}{a^h - 1} - a^x \frac{dy}{dx} \frac{a^h h}{(a^h - 1)^2} + a^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{(A\,a^h + A_1 a^{2h}) h^2}{(a^h - 1)^3}$$
$$- a^x \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{(A' a^h + A'_1 a^{2h} + A'_2 a^{3h}) h^3}{(a^h - 1)^4} + \text{etc.} + const.$$

devient pour ce cas

$$Sa^x x^m = \frac{a^{x+h}}{a^h - 1} \left\{ \begin{aligned} & x^m - m x^{m-1} \frac{h}{(a^h - 1)} + m(m-1) x^{m-2} \frac{(A + A_1 a^h) h^2}{(a^h - 1)^2} \\ & - m(m-1)(m-2) x^{m-3} \frac{(A' + A'_1 a^h + A'_2 a^{2h}) h^3}{(a^h - 1)^3} + \text{etc.} \end{aligned} \right\} + const.$$

Si l'on veut prendre la valeur de $Sa^x x^m$, à partir de $x = 0$, il faudra déterminer la constante arbitraire, de manière à rendre nul, dans la même hypothèse, le second membre de cette équation; on trouvera ainsi

$$Sa^x x^0 = \frac{a^{x+h}}{a^h - 1} - \frac{a^h}{a^h - 1}$$

$$Sa^x x = \frac{a^{x+h}}{a^h - 1} \left\{ x - \frac{h}{a^h - 1} \right\} + \frac{a^h h}{(a^h - 1)^2}$$

$$Sa^x x^2 = \frac{a^{x+h}}{a^h - 1} \left\{ x^2 - 2x \frac{h}{a^h - 1} + \frac{(a^h + 1) h^2}{(a^h - 1)^2} \right\} - \frac{a^h (a^h + 1) h^2}{(a^h - 1)^3}$$

etc.

On voit par ces résultats particuliers que la constante est égale à ce que devient, lorsque $x = 0$, le dernier terme de la partie variable de l'expression, et doit être affectée du signe $-$.

L'expression générale de $Sa^x y$ s'arrêtant toutes les fois que la

fonction y sera rationnelle et entière, on pourra par son moyen obtenir les sommes des séries qui résultent de la multiplication terme à terme d'une progression par quotiens (ou progression géométrique) et d'une série dont le terme général sera rationnel et entier. Les suites

$$\frac{1}{p},\quad \frac{2}{p^2},\quad \frac{3}{p^3},\ldots\ldots\frac{x}{1.p^x}$$

$$\frac{1}{p},\quad \frac{3}{p^2},\quad \frac{6}{p^3},\ldots\ldots\frac{x(x+1)}{1.2.p^x}$$

$$\frac{1}{p},\quad \frac{4}{p^2},\quad \frac{10}{p^3},\ldots\ldots\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3.p^x}$$

etc.

que l'on rencontre fréquemment sont dans ce cas. Leurs sommes se déduisent de l'expression de Sa^xy, en y faisant d'abord $h=1$, $a=\frac{1}{p}$, puis successivement

$$y=\frac{x}{1},\qquad y=\frac{x(x+1)}{1.2},\qquad y=\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

934. La formule $SPQ=Q(P+\Sigma P)-\Delta Q\Sigma^2P_1+$ etc. semble encore plus appropriée aux séries ci-dessus, à cause de la simplicité que présente l'expression des différences des fonctions

$$x(x+1),\ \text{ou}\ [x+1]^{2},\qquad x(x+1)(x+2),\ \text{ou}\ [x+2]^{3},\ \text{etc.}$$

En faisant $P=a^x$ et $Q=[0]^{-n}[x+n-1]^{n}$, on obtient pour le cas général

$$S[0]^{-n}a^x[x+n-1]^{n}=[0]^{-n}\Big\{[x+n-1]^{n}\Big(a^x+\frac{a^x}{a-1}\Big)-[n]^{n}[x+n-1]^{n-1}\frac{a^{x+1}}{(a-1)^2}$$
$$+[n]^{2}[x+n-1]^{n-2}\frac{a^{x+2}}{(a-1)^3}\ldots\pm[n]^{n}\frac{a^{x+n}}{(a-1)^{n+1}}\Big\}+\mathit{const.}$$

Ce résultat est susceptible de plusieurs réductions, et notamment de celles du facteur commun $[0]^{-n}$, avec les facteurs $[n]^{1}$,

facteurs $[n]^{1}$, $[n]^{2}$, etc. en les effectuant toutes il vient

$$S[0]^{-n}a^x[x+n-1]^{n}=\frac{a^x}{a-1}\left\{a[0]^{-n}[x+n-1]^{n}-[0]^{-n+1}[x+n-1]^{n-1}\frac{a}{a-1}\right.$$
$$\left.+[0]^{-n+2}[x+n-1]^{n-2}\frac{a^2}{(a-1)^2}\ldots\ldots\pm\frac{a^n}{(a-1)^n}\right\}+const.$$

935. Si l'on fait $P=[x]^{-n}$, et que Q représente toujours une fonction rationnelle et entière, on aura pour tous les cas où n sera un nombre entier positif et différent de l'unité,

$$S[x]^{-n}Q=Q\left([x]^{-n}+\frac{[x]^{-n+1}}{-n+1}\right)-\Delta Q\frac{[x+1]^{-n+2}}{(-n+1)(-n+2)}+\Delta^2 Q\frac{[x+2]^{-n+3}}{(-n+1)(-n+2)(-n+3)}$$
$$-\Delta^3 Q\frac{[x+3]^{-n+4}}{(-n+1)(-n+2)(n+3)(n+4)}+\text{etc.}+const.$$

résultat qui peut s'écrire ainsi :

$$S[x]^{-n}Q=-\frac{Q(x+1)}{x+n}[n-2]^{-1}[x]^{-n+1}-\Delta Q[n-3]^{-2}[x+1]^{-n+2}-\Delta^2 Q[n-4]^{-3}[x+2]^{-n+3}$$
$$-\Delta^3 Q[n-5]^{-4}[x+3]^{-n+4}-\text{etc.}\ldots+const.$$

en observant que $[x]^{-n}=\dfrac{[x]^{-n+1}}{x+n}$, et en changeant les produits $(-n+1)(-n+2)$, etc. en puissances négatives du second ordre, conformément aux loix établies dans le n°. 902.

Il est bon de remarquer que l'on peut rapporter à cette formule toutes les fonctions telles que

$$\frac{Q}{(x+1)(x+2)(x+5)(x+11)};$$

dans le dénominateur desquelles les facteurs ne sont pas consécutifs ; et pour cela il suffit de remplir les lacunes, en écrivant, tant au numérateur qu'au dénominateur, tous les facteurs qui manquent dans ce dernier. Dans l'exemple cité on arrive à

$$\frac{Q(x+3)(x+4)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)\ldots\ldots(x+11)}=Q[x+4]^{2}[x+10]^{5}[x]^{-11}.$$

La fraction $\frac{1}{4x^2+4x-3}$ appartient au cas qui nous occupe ; car en décomposant son dénominateur en facteurs simples, elle revient à $\frac{1}{(2x-1)(2x+3)}$, et faisant $2x-1=2x'+2$, on a

$$\Delta x'=\Delta x=1, \qquad 2x+3=2x'+6,$$

$$\frac{1}{4x^2+4x-3}=\frac{1}{(2x'+2)(2x'+6)}=\frac{1}{4(x'+1)(x'+3)}=\frac{x'+2}{4(x'+1)(x'+2)(x'+3)}$$
$$=\tfrac{1}{4}(x'+2)[\overset{-3}{x'}].$$

prenant donc $n=3$, on obtiendra

$$S=\frac{1}{4x^2+4x-3}=-\frac{(x'+2)(x'+1)}{4(x'+3)}[\overset{-1}{1}][\overset{-2}{x'}]-\tfrac{1}{4}[\overset{-2}{0}][x'+\overset{-1}{1}]+const.$$

puisque $\Delta^2 Q=0$.

Si on repasse à la notation ordinaire, on trouvera

$$S=\frac{1}{4x^2+4x-3}=-\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{x'+3}+\frac{1}{x'+2}\right\}+const.$$
$$=-\frac{2x'+5}{8(x'+2)(x'+3)}+const.=-\frac{x+1}{(2x+1)(2x+3)}+const.$$

936. Lorsque a est négatif, et qu'on prend $h=1$, la série, dont le terme général est $a^x y$, a ses termes alternativement positifs et négatifs, si d'ailleurs la fonction y conserve toujours le même signe ; Euler profite de cette remarque pour obtenir une formule propre à donner la somme desséries quelconques dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Il suppose $a=-1$, et la série proposée de

$$a^x y, \qquad a^{x+1}y_1, \qquad a^{x+2}y_2, \text{ etc.}$$

qu'elle étoit, devient

$$y, \qquad -y_1, \qquad +y_2, \text{ etc.}$$

l'équation

$$Sa^x y=\frac{a^x}{a^h-1}\left\{a^h y-\frac{a^h h}{a^h-1}\frac{dy}{dx}+\frac{Aa^h+A_1a^{2h}}{(a^h-1)^2}h^2\frac{d^2y}{dx^2}\right.$$
$$\left.-\frac{A'a^h+A'_1a^{2h}+A'_2a^{3h}}{(a^h-1)^3}h^3\frac{d^3y}{dx^3}+\text{etc.}\right\}+const.$$

donne alors, en prenant $h=1$,

$$S(-1)^x y=\frac{(-1)^x}{-2}\left\{-y-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{A-A_1}{2^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{A'-A'_1+A'_2}{2^3}\frac{d^3y}{dx^3}-\text{etc.}\right\}+const.$$

Les termes affectés des coefficiens différentiels d'un ordre pair disparoissent dans cette formule comme dans celle du n°. 918; car en faisant $a=-1$ dans le terme général de l'expression de $\Sigma a^x y$, trouvée n°. 923, il se change en

$$\frac{\pm 1}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}\left\{\begin{array}{l}1-\{2^{n-1}-n\}+\left\{3^{n-1}-2^{n-1}n+\frac{n(n-1)}{1.2}\right\}\\ -\left\{4^{n-1}-3^{n-1}n+2^{n-1}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right\}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

et nous avons prouvé dans le n°. 918, que le second facteur de cette dernière quantité s'évanouit toutes les fois que n est impair.

En la comparant avec la valeur de A_n, obtenue dans le même article, on l'exprimera par $(2^n-1)A_n$; changeant ensuite n en $2p$, mettant à la place de A_{2p}, sa valeur $\pm\frac{B_{2p-1}}{2.3.4\ldots.2p}$, rapportée aux nombres de Bernoulli (n°. 919), on aura $\pm\frac{(2^{2p}-1)B_{2p-1}}{2.3.4\ldots.2p}$, et par conséquent

$$S(-1)^x=y(-1)^x\left\{\frac{y}{2}+\frac{(2^2-1)B_1}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{(2^4-1)B_3}{2.3.4}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{(2^6-1)B_5}{2.3.4.5.6}\frac{d^5y}{dx^5}-\frac{(2^8-1)B_7}{2.3.4.5.6.7.8}\frac{d^7y}{dx^7}+\text{etc.}\right\},$$

résultat auquel Euler n'est parvenu que par induction et d'une manière assez pénible.

937. Appliquons cette formule à la fonction $(-1)^x x^m$, de laquelle il résulte la série

$$0^m-1^m+2^m-3^m+4^m\ldots.\mp x^m,$$

en commençant à $x=0$; nous trouverons

$$S(-1)^x x^m=\pm\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}x^m+\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}mx^{m-1}-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}m(m-1)(m-2)x^{m-3}\\ +\frac{(2^6-1)B_5}{1.2\ldots.6}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5}-\text{etc.}\end{array}\right\}+const.$$

Si l'on fait successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc. il viendra

$$0-1+1-1+1\ldots\mp x^0=\mp\tfrac{1}{2}x^0+C_0$$
$$0-1+2-3+4\ldots\mp x=\mp\{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\}+C_1$$
$$0^2-1^2+2^2-3^2+4^2\ldots\mp x^2=\mp\{\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{4}.2x\}+C_2$$
$$0^3-1^3+2^3-3^3+4^3\ldots\mp x^3=\mp\{\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{4}.3x-\tfrac{1}{48}.12\}+C_3$$
etc.

Les constantes arbitraires C_0, C_1, C_2, C_3, etc. doivent être déterminées de manière que ces expressions s'évanouissent lorsque $x=0$, et il faut observer que le signe de la première partie du second membre est le même que celui du dernier terme de la série du premier membre ; avec cette attention on obtiendra

$$C_0=-\tfrac{1}{2},\quad C_1=-\tfrac{1}{4},\quad C_2=0,\quad C_3=+\tfrac{1}{4},\ \text{etc.}$$

et l'on verra, qu'excepté quand $m=0$, la constante est nulle toutes les fois que l'exposant m est pair.

938. Soit une série quelconque

$$A_0+A_1+A_2+A_3+A_4\ldots\ldots+A_x,$$

dont le terme général $A_x=u$; si l'on pouvoit obtenir séparément la somme des termes affectés d'un indice impair, on arriveroit facilement à celle de la série

$$A_0-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+A_6-\text{etc.}$$

puisqu'en nommant S la somme de la série complète, et S' celle de la série des termes dont l'indice est impair, on auroit

$$S-2S'=\begin{cases}A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+\text{etc.}\\ \quad\ -2A_1,\quad -2A_3,\quad -2A_5\quad -\text{etc.}\end{cases}$$
$$=A_0-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5+A_6-\text{etc.}$$

Si l'on désignoit par S'' la somme des termes pris de trois en trois dans les suites proposées, on auroit

$$S-2S''=\begin{cases}A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7+A_8+\text{etc.}\\ \qquad\quad -2A_2\qquad\quad -2A_5\qquad\quad -2A_8-\text{etc.}\end{cases}$$
$$=A_0+A_1-A_2+A_3+A_4-A_5+A_6+A_7-A_8+\text{etc.}$$

On voit assez par ces combinaisons le parti que l'on pourroit tirer pour la sommation des suites de l'expression des termes pris à des

intervalles égaux dans une série quelconque ; or c'est ce que donnent les formules

$$\Sigma'^m u = \frac{1}{\left\{e^{\frac{du}{dx}h'} - 1\right\}^m}, \qquad \Sigma'^m u = \frac{1}{\left\{(1+\Delta u)^{\frac{h'}{h}} - 1\right\}^m} \text{ (n°. 925)},$$

en y faisant $m=1$, $h=1$, et $h'=2$, $=3$, $=4$, etc. puis déterminant la constante arbitraire de manière à faire commencer la série partielle à tel terme que l'on voudra de la série complète.

La première formule donne $\Sigma' u = \frac{1}{e^{\frac{du}{dx}h'} - 1}$, et son développement se déduisant de celui de Σu (n°. 919), en y changeant seulement h en h', il viendra

$$\Sigma' u = \frac{1}{h'}\int u dx - \frac{1}{2}u + B_1 \frac{du}{dx}\frac{h'}{2} - B_3 \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{2.3.4} + \text{etc.}$$

ajoutant ensuite le terme général u, pour passer à la somme $S'x$, on aura

$$S'u = \frac{1}{h'}\int u dx + \frac{1}{2}u + B_1 \frac{du}{dx}\frac{h'}{2} - B_3 \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{2.3.4} + \text{etc.} + C,$$

C étant la constante arbitraire, et on tirera de là

$$Su - 2S'u = \left(1 - \frac{2}{h'}\right)\int u dx - \frac{1}{2}u + \frac{(1-2h')B_1}{2}\frac{du}{dx}$$
$$- \frac{(1-2h'^3)B_3}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.} + \textit{const.}$$

quand $h'=2$, le terme $\int u dx$ disparoît, et on a, comme dans le n°. 936,

$$Su - 2S'u = -\left\{\frac{1}{2}u + \frac{(2^2-1)B_1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{(2^4-1)B_3}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.}\right\} + \textit{const.}$$

en observant de donner à u le signe du terme où l'on s'arrête.

939. Parmi les cas où les diverses expressions de Su, rapportées dans le n°. 932, ne se terminent point, ceux dans lesquels on obtient une série convergente méritent une attention particulière, car alors on arrive au moins à une valeur approchée de la somme des suites proposées.

La formule

$$Su = \int u\,dx + \tfrac{1}{2}u + \frac{B_1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{B_3}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3} + \text{etc.} + const.$$

étant appliquée à la suite

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x},$$

donne

$$S\frac{1}{x} = \mathrm{l}\,x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_3}{4x^4} - \frac{B_5}{6x^6} + \text{etc.} + const.$$

Cette dernière est d'autant plus convergente que la valeur de x devient plus grande ; mais avant d'en faire usage, il convient de déterminer la constante arbitraire. On ne peut supposer $x=0$; et si l'on fait $x=1$, ce qui rend $S\frac{1}{x} = 1$, l'équation

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} + \frac{B_3}{4} - \frac{B_5}{6} + const.$$

qu'on obtient alors ayant pour second membre une série divergente ne mène à rien. Pour parer à cet inconvénient il n'y a qu'à prendre x plus grand, égal à 10, par exemple ; et désignant par A la quantité

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} = 2{,}928968253968253968,$$

on aura

$$A = \frac{1}{2}\mathrm{l}\,10 + \frac{1}{20} - \frac{B_1}{200} + \frac{B_3}{40000} - \frac{B_5}{6000000} + \text{etc.} + const.$$

et on tirera de là

$$const. = A - \frac{1}{2}\mathrm{l}\,10 - \frac{1}{20} + \frac{B_1}{200} - \frac{B_3}{400000} + \text{etc.}$$

et mettant cette expression en nombres, on obtiendra

$$const. = 0{,}5772156649015325.$$

Il est à propos de remarquer que cette valeur est aussi celle de la série divergente,

$$\frac{1}{2} + \frac{B_1}{2} - \frac{B_3}{4} + \frac{B_5}{5} - \frac{B_7}{7} + \text{etc.}$$

mais il faut entendre ici par la valeur d'une série divergente la quantité dont cette série tient la place, ou ce qui est la même chose,

la valeur de la fonction dont la série divergente offre le développement, soit général, soit particulier.

Pour faciliter les applications de l'expression de $S\frac{1}{x}$, aux différentes valeurs de x, nous rapporterons ici les valeurs des huit premiers nombres de Bernoulli, exprimés en décimales, savoir :

$$B_1 = 0{,}1666666666666$$
$$B_3 = 0{,}0333333333333$$
$$B_5 = 0{,}0238095238095$$
$$B_7 = 0{,}0333333333333$$
$$B_9 = 0{,}0757575757575$$
$$B_{11} = 0{,}2531135531135$$
$$B_{13} = 1{,}1666666666666$$
$$B_{15} = 7{,}0921568627451.$$

Supposons à présent que l'on demande la somme des 1000 premiers termes de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ etc. on trouvera, en faisant $x=1000$, que pour avoir cette somme avec treize décimales, il suffit de calculer les quatre premiers termes de l'expression de $S\frac{1}{x}$, et en observant que le logarithme népérien de 10 est 2,302585092994045 (*Introd.* n°. 24), on aura

pour $lx = l1000 = \quad 6{,}9077552789821$,

pour $+\frac{1}{2x} \quad = +0{,}0005000000000$

$-\frac{B_1}{2x^2} \quad = -0{,}0000000833333$

$+\frac{B^3}{4x^4} \quad = +0{,}0000000000000$

$+const. \quad = +0{,}5772156649015$;

ce qui donnera

$1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{1000} = \quad 7{,}4849708605503$,

résultat qui fait voir avec quelle lenteur marche la série proposée, quoique cependant la somme totale ou la limite en soit infinie, puisqu'elle se réduit à $S\frac{1}{x} = lx$, lorsque x est infinie.

Si l'on prend pour x un nombre très-grand, le premier terme et la constante suffiront seuls pour donner une valeur très-approchée de la somme entière de la série ; on aura donc

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{x}=\mathrm{l}x+C,$$

on aura à plus forte raison

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\ldots\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)+C;$$

retranchant la première série de la seconde, il viendra

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)-\mathrm{l}x=\mathrm{l}\left(\frac{x+y}{x}\right),$$

formule qui peut être utile pour trouver les logarithmes des nombres un peu considérables. On la rendra plus exacte en introduisant dans la somme des séries ci-dessus quelques-uns des termes qui suivent $\mathrm{l}x$ et $\mathrm{l}(x+y)$; on obtiendra de cette manière

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots\ldots+\frac{1}{x+y}=\mathrm{l}(x+y)-\mathrm{l}x+\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2(x+y)}-\dfrac{1}{2x}\\ -\dfrac{B_1}{2(x+y)^2}+\dfrac{B_1}{2x^2}\\ +\dfrac{B_3}{4(x+y)^4}-\dfrac{B_3}{4x^4}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}$$

et toutes les fois que l'on pourra négliger les termes divisés par les puissances $(x+y)$ et de x, supérieures à la première, on aura

$$\mathrm{l}\left(\frac{x+y}{x}\right)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\ldots\ldots+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+y}\right).$$

940. On déduit encore de l'expression de $S\frac{1}{x}$ quelques conséquences remarquables. Il est d'abord évident que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}\ldots\ldots+\frac{1}{mx}=\frac{1}{m}\left\{\mathrm{l}x+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_3}{4x^4}-\text{etc.}+C\right\};$$

en changeant x en mx, on a d'un autre côté, si m est un nombre entier,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{mx}=\mathrm{l}mx+\frac{1}{2mx}-\frac{B_1}{2m^2x^2}+\frac{B_3}{4m^4x^4}-\text{etc.}+C\};$$

si

si l'on retranche de cette série la précédente multipliée par m, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\ldots\ldots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}\ldots\ldots+\frac{1}{mx} \\ \qquad\qquad -\frac{m}{m} \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{m}{2m} \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{m}{mx} \end{array}\right\} =$$

$$\mathrm{l}\,m+\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2m}-1\right)-\frac{B_1}{2x^2}\left(\frac{1}{2m^2}-1\right)+\text{etc.}$$

équation dont le second membre se réduit à $\mathrm{l}\,m$, lorsque x est infini. En faisant successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc. on tirera de là

$$\mathrm{l}\,2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\text{etc.}$$
$$\mathrm{l}\,3=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{2}{9}+\text{etc.}$$
$$\mathrm{l}\,4=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{3}{8}+\text{etc.}$$
$$\mathrm{l}\,5=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{4}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{4}{10}+\text{etc.}$$

etc.

941. La série $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}+\frac{1}{3m+n}\ldots\ldots+\frac{1}{mx+n}$, qui comprend toutes celles dont le numérateur est constant, et dont le dénominateur ne renferme que la première puissance de la variable x, a pour somme

$$S\frac{1}{mx+n}=\frac{1}{m}\mathrm{l}(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{B_1 m^2}{2(mx+n)^2}+\frac{B_3 m^3}{4(mx+n)^4}$$
$$-\frac{B_5 m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{B_7 m^7}{8(mx+n)^7}-\text{etc.}+C.$$

Si l'on veut déterminer la constante de manière que la somme s'évanouisse lorsque $x=0$, il viendra

$$0=\frac{1}{m}\mathrm{l}\,n+\frac{1}{2n}-\frac{B_1 m^2}{2n^2}+\frac{B_3 m^3}{4n^4}-\text{etc.}+C.$$

942. Si nous considérons en général la série

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\ldots\ldots+\frac{1}{x^m},$$

nous aurons

$$S\frac{1}{x^m}=-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{2x^m}-\frac{mB_1}{2x^{m+1}}+\frac{m(m+1)(m+2)B_3}{2\cdot3\cdot4x^{m+3}}$$
$$-\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)B_5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6x^{m+5}}+\text{etc.}+C.$$

Cette série devient très-convergente lorsque x est un peu grand ; et on peut se servir utilement de cette propriété, pour déterminer la constante C, comme dans le n°. 939. Si l'on fait par exemple $m=2$, on aura

$$S\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{B_1}{x^3}+\frac{B_3}{x^5}-\frac{B_5}{x^7}+\text{etc.}+C,$$

et posant $x=10$, on obtiendra

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots+\frac{1}{10^2}=-\frac{1}{10}+\frac{1}{200}-\frac{1}{6000}+\frac{1}{3000000}-\text{etc.}+C,$$

d'où l'on tirera

$$C=1{,}64493406684822643\text{o},$$

en poussant la série du second membre jusqu'à son dixième terme.

Une circonstance très-digne de remarque, c'est que la valeur de C, à quelque degré d'exactitude que l'on porte l'approximation, se trouve la même que celle de $\frac{\pi^2}{6}$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre ou la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, et que la transcendante π entre aussi dans l'expression de la constante relative aux séries dont les termes généraux sont $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^6}$, etc. En attendant que nous démontrions rigoureusement la vérité de cette assertion, par la considération des produits composés d'un nombre indéfini de facteurs, on peut au moins la vérifier par approximation et de proche en proche, sur les séries indiquées précédemment.

Si l'on calcule aussi les valeurs de la constante dans les séries dont les termes généraux sont $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^5}$, etc. et qu'on les compare aux puissances π^3, π^5, etc. on aura, en portant l'exactitude à seize décimales et en observant que la constante donne la valeur de la série lorsque x est infini,

$$1+\frac{1}{2^2}+\text{etc.}=1,6449340668482264=\frac{\pi^2}{6}=\frac{2B_1}{1.2}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\text{etc.}=1,2020569031595942=\frac{1}{25,79436}\pi^3$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\text{etc.}=1,0823232337111381=\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^3B_3}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\text{etc.}=1,0369277551068632=\frac{1}{295,1215}\pi^5$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\text{etc.}=1,0173430619844491=\frac{\pi^6}{945}=\frac{2^5B_5}{1.2\ldots.6}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\text{etc.}=1,0083492773866018=\frac{1}{2995,286}\pi^7$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\text{etc.}=1,0040773561979443=\frac{\pi^8}{9450}=\frac{2^7B_7}{1.2\ldots.8}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\text{etc.}=1,0020083928260822=\frac{1}{29749,35}\pi^9$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\text{etc.}=1,0009945751278180=\frac{\pi^{10}}{93555}=\frac{2^9B_9}{1.2\ldots10}\pi^{10}$$

etc.

643. Il est bon de remarquer que ces valeurs donnent aussi les limites des séries

$$1+1-\frac{1}{2}+B_1-B_3+B_5-B_7+\text{etc.}=\frac{2B_1}{1.2}\pi^2.$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}B_1-\frac{5}{2}B_3+\frac{7}{2}B_5-\frac{9}{2}B_7+\text{etc.}=1,2020\ldots$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3.4}{2.3}B_1-\frac{5.6}{2.3}B_3+\frac{7.8}{2.3}B_5-\frac{9.10}{2.3}B_7+\text{etc.}=\frac{2^3B_3}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3.4.5}{2.3.4}B_1-\frac{5.6.7}{2.3.4}B_3+\frac{7.8.9}{2.3.4}B_5-\frac{9.10.11}{2.3.4}B_7+\text{etc.}=1,0369\ldots$$

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3.4.5.6}{2.3.4.5}B_1-\frac{5.6.7.8}{2.3.4.5}B_3+\frac{7.8.9.10}{2.3.4.5}B_5-\frac{9.10.11.12}{2.3.4.5}B_7+\text{etc.}=\frac{2^5B_5}{1.2\ldots6}\pi^6$$

etc.

qu'on obtient en faisant $x=1$, et successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, $m=5$, etc. dans la série dont le terme général est $\frac{1}{x^m}$.

Les mêmes valeurs conduisent aussi à insérer un moyen entre chacun des termes de la suite

$$B_1, \quad B_3, \quad B_5, \quad B_7, \quad B_9, \text{ etc.}$$

c'est-à-dire, à trouver les expressions des quantités qui seroient représentées par

$$B_2, \quad B_4, \quad B_6, \quad B_8, \text{ etc.}$$

En effet, B_1 et B_3 répondant aux séries $1+\frac{1}{2^2}+$ etc. et $1+\frac{1}{2^4}+$etc. B_2 doit répondre à la série intermédiaire $1+\frac{1}{2^3}+$etc. et d'après la loi, suivant laquelle sont formées les limites des deux premières, on doit avoir, pour la troisième, $\frac{2^2 B_2}{1.2.3}\pi^3$; on conclura de là

$$\frac{2^2 B_2}{1.2.3}\pi^3 = \frac{1}{25,79436}\pi^3, \quad \text{ou } B_2 = \frac{3}{2}\,\frac{1}{25,79436} = 0,05815227,$$

on arriveroit de même à B_4, B_6, etc.

944. Soit encore la série dérivée de $u=\frac{1}{n^2+x^2}$, on aura

$$\int \frac{dx}{n^2+x^2} = \frac{1}{n}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{n}\right) \quad (\text{n}^\circ.\ 366),$$

et si l'on prend $y = \text{arc}\left(\cot = \frac{x}{n}\right)$, il viendra

$$\int \frac{dx}{n^2+x^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\pi - y\right), \quad \frac{x}{n} = \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}, \quad \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{\sin y^2}{n^2}$$

$$dx = -n\,\frac{dy}{\sin y^2}, \quad d.\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{2dy \sin y \cos y}{n^2} = \frac{dy \sin 2y}{n^2},$$

d'où on conclura $\frac{du}{dx} = -\frac{\sin y^2 \sin 2y}{n^3}$; on obtiendra ensuite

$$\frac{d^2u}{dx} = -\frac{2dy\,(\sin y \cos y \sin 2y + \sin y^2 \cos 2y)}{n^3},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2(\sin y^3 \cos y \sin 2y + \sin y^4 \cos 2y)}{n^4} = \frac{2 \sin y^3 \sin 3y}{n^4};$$

on trouvera de même

$$\frac{d^3u}{dx^3} = -\frac{2.3 \sin y^4 \sin 4y}{n^5}, \quad \frac{d^4u}{dx^4} = \frac{2.3.4 \sin y^5 \sin 5y}{n^6}, \text{ etc.}$$

et l'on aura par conséquent

$$S\frac{1}{n^2+x^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\pi-y\right)+\frac{\sin y^2}{2n^2}-\frac{B_1}{2}\,\frac{\sin y^2\sin 2y}{n^3}+\frac{B_3}{4}\,\frac{\sin y^4\sin 4y}{n^5}$$
$$-\frac{B_5}{6}\,\frac{\sin y^6\sin 6y}{n^7}+\text{etc.}+C.$$

Pour appliquer cette série à des cas particuliers, il faut auparavant en déterminer la constante C. Il semble d'abord qu'on peut effectuer cette opération, en partant de la supposition de $x=0$, de laquelle il résulte $y=\frac{1}{2}\pi$, $\sin y=1$, $\sin 2y=0$, $\sin 4y=0$, etc. et par conséquent $\frac{1}{2n^2}+C=0$, ou $C=-\frac{1}{2n^2}$; mais cette valeur de la constante n'est pas complète, car si on faisoit x infini, ce qui donneroit $y=0$, on trouveroit pour la limite de la série proposée $\frac{\pi}{2n}+C$, ou $\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2n^2}$, tandis que nous montrerons dans la suite que la vraie valeur de cette limite est $\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$.

Nous expliquerons alors à quoi tient le paradoxe que nous faisons remarquer ici, et dès à présent nous prendrons en conséquence $C=-\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$; par ce changement l'expression de $S\frac{1}{n^2+x^2}$ deviendra applicable à tous les cas.

945. Occupons-nous maintenant des séries dont le terme général est une fonction transcendante; soit $n=\mathrm{l}\,x$, nous aurons

$$S\mathrm{l}x=x\mathrm{l}x-x+\frac{1}{2}\mathrm{l}x+\frac{B_1}{1.2x}-\frac{B_3}{3.4x^3}+\frac{B_5}{5.6x^5}-\text{etc.}+C,$$

en observant que $\int dx\,\mathrm{l}x=x\,\mathrm{l}x-x$ (n°. 425).

On ne sauroit encore ici déterminer la constante en faisant $x=1$, parce que le second membre n'offre alors qu'une série divergente; mais en faisant $x=10$, calculant la somme des dix premiers termes de ce membre, et l'égalant à celle que donnent les logarithmes népériens des dix premiers nombres, on trouvera

$$C=0{,}9189385332047,$$

à moins d'une unité décimale du troisième ordre, valeur qui sera par conséquent la limite de la série divergente

$$1-\frac{B_1}{1.2}+\frac{B_3}{3.4}-\frac{B_5}{5.6}+\text{etc.}$$

L'expression $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12\,\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}$ que l'on doit à Wallis, et que nous déduirons dans la suite d'une manière bien simple de l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, conduit à la vraie valeur de la constante C. Pour cela il faut observer qu'en passant aux logarithmes, et s'arrêtant à un nombre x de facteurs, on obtient

$$l\pi-l2=\begin{cases}2l2+2l4+2l6+2l8+2l10\ldots+2l(2x-2)+l2x\\-l1-2l3-2l5-2l7-2l9\ldots.-2l(2x-3)+(2x-1)\end{cases}$$

et qu'en prenant les limites dans la supposition de x infini, on trouvera par le moyen de l'expression précédente de $Sl x$

$$l1+l2+l3+l4+l5\ldots.+lx=C+(x+\tfrac{1}{2})lx-x$$
$$l1+l2+l3+l4+l5\ldots.+l2x=C+(2x+\tfrac{1}{2})l2x-2x$$
$$l2+l4+l6+l8+l10\ldots+l2x=Slx+xl2=C+(x+\tfrac{1}{2})lx+xl2-x.$$

Retranchant la troisième série de la seconde, il vient

$$l1+l3+l5+l7\ldots.+l(2x-1)=xlx+(x+\tfrac{1}{2})l2-x,$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{matrix}2l2+2l4+2l6\ldots+2l(2x-2)+l2x\\-2l1-2l3-2l5\ldots-2l(2x-3)+2l(2x-1)\end{matrix}\right\}=\begin{cases}2C+2(x+\frac{1}{2})lx+2xl2-2x-l2x\\-2xlx-2(x+\frac{1}{2})l2+2x\end{cases}$$

et comme le premier membre de cette équation est égal à $l\pi-l2$, on obtient, d'après la réduction du second, $l\pi-l2=2C-2l2$,

d'où $C=\frac{1}{2}(l\pi+l2)=\frac{1}{2}l2\pi=l\sqrt{2\pi}$,

résultat bien remarquable et d'après lequel on a

$$Slx=\tfrac{1}{2}l2\pi+xlx-x+\tfrac{1}{2}lx+\frac{B_1}{1.2x}-\frac{B_3}{3.4x^3}+\frac{B_5}{5.6x^5}-\text{etc.}$$

On rendra cette équation propre à un système quelconque de logarithmes, en multipliant par le module les termes $\frac{B_1}{1.2x}$, $\frac{B_3}{3.4x^3}$, etc. dans lesquels il n'entre point de logarithmes.

946. Proposons-nous pour exemple de trouver la somme des logarithmes des 1000 premiers nombres des tables, c'est-à-dire, la valeur de $l1+l2+l3\ldots\ldots+l1000$. La caractéristique l désignant ici des logarithmes ordinaires, dont le module sera pour abréger représenté par M, on aura $x=1000$, d'où on conclura

$$\begin{array}{lcl}
x\,l\,x & = & 3000{,}0000000000000 \\
+\frac{1}{2}\,l\,x = & & 1{,}5000000000000 \\
+\frac{1}{2}\,l\,2\pi & = & 0{,}3990899341790 \\
-\ M\,x & =- & 434{,}2944819032518 \\
+\dfrac{MB_1}{1.2x} & =+ & 0{,}0000361912068 \\
-\dfrac{MB_3}{3.4x^3} & =- & 0{,}0000000000012,
\end{array}$$

résultat.............2567,6046442221328 :

mais $l1+l2+l3\ldots\ldots+l1000 = l.1.2.3\ldots1000 = l[1000]^{1000}$;

il s'ensuit que $l[1000]^{1000} = 2567{,}6046442221328$.

L'on apprend par là que le nombre $[1000]^{1000}$, dont le calcul est presque impraticable, doit avoir 2568 chiffres, et que les dix premiers chiffres sur la gauche sont 4023872600, en sorte qu'il est compris entre les nombres qui résultent de 4023872600 et de 4023872601, suivis chacun de 2558 zéros. Cette connoissance suffit dans beaucoup de recherches, où l'on ne demande que les rapports des produits de grands nombres; et dans ce cas la valeur approchée de ces rapports devient précieuse par l'impossibilité où l'on est d'effectuer les calculs nécessaires pour arriver à la valeur exacte. La longueur de ces calculs devient alors un obstacle aussi insurmontable que la difficulté d'exprimer rigoureusement une fonction transcendante. Laplace a beaucoup étendu cette recherche, dont les applications sont très-fréquentes dans le calcul des probabilités, mais comme il s'appuie sur des considérations différentes de celles qui nous occupent maintenant, c'est plus bas que nous rendrons compte de ses travaux sur ce sujet.

947. En suivant Euler, nous allons montrer comment on parvient à

trouver le coefficient quelconque d'une très-haute puissance du binome et le rapport que l'un quelconque des termes de cette puissance a avec la somme de tous ceux qui la composent.

Le terme général du développement de $(a+b)^m$ étant $[m]^{n}[0]^{-n}a^{m-n}b^{n}$, son coefficient $[m]^{n}[0]^{-n}$ peut être changé en

$$[m]^{m}[0]^{-n}[0]^{-(m-n)}=\frac{[m]^{m}}{[n]^{n}[m-n]^{m-n}} \text{ (n°. 902)},$$

et passant aux logarithmes il vient

$$\mathrm{l}[m]^{n}[0]^{-n}=\mathrm{l}[m]^{m}-\mathrm{l}[n]^{n}-\mathrm{l}[m-n]^{m-n};$$

or on a par le n°. 945,

$$\mathrm{l}[m]^{m}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(m+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}m-m+\frac{B_1}{1.2m}-\frac{B_3}{3.4m^3}+\frac{B_5}{5.6m^5}-\text{etc.}$$

$$\mathrm{l}[n]^{n}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}n-n+\frac{B_1}{1.2n}-\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_5}{5.6n^5}-\text{etc.}$$

$$\mathrm{l}[m-n]^{m-n}=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi+(m-n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}(m-n)-m+n+\frac{B_1}{1.2(m-n)}-\frac{B_3}{3.4(m-n)^3}+\text{etc.}$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{l}\frac{[m]^{m}}{[n]^{n}[m-n]^{m-n}}=-\tfrac{1}{2}\mathrm{l}2\pi&+(m+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}m-(n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}n-(m-n+\tfrac{1}{2})\mathrm{l}(m-n)\\&+\frac{B_1}{1.2m}-\frac{B_1}{1.2n}-\frac{B_1}{1.2(m-n)}\\&-\frac{B_3}{3.4m^3}+\frac{B_3}{3.4n^3}+\frac{B_3}{3.4(m-n)^3}\\&+\text{etc.}\end{aligned}\right\}$$

Lorsque l'on fait $n=\frac{m}{2}$, quand n est pair, on tombe sur le terme qui occupe le milieu du développement de la puissance de $a+b$, et qui est affecté de $a^n b^n$; son coefficient est exprimé par $\frac{[2n]^{2n}}{([n]^{n})^2}$, le

la formule ci-dessus donne pour son logarithme

$$\left.\begin{array}{l} 1\dfrac{\overset{2n}{[2n]}}{(\overset{n}{[n]})^2} = -\tfrac{1}{2}1\pi - \tfrac{1}{2}1n + 2n12 + \dfrac{B_1}{1.2.2n} - \dfrac{B^3}{3.4.2^3n^3} + \dfrac{B_5}{5.6.2^5n^5} - \text{etc.} \\ \qquad\qquad - \dfrac{2B_1}{1.2.n} + \dfrac{2B_3}{3.4n^3} - \dfrac{2B_5}{5.6n^5} + \text{etc.} \end{array}\right\},$$

expression que l'on peut changer en

$$1\frac{\overset{2n}{[2n]}}{(\overset{n}{[n]})^2} = 1\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3B_1}{1.2.2n} + \frac{15B_3}{3.4.2^3n^3} - \frac{63B_5}{5.6.2^5n^5} + \text{etc.}$$

si l'on passe des logarithmes aux nombres, on aura

$$\frac{\overset{2n}{[2n]}}{(\overset{n}{[n]})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} . e^{-\frac{3B_1}{1.2.2n}} . e^{\frac{15B_3}{3.4.2^3n^3}} . e^{-\frac{63B_5}{5.6.2^5n^5}} . \text{ etc.}$$

Il est facile maintenant de développer cette série suivant les puissances de n, en substituant à chaque quantité exponentielle la série qui lui est égale; mais nous n'effectuerons point ce calcul, parce que la forme logarithmique est la plus commode pour les applications.

Si l'on se proposoit par exemple d'obtenir le rapport du coefficient moyen de la puissance $2n$ du binome à la somme de tous les autres, on feroit a et $b=1$, d'où $(a+b)^{2n}=2^n$; le logarithme du rapport cherché auroit pour expression

$$1\frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3B_1}{1.2.2n} + \frac{15B_3}{3.4.2^3n^3} - \frac{63B_5}{5.6.2^5n^5} + \text{etc.}$$

En prenant, par exemple, $2n=100$, on trouvera par cette formule le rapport de 1 à 0,0795892.

948. Soit $u=a^x$; la formule $Su=\int u\,dx+\frac{1}{2}u+$ etc. donnera

$$Sa^x = a^x\left\{\frac{1}{1a} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2}1a - \frac{B_3}{2.3.4}(1a)^3 + \frac{B_5}{2.3.4.5.6}(1a)^5 - \text{etc.}\right\} + C.$$

En faisant $Sa^x=0$, lorsque $x=0$, on trouvera

$$C = -\left\{\frac{1}{1a} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2}1a - \frac{B_3}{2.3.4}(1a)^3 + \frac{B_5}{2.3.4.5.6}(1a)^5 - \text{etc.}\right\},$$

et on aura par conséquent

$$Sa^x=(a^x-1)\left\{\frac{1}{la}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}la-\frac{B_3}{2.3.4}(la)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(la)^5-\text{etc.}\right\};$$

mais on sait d'ailleurs que $Sa^x=\frac{(a^x-1)a}{a-1}$ (n°. 933): on conclura donc de ce qui précède que

$$\frac{a}{a-1}=\frac{1}{la}+\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}la-\frac{B_3}{2.3.4}(la)^3+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(la)^5-\text{etc.}$$

d'où on tirera

$$\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{2}\right)la=1+\frac{B_1}{2}(la)^2-\frac{B_3}{2.3.4}(la)^4+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}(la)^6-\text{etc.}$$

équation dont le premier membre se réduit à $\frac{(a+1)la}{2(a-1)}$, et donne, comme on voit, la somme d'une série très-remarquable.

949. Si l'on prend $u=\sin ax$, on obtiendra, par la formule

$$Su=\int u\,dx+\tfrac{1}{2}u+\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} S\sin ax=-\frac{1}{a}\cos ax+\frac{1}{2}\sin ax+\frac{B_1a}{2}\cos ax+\frac{B_3a^3}{2.3.4}\cos ax \\ \qquad +\frac{B_5a^5}{2.3.4.5.6}\cos ax+\text{etc.}+C \end{array}\right\}.$$

Dans le cas où $x=0$, on a $S\sin ax=0$, d'où il suit

$$C=\frac{1}{a}-\frac{B_1a}{2}-\frac{B_3a^3}{2.3.4}-\frac{B_5a^5}{2.3.4.5.6}-\text{etc.}$$

et par conséquent

$$S\sin ax=\tfrac{1}{2}\sin ax+(1-\cos ax)\left\{\frac{1}{a}-\frac{B_1a}{2}-\frac{B_3a^3}{2.3.4}-\frac{B_5a^5}{2.3.4.5.6}-\text{etc.}\right\}.$$

Mais puisque $\Sigma\sin ax=-\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a}$ (n°. 908), il vient

$$S\sin ax=-\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a}+\sin ax+\textit{const.}$$

$$=-\frac{\cos ax\cos\frac{1}{2}a-\sin ax\sin\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a}+\frac{\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sin ax+\frac{\cos\frac{1}{2}a(1-\cos ax)}{2\sin\frac{1}{2}a},$$

en déterminant la constante pour que cette dernière expression de $S \sin ax$ s'évanouisse, ainsi que la première, lorsque $x = 0$.

La comparaison de l'une avec l'autre donne

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2.3.4} - \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6} - \text{etc.}$$

On parviendroit au même résultat en partant de $S \cos ax$.

950. En général, si dans les formules

$$\Sigma \sin(p + qx) = -\frac{\cos(p + qx - \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

$$\Sigma \cos(p + qx) = \frac{\sin(p + qx - \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + const.$$

on change x en $x + h$, et qu'on détermine ensuite la constante arbitraire, de manière que les résultats soient respectivement $\sin p$ et $\cos p$ lorsque $x = 0$, on aura

$$S \sin(p + qx) = -\frac{\cos(p + qx + \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} + \frac{\cos(p - \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh}$$

$$S \cos(p + qx) = \frac{\sin(p + qx + \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh} - \frac{\sin(p - \frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{1}{2}qh}.$$

La formule $\quad SPQ = Q(P + \Sigma P) - \Delta Q \Sigma^2 P_1 + \text{etc.}$ conduit au même résultat que celui qu'on déduiroit des expressions du n°. 909, et donne la somme de toutes les séries dont le terme général est le produit de $\sin(p + qx)$, ou de $\cos(p + qx)$, par une fonction rationnelle et entière de x; et pour étendre ce procédé aussi loin qu'il peut aller, il ne faut pas oublier que toute fonction rationnelle et entière de sinus et de cosinus se ramène à des sinus et à des cosinus d'arcs multiples.

951. Il paroît difficile au premier coup d'œil de trouver ce que deviennent les expressions de $S \sin(p + qx)$ et de $S \cos(p + qx)$, lorsqu'on y suppose x infini; car on ne voit pas quelles peuvent être, dans cette hypothèse, les valeurs des fonctions $\cos(p + qx + \frac{1}{2}qh)$ et de $\sin(p + qx + \frac{1}{2}qh)$, qui pourtant ne sont pas susceptibles de devenir infinies, puisque le sinus et le cosinus ne sauroient surpasser le rayon. Cette difficulté, agitée d'abord entre Daniel Bernoulli et Euler, paroît avoir été suffisamment éclaircie par Lexell (*Novi Comment. Acad. Petrop.* T. XVIII).

Il faut observer premièrement que la série

$$\sin p + \sin(p+q) + \sin(p+2q) \ldots + \sin(p+qx)$$

est périodique, c'est-à-dire, que ses termes redeviennent successivement les mêmes, et qu'en conséquence les diverses sommes partielles deviennent nulles, à la fin de chacune de ces périodes. En effet, l'expression de $S(p+qx)$, qui se réduit à

$$S\sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+(x+\frac{1}{2})q)}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q},$$

lorsqu'on prend $h=1$, s'évanouit pour toutes les valeurs de x données par l'équation

$$p+(x+\tfrac{1}{2})q = 2m\pi + p - \tfrac{1}{2}q \text{ ou } (x+1)q = 2m\pi,$$

dans laquelle $2m\pi$ désigne un multiple quelconque de la circonférence du cercle dont le rayon $=1$. Si le rapport de π à q est celui de deux nombres rationnels, on aura évidemment une infinité de valeurs de x, pour chacune desquelles l'expression de $S(\sin p + qx)$ s'évanouira.

Cette expression étant ainsi susceptible d'un nombre indéfini de périodes ne sauroit avoir de limites déterminées; mais il est important de remarquer que si l'on prend le milieu entre les différens résultats que l'on en déduit pour toutes les valeurs de x, on tombera sur une expression dont le développement en série sera identique avec la proposée. Pour cela on fera successivement

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \ldots x=n,$$

dans $S(p+qx)$, et on obtiendra

$$-\frac{\cos(p+\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$$

$$-\frac{\cos(p+\frac{3}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$$

$$-\frac{\cos(p+\frac{5}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$$

....

$$-\frac{\cos(p+\frac{2n+1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} + \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q};$$

la valeur moyenne résultante de ces valeurs particulières dont le nombre est $n+1$, sera exprimée par la série

$$\frac{(n+1)\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}-\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}\left\{\cos(p+\tfrac{1}{2}q)+\cos(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\cos(p+\frac{2n+1}{2}q)\right\}.$$

La somme de la série, renfermée entre les accolades, s'obtient en écrivant $p+\frac{1}{2}q$, à la place de p, dans l'expression de $S\cos(p+qx)$ et en y faisant $x=n$ et $h=1$, ce qui donne

$$\frac{\sin(p+(n+1)q)}{2\sin\frac{1}{2}q}-\frac{\sin p}{2\sin\frac{1}{2}q}=\frac{\cos(p+(\frac{1}{2}n+1)q)\sin\frac{1}{2}(n+1)q}{\sin\frac{1}{2}q},$$

quantité nulle dans l'hypothèse actuelle, puisque $\frac{1}{2}(n+1)q$ est un multiple de la demi-circonférence: le résultat précédent se réduit donc à $\dfrac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$. Telle est l'expression que Daniel Bernoulli regardoit comme la somme ou la limite de la série

$$\sin p+\sin(p+q)+\sin(p+2q)+\text{etc.}$$

continuée indéfiniment, mais qui n'en est, à proprement parler, que le développement (*Int.* n°. 4), ainsi que l'on peut s'en convaincre, en formant l'équation

$$\frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}=\sin p+\sin(p+q)+\sin(p+2q)+\text{etc.}$$

de laquelle on tire d'abord

$$\cos(p-\tfrac{1}{2}q)=2\sin p\sin\tfrac{1}{2}q+2\sin(p+q)\sin\tfrac{1}{2}q+2\sin(p+2q)\sin\tfrac{1}{2}q+\text{etc.}$$

puis

$$\begin{aligned}\cos(p-\tfrac{1}{2}q)=\cos(p-\tfrac{1}{2}q)+\cos(p+\tfrac{1}{2}q)+\cos(p+\tfrac{3}{2}q)+\cos(p+\tfrac{5}{2}q)+\text{etc.}\\ -\cos(p+\tfrac{1}{2}q)-\cos(p+\tfrac{3}{2}q)-\text{etc.}\end{aligned}$$

en mettant pour les produits de sinus leurs expressions connues; les deux membres de ce résultat deviennent identiques, abstraction faite du dernier terme, ainsi que cela arrive dans le développement des fonctions en séries divergentes (*Int.* n°. 5).

Cette dernière transformation donne un moyen aussi élégant que facile de parvenir à l'expression de $S\sin(p+qx)$. En effet, si on multiplie par $2\sin\frac{1}{2}q$ les deux membres de l'équation

$$S\sin(p+qx)=\sin p+\sin(p+q)+\sin(p+2q)\ldots\ldots+\sin(p+qx),$$

elle devient $2\sin\frac{1}{2}q S\sin(p+qx) =$

$$2\sin p\sin\frac{1}{2}q + 2\sin(p+q)\sin\frac{1}{2}q + 2\sin(p+2q)\sin\frac{1}{2}q \ldots + 2\sin(p+qx)\sin\frac{1}{2}q,$$

et se transforme en $2\sin\frac{1}{2}q S\sin(p+qx) =$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(p-\frac{1}{2}q)+\cos(p+\frac{1}{2}q)\ldots+\cos(p+(x-\frac{1}{2})q)\\ -\cos(p+\frac{1}{2}q)\ldots-\cos(p+(x-\frac{1}{2})q)-\cos(p+(x+\frac{1}{2})q)\end{array}\right\},$$

d'où l'on conclut

$$S\sin(p+qx) = \frac{\cos(p-\frac{1}{2}q)-\cos(p+(x+\frac{1}{2})q)}{2\sin\frac{1}{2}q}.$$

952. En appliquant à l'expression de $S\cos(p+qx)$ et à la série

$$\cos p + \cos(p+q) + \cos(p+2q) + \cos(p+3q) + \text{etc.}$$

les raisonnemens et les opérations du n°. précédent, on parvient à des conclusions analogues. On trouve d'abord que la valeur moyenne de toutes les sommes particulières déduites de

$$S\cos(p+qx) = \frac{\sin(p+(x+\frac{1}{2})q)}{2\sin\frac{1}{2}q} - \frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$$

donne la quantité

$$-\frac{(n+1)\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q} + \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{1}{2}q}\left\{\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\sin\left(p+\frac{2n+1}{2}\right)q\right\}.$$

La somme de la série comprise entre les accolades se tirant de l'expression de $S\sin(p+qx)$, en y changeant p en $p+\frac{1}{2}q$, et en y faisant $h=1$, $x=n$, est

$$\frac{\cos p}{2\sin\frac{1}{2}q} - \frac{\cos(p+(n+1)q)}{2\sin\frac{1}{2}q} = \frac{\sin(p+\frac{1}{2}(n+1)q)\sin\frac{1}{2}(n+1)q}{\sin\frac{1}{2}q}$$

et s'évanouit nécessairement lorsque l'équation $(n+1)q = 2m\pi$ a lieu. On a donc encore dans cette circonstance $-\frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q}$; et on prouve que le développement de cette fonction reproduit en effet la série proposée, en multipliant par $2\sin\frac{1}{2}q$ les deux membres de l'équation

$$-\frac{\sin(p-\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q} = \cos p + \cos(p+q) + \cos(p+2q) + \text{etc.}$$

qui devient alors

$$-\sin(p-\tfrac{1}{2}q) = 2\sin\tfrac{1}{2}q\cos p + 2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+q) + 2\sin\tfrac{1}{2}q\cos(p+2q) + \text{etc.},$$

se change en

$$-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)=-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)+\sin(p+\tfrac{5}{2}q)+\text{etc.}$$
$$-\sin(p+\tfrac{1}{2}q)-\sin(p+\tfrac{3}{2}q)-\text{etc.}$$

lorsqu'ou y met pour les produits de sinus et de cosinus leurs valeurs, et devient par conséquent identique si on la considère comme indéfinie.

On arrive aussi à l'expression de $S\cos(p+qx)$, en multipliant par $2\sin\frac{1}{2}q$, les deux membres de l'équation

$$S\cos(p+qx)=\cos p+\cos(p+q)+\cos(p+2q)+\ldots+\cos(p+qx),$$

on forme de cette manière l'équation $2\sin\frac{1}{2}qS\cos(p+qx)=$
$2\sin\frac{1}{2}q\cos p+2\sin\frac{1}{2}q\cos(p+q)+2\sin\frac{1}{2}q\cos(p+2q)\ldots+2\sin\frac{1}{2}q\cos(p+qx)$,
équivalente à cette autre : $2\sin\frac{1}{2}qS\cos(p+qx)=$

$$-\sin(p-\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{1}{2}q)+\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots+\sin(p+(x-\tfrac{1}{2})q)+\sin(p+qx+\tfrac{1}{2}q)$$
$$-\sin(p+\tfrac{1}{2}q)-\sin(p+\tfrac{3}{2}q)\ldots-\sin(p+(x-\tfrac{1}{2})q),$$

de laquelle on tire

$$S\cos(p+q)x=\frac{-\sin(p-\frac{1}{2}q)+\sin(p+qx+\frac{1}{2}q)}{2\sin\frac{1}{2}q},$$

résultat conforme à celui du n°. 950.

953. La sommation des suites a conduit Euler à des interpolations très-élégantes dont nous allons donner une idée. Il faut d'abord observer que certaines suites représentent des fonctions que l'on ne sauroit exprimer d'aucune autre manière, et dont on n'a pas même les différentielles ; Euler les appelle *functiones inexplicabiles*. La première recherche à faire est celle de leurs différentielles dont on obtient des valeurs approchées par le moyen des formules du n°. 932.

Application de la sommation des séries à l'interpolation.

Supposons, par exemple, que l'on demande les différentielles de la fonction qui exprime la somme de la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{x},$$

fonction dont on ne sauroit avoir l'expression indéfinie, mais dont la valeur approchée est

$$lx+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_3}{4x^4}-\frac{B_5}{6x^6}+\text{etc.}+C\ (\text{n}^\circ.\ 939),$$

en désignant cette fonction par U, on aura

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{B_1}{x^3}-\frac{B_3}{x^5}+\frac{B_5}{x^7}-\text{etc.}$$

série qui donnera avec d'autant plus d'exactitude la valeur du coefficient différentiel que celle de x sera plus grande.

En général, la formule

$$Su=\int u\,dx+\frac{1}{2}u+\frac{B_1}{2}\frac{du}{dx}-\frac{B_3}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}\frac{d^5u}{dx^5}-\text{etc.}+\mathit{const.}$$

donnera

$$\frac{dU}{dx}=u+\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+\frac{B_1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{B_3}{2.3.4}\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{B_5}{2.3.4.5.6}\frac{d^6u}{dx^6}-\text{etc.}$$

si l'on fait $Su=U$.

On appliquera de même à cette recherche les autres formules du n°. 932, et par leur moyen, on obtiendra le développement de la valeur que prend U, lorsque x se change en $x+\omega$, ordonné suivant les puissances de ω.

954. Euler est aussi parvenu au même développement sans le secours des formules citées, et par des considérations qu'il est bon de connoître.

Soit S la somme de la série

$$A,\ B,\ C,\ D,\ldots\ldots\ldots\ldots X,$$

correspondante aux indices

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots\ldots\ldots x,$$

S_ω et X_ω, ce que deviennent cette somme et le terme général, lorsque x se change en $x+\omega$, et désignons, comme à l'ordinaire, par S_1, S_2, ... X_1, X_2, etc. les valeurs de S et de X, correspondantes à $x+1$, $x+2$, etc. Cela posé, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} S_1=S+X_1 \\ S_2=S+X_1+X_2 \\ S_3=S+X_1+X_2+X_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n=S+X_1+X_2\ldots\ldots+X_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_{\omega+1}=S_\omega+X_{\omega+1} \\ S_{\omega+2}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2} \\ S_{\omega+3}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}+X_{\omega+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{\omega+n}=S_\omega+X_{\omega+1}+X_{\omega+2}\ldots+X_{\omega+n}. \end{array}$$

Maintenant

Maintenant il faut examiner la forme que prend la série dans les termes très-éloignés du premier, afin de connoître la limite vers laquelle elle tend sans cesse. Si, par exemple, ses termes consécutifs approchoient de plus en plus de l'égalité, de manière qu'en supposant l'indice n très-grand, on eût, avec une exactitude toujours croissante, $X_n = X_{n+1}$, $X_{n+1} = X_{n+2}$, etc. on en concluroit

$$S_{n+p} = S_n + X_{n+1} + X_{n+2} \ldots + X_{n+p} = S_n + pX_{n+1},$$

et par conséquent $S_{n+\omega} = S_n + \omega X_{n+1}$. En égalant cette expression de $S_{\omega+n}$ à celle qu'on trouve dans le tableau ci-dessus, on obtiendra

$$S_n + \omega X_{n+1} = S\omega + X_{\omega+1} + X_{\omega+2} \ldots + X_{\omega+n};$$

mettant pour S_n son développement, et tirant la valeur de $S\omega$, on aura

$$S\omega = S + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \ldots + X_n + \omega X_{n+1}$$
$$- X_{\omega+1} - X_{\omega+2} - X_{\omega+3} - X_{\omega+4} \ldots - X_{\omega+n}.$$

Cette formule étant appliquée à la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{x}$, donne

$$S\omega = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \ldots + \frac{1}{x+n} + \frac{\omega}{x+n+1}$$
$$- \frac{1}{x+\omega+1} - \frac{1}{x+\omega+2} - \frac{1}{x+\omega+3} \ldots - \frac{1}{x+\omega+n},$$

ou

$$S\omega = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)} + \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{etc.}$$

en négligeant le terme correspondant à ωX_{n+1}; ce résultat sera d'autant plus exact que x sera plus grand et ω plus petit.

Pour le développer suivant les puissances de ω, on observera que

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+3)^4} + \text{etc.}$$

etc.

et on aura ensuite

$$S_\omega = S + \omega\left\{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\text{etc.}\right\}$$
$$-\omega^2\left\{\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$+\omega^3\left\{\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+\text{etc.}\right\}$$
$$-\text{etc.}$$

comparant cette formule avec la série

$$S_\omega = S + \frac{dS}{dx}\,\frac{\omega}{1} + \frac{d^2S}{dx^2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3S}{dx^3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

qui résulte du théorême de Taylor, on en conclura

$$\frac{dS}{dx} = +\ 1.\left\{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\text{etc.}\right\}$$
$$\frac{d^2S}{dx^2} = -\ 1.2\left\{\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$\frac{d^3S}{dx^3} = +\ 1.2.3\left\{\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+\text{etc.}\right\}$$

etc.

Considérons encore la série

$$S = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} \ldots\ldots + \frac{1}{x^m};$$

nous obtiendrons, par les formules précédentes,

$$X_1 - X_{\omega+1} = \frac{1}{(x+1)^m} - \frac{1}{(x+1+\omega)^m}$$
$$= \frac{m\omega}{(x+1)^{m+1}} - \frac{m(m+1)\omega^2}{2(x+1)^{m+2}} + \frac{m(m+1)(m+2)\omega^3}{2.3(x+1)^{m+3}} - \text{etc.}$$
$$X_2 - X_{\omega+2} = \frac{1}{(x+2)^m} - \frac{1}{(x+2+\omega)^m}$$
$$= \frac{m\omega}{(x+2)^{m+1}} - \frac{m(m+1)\omega^2}{2(x+2)^{m+2}} + \frac{m(m+1)(m+2)\omega^3}{2.3(x+2)^{m+3}} - \text{etc.}$$

etc.

et l'équation

$$S\omega - S = m\omega\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+1}} + \frac{1}{(x+2)^{m+1}} + \frac{1}{(x+3)^{m+1}} + \text{etc.}\right\}$$
$$-\frac{m(m+1)\omega^2}{1.2}\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+2}} + \frac{1}{(x+2)^{m+2}} + \frac{1}{(x+3)^{m+2}} + \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{m(m+1)(m+2)m\omega^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{(x+1)^{m+3}} + \frac{1}{(x+2)^{m+3}} + \frac{1}{(x+3)^{m+3}} + \text{etc.}\right\}$$
etc.

de laquelle nous déduirons comme ci-dessus les valeurs de

$$\frac{dS}{dx}, \quad \frac{d^2S}{dx^2}, \quad \frac{d^3S}{dx^3}, \text{ etc.}$$

955. En général, on a

$$X_\omega = X + \frac{dX}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$X_{\omega+1} = X_1 + \frac{dX_1}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
etc.

d'où l'on tire

$$S_\omega = S_n + \omega X_{n+1} - \frac{\omega}{1}\,\frac{d\{X_1+X_2+X_3+X_4+\text{etc.}\}}{dx}$$
$$-\frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2\{X_1+X_2+X_3+X_4+\text{etc.}\}}{dx^2}$$
$$-\frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\{X_1+X_2+X_3+X_4+\text{etc.}\}}{dx^3}$$
etc.

Si le terme X_{n+1} ne s'évanouit pas, comme dans les exemples du n°. précédent, lorsqu'on fait n infini, on observera que

$$X_{n+1} = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_4 - X_3) + \text{etc.}$$

et l'on substituera, au lieu de X_{n+1}, le second membre de cette équation qui forme une série convergente, puisque les termes X_1, X_2, X_3, etc. sont supposés tendre vers l'égalité.

En prenant $x = 0$, il vient

$$X_1 = A, \quad X_2 = B, \quad X_3 = C, \text{ etc.}$$

si l'on représente par D', D'', etc. ce que deviennent dans la même hypothèse les séries

$$\frac{d\{X_1+X_2+X_3+\text{etc.}\}}{dx}, \quad \frac{d^2\{X_1+X_2+X_3+\text{etc.}\}}{dx^2}, \text{ etc.}$$

que l'on écrive S_x, au lieu de S, et $S_{x+\omega}$, au lieu de S_ω, on aura $S_x=0$, et par conséquent

$$S_\omega = \{A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.}\}\,\omega - \frac{D'\omega}{1} - \frac{D''\omega^2}{1.2} - \frac{D'''\omega^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Il est visible que l'on peut changer ω en x dans cette dernière expression, qui devenant par là

$$S_x = \{A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.}\}\,x - \frac{D'x}{1} - \frac{D''x^2}{1.2} - \frac{D'''x^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

donnera

$$\frac{dS_x}{dx} = \left\{\begin{array}{l} A+(B-A)+(C-B)+(D-C)+\text{etc.} \\ -D' - \frac{D''x}{1} - \frac{D'''x^2}{1.2} - \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\frac{d^2S_x}{dx^2} = -D'' - \frac{D'''x}{1} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^3S_x}{dx^3} = -D''' - \text{etc.}$$

etc.

956. La méthode que nous venons d'exposer s'étend au cas où les différences d'un ordre quelconque des termes de la série $A, B, C, D, \ldots X$, tendent sans cesse vers l'égalité ; et l'application que nous allons en faire, au cas où les différences premières de X deviennent constantes, suffira pour montrer comment on doit se conduire dans tous les autres.

Désignons trois sommes successives par S_n, S_{n+1}, S_{n+2} ;
leurs différences premières seront X_{n+1} X_{n+2},
leur différence seconde sera donc $X_{n+2} - X_{n+1}$,

et on aura par les formules du n°. 860,

$$S_{n+\omega} = S_n + \omega X_{n+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{n+2} - X_{n+1});$$

mettant dans cette équation, au lieu de $S_{n+\omega}$ et de S_n, leurs développemens respectifs, on obtiendra la suivante

$$S\omega + X_{\omega+1} + X_{\omega+2} + X_{\omega+3} \ldots + X_{\omega+n}$$

$$= S + X_1 + X_2 + X_3 \ldots\ldots + X_n + \omega X_{n+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{n+2} - X_{n+1}),$$

d'où l'on tirera

$$S\omega = S + (X_1 - X_{\omega+1}) + (X_2 - X_{\omega+2}) \ldots\ldots + (X_n - X_{\omega+n})$$

$$+ \omega X_{n+1} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(X_{n+2} - X_{n+1}).$$

Les quantités X_{n+1} et $X_{n+2} - X_{n+1}$ étant équivalentes aux séries

$$X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \text{etc.}$$

$$(X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.}$$

on pourra donner à l'expression de $S\omega$, cette forme:

$$S\omega = S + (X_1 - X_{\omega+1}) + (X_2 - X_{\omega+2}) + (X_3 - X_{\omega+3}) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\omega}{1}\{X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \text{etc.}\}$$

$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\{(X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.}\}$$

et en l'ordonnant par rapport aux puissances de ω, on en déduira, de même que ci-dessus, les coefficiens différentiels de la fonction S.

Le théorême de Taylor fournit encore ici le moyen de chasser $X_{\omega+1}$, $X_{\omega+2}$, etc. en substituant à ces quantités les séries

$$X_1 + \frac{dX_1}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$X_2 + \frac{dX_2}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2X_2}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3X_2}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

etc.

et on aura ensuite

$$S_\omega = S + \omega \{ X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) \text{ etc.} \}$$
$$+ \frac{\omega(\omega-1)}{2} \{ (X_2 - X_1) + (X_3 - 2X_2 + X_1) + (X_4 - 2X_3 + X_2) + \text{etc.} \}$$
$$- \frac{\omega}{1} \frac{d\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx}$$
$$- \frac{\omega^2}{1.2} \frac{d^2\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx^2}$$
$$- \frac{\omega^3}{1.2.3} \frac{d^3\{X_1 + X_2 + X_3 + \text{etc.}\}}{dx^3}$$
$$- \text{etc.}$$

Si les termes de la série $A, B, C, D, \ldots X$, tendent à s'évanouir, on pourra effacer de l'expression précédente les séries qui multiplient ω et $\frac{\omega(\omega-1)}{2}$, dans la première et dans la seconde ligne; mais on ne supprimera que la seconde seulement, si ce sont les différences premières qui s'évanouissent, et dans ce cas on retombera sur l'expression complète du n°. préc. La comparaison de cette dernière, avec celle que nous venons d'obtenir, fera voir évidemment comment doit être composée la valeur de S_ω pour un ordre quelconque de différences constantes.

Il est bon de remarquer que si l'on change S en S_x, S_ω en $S_{x+\omega}$, comme dans le n°. préc. on passera de $S_{x+\omega}$ à S_ω, et par suite à S_x, en écrivant dans les deux premières lignes, A, B, C, D, etc. à la place des quantités X_1, X_2, X_3, X_4, etc. et D', D'', D''', etc. à celle des coefficiens différentiels qui multiplient respectivement $\frac{\omega}{1}$, $\frac{\omega^2}{1.2}$, $\frac{\omega^3}{1.2.3}$, etc. dans les suivantes.

957. Ce qui précède s'applique, par le moyen des logarithmes, aux fonctions de la forme

$$S = ABCD \ldots X;$$

car l'équation

$$1S = 1A + 1B + 1C + 1D \ldots + 1X,$$

conduit à

$$\mathrm{l}S_\omega = \mathrm{l}S + \mathrm{l}X_1 - \mathrm{l}X_{\omega+1} + \mathrm{l}X_2 - \mathrm{l}X_{\omega+2} + \mathrm{l}X^3 - \mathrm{l}X_{\omega+3} + \text{etc.}$$

en supposant que les logarithmes $\mathrm{l}X$, $\mathrm{l}X_1$, $\mathrm{l}X_2$, tendent à s'évanouir; et repassant aux nombres, il vient

$$S_\omega = S\,\frac{X_1}{X_{\omega+1}} \cdot \frac{X_2}{X_{\omega+2}} \cdot \frac{X_3}{X_{\omega+3}} \cdot \frac{X_4}{X_{\omega+4}}, \text{ etc.}$$

Il est visible que cette hypothèse répond au cas où les fractions $\frac{X_1}{X_{\omega+1}}$, $\frac{X_2}{X_{\omega+2}}$, etc. tendent vers l'unité.

Dans le cas où ce seroient les différences premières des logarithmes qui tendroient à s'évanouir, il faudroit ajouter à l'expression précédente de $\mathrm{l}S_\omega$, la série

$$\omega\{\mathrm{l}X_1 + (\mathrm{l}X_2 - \mathrm{l}X_1) + (\mathrm{l}X_3 - \mathrm{l}X_2) + (\mathrm{l}X_4 - \mathrm{l}X_3) + \text{etc.}\},$$

qui revient à

$$\omega\left\{\mathrm{l}X_1 + \mathrm{l}\frac{X_2}{X_1} + \mathrm{l}\frac{X_3}{X_2} + \mathrm{l}\frac{X_4}{X_3} + \text{etc.}\right\},$$

et donneroit, en passant aux nombres, le produit indéfini

$$X_1^\omega \cdot \frac{X_2^\omega}{X_1^\omega} \cdot \frac{X_3^\omega}{X_2^\omega} \cdot \frac{X_4^\omega}{X_3^\omega} \cdot \text{etc.}$$

d'où il résulteroit

$$S_\omega = S X_1^\omega \cdot \frac{X_2^\omega X_1^{1-\omega}}{X_{\omega+1}} \cdot \frac{X_3^\omega X_2^{1-\omega}}{X_{\omega+2}} \cdot \frac{X_4^\omega X_3^{1-\omega}}{X_{\omega+3}} \cdot \text{etc.}$$

L'équation

$$\mathrm{l}S_\omega = \mathrm{l}S + \mathrm{l}X_1 - \mathrm{l}X_{\omega+1} + \mathrm{l}X_2 - \mathrm{l}X_{\omega+2} + \mathrm{l}X_3 - \mathrm{l}X_{\omega+3} + \text{etc.}$$

se transforme comme celle du n°. 955, par le moyen des coefficiens différentiels, en mettant pour $\mathrm{l}X_{\omega+1}$, etc. les séries

$$\mathrm{l}X_1 + \frac{d\,\mathrm{l}X_1}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2\mathrm{l}X_1}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3\mathrm{l}X_1}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

etc.

et donne

$$\begin{aligned}\mathrm{l}S_\omega - \mathrm{l}S = &- \frac{\omega}{1}\,\frac{d\{\mathrm{l}X_1 + \mathrm{l}X_2 + \mathrm{l}X_3 + \text{etc.}\}}{dx} \\ &- \frac{\omega^2}{1.2}\,\frac{d^2\{\mathrm{l}X_1 + \mathrm{l}X_2 + \mathrm{l}X_3 + \text{etc.}\}}{dx^2} \\ &- \frac{\omega^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\{\mathrm{l}X_1 + \mathrm{l}X_2 + \mathrm{l}X_3 + \text{etc.}\}}{dx^3} \\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

résultat duquel on déduira les coefficiens différentiels de S, en observant que

$$lS_\omega - lS = \frac{d.lS}{dx}\frac{\omega}{1} + \frac{d^2 lS}{dx^2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{d^3 lS}{dx^3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nous ne nous arrêterons pas à montrer comment on peut faire partir du cas de $x=0$, les quantités S, X_1, X_2, etc. ce qui a été dit à cet égard dans le n°. 955 suffit pour quelque formule que ce soit ; il ne seroit pas plus difficile de donner au cas qui nous occupe toute l'extension de celui du n°. précédent ; il ne nous reste donc qu'à faire quelque application.

958. Soit $S = 1.2.3.4....x = [\overset{x}{x}]$. Dans cet exemple les logarithmes des facteurs tendent sans cesse à devenir égaux, et leurs différences premières à s'évanouir ; car on a

$$l(n+1) - ln = l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.}$$

équation dont le second membre tend sans cesse vers 0, à mesure que n augmente : il faudra pour cette raison ajouter au développement de $lS_\omega - lS$, rapporté plus haut, la série

$\omega\{lX_1 + (lX_2 - lX_1) + (lX_3 - lX_2) + (lX_4 - lX_3) + \text{etc.}\}$ (n°. 953).

Substituant au lieu de lX, dlX, d^2lX, etc. leurs valeurs lx, $\frac{dx}{x}$, $-\frac{dx^2}{x^2}$, etc. on trouvera

$$\begin{aligned} lS_\omega - lS = &+ \omega\left\{l(x+1) + l\frac{x+2}{x+1} + l\frac{x+3}{x+2} + l\frac{x+4}{x+3} + \text{etc.}\right\} \\ &- \frac{\omega}{1}\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \text{etc.}\right\} \\ &+ \frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{etc.}\right\} \\ &- \frac{\omega^3}{3}\left\{\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{etc.}\right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat dans lequel on pourra, si l'on veut, convertir en série les quantités $l\frac{x+2}{x+1}$, $l\frac{x+3}{x+1}$, etc.

Si

Si l'on fait $x=0$, ce qui donnera $S=[0]^{\overset{\circ}{}}=1$, et qu'on change ensuite ω en x, on aura

$$
\begin{aligned}
1S_x = 1[x]^{x} = +\,x\,\{\,l1 + l\tfrac{3}{2} + l\tfrac{4}{3} + l\tfrac{5}{4} + \text{etc.}\,\} \\
-\frac{x}{1}\{\,1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}\,\} \\
+\frac{x^2}{2}\{\,1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\,\} \\
-\frac{x^3}{3}\{\,1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\,\} \\
+\,\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Les deux séries qui multiplient la première puissance de x, n'ont chacune pour limite que l'infini, mais leur différence a une valeur finie. La première, poussée jusqu'au n^{me} terme, se réduit à $l(n+1)$, et quant à la seconde, on a par le n°. 939

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots+\frac{1}{n}=C+ln+\frac{1}{2n}-\frac{B_1}{2n^2}+\text{etc.}$$

soustrayant le dernier membre de cette équation de $l(n+1)$, on aura pour la différence des séries proposées,

$$l(n+1)-ln-C-\frac{1}{2n}+\frac{B_1}{2n^2}+\text{etc.}$$

quantité dont la limite est C, en supposant n infini; or $C=0,5772156649015325$: il viendra donc

$$
\begin{aligned}
l[x]^{x} = -\,x.0,5772156649015325 \\
+\frac{x^2}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}) \\
-\frac{x^3}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}) \\
+\frac{x^4}{4}(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}) \\
+\,\text{etc.}
\end{aligned}
$$

d'où on tirera

$$d\,l[\overset{x}{x}] = \frac{d[\overset{x}{x}]}{[\overset{x}{x}]} = -dx.0{,}5572156649015325$$

$$+ x\,dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right)$$

$$- x^2 dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ x^3 dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right)$$

$$- \text{etc.}$$

Toutes les séries de cette équation peuvent se réunir en une seule, si l'on observe que

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + \text{etc.} = \frac{x}{1+x},$$

$$\frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} - \frac{x^4}{2^5} + \text{etc.} = \frac{x}{2(2+x)},$$

etc.

et il viendra ensuite

$$\frac{d[\overset{x}{x}]}{[\overset{x}{x}]} = -dx.0{,}5772156649015325$$

$$+ x\,dx\left\{\frac{1}{1(1+x)} + \frac{1}{2(2+x)} + \frac{1}{3(3+x)} + \frac{1}{4(4+x)} + \text{etc.}\right\}.$$

959. Pouvant ainsi trouver ce que devient la fonction S, lorsque x se change en $x+\omega$, on obtiendra sans peine la vraie valeur des expressions composées de ces fonctions, et qui se présentent sous la forme de $\frac{0}{0}$: telle est la suivante

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{x}}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(2x-1)},$$

lorsqu'on y fait $x=1$.

Si on fait $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}=S$, on aura (n°. 955)

$$S= x\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-x^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+x^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

ce qu'il est facile de convertir en

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\text{etc.}$$
$$=1+\frac{x-1}{2(1+x)}+\frac{x-1}{3(2+x)}+\frac{x-1}{4(3+x)}+\text{etc.}$$

La substitution de $1+\omega$, à la place de x, dans ce dernier résultat, donnera

$$S\omega=1+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+\text{etc.}$$

ou $S\omega=1+D_1\omega+D_2\omega^2+D_3\omega^3+\text{etc.}$

en développant par rapport aux puissances de ω; par ces opérations, la fonction proposée deviendra

$$\frac{1+D_1\omega+D_2\omega^2+D_3\omega^3+\text{etc.}}{\omega(1+\omega)}-\frac{1}{\omega(1+2\omega)}$$
$$=\frac{(1+2\omega)(1+D_1\omega+D_2\omega^2+D_3\omega^3+\text{etc.})-(1+\omega)}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)}$$
$$=\frac{D_1\omega+D_2\omega^2+\text{etc.}+\omega+2\omega(D_1\omega+D_2\omega^2+\text{etc.})}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)}$$

divisant enfin les deux termes de cette fraction par ω, et supposant ensuite $\omega=0$, on aura D_1+1 pour la vraie valeur de la fonction proposée dans le cas où $x=0$; or il est facile de voir que

$D_1=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}$ et que par conséquent

$$D_1+1=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{6}\ (\text{n}^\circ.\ 942).$$

960. Venons maintenant à quelques exemples d'interpolation : soit la suite

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\cdots\cdots+\frac{1}{a+(x-1)b}.$$

En désignant par S le terme général de cette suite, on aura

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\cdots+\frac{1}{a+(x-1)b},$$

et comme les parties qui le composent tendent à s'évanouir, on trouvera par le n°. 957,

$$X_1=\frac{1}{a+bx}, \qquad X_{\omega+1}=\frac{1}{a+bx+b\omega}$$
$$X_2=\frac{1}{a+b+bx}, \qquad X_{\omega+2}=\frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$

etc.

$$S_\omega=S+\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a+b+bx}+\frac{1}{a+2b+bx}+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{a+bx+b\omega}-\frac{1}{a+b+bx+b\omega}-\frac{1}{a+2b+bx+b\omega}-\text{etc.}$$

ou bien

$$S_\omega=S+b\,\omega\left\{\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{(a+b+bx)^2}+\frac{1}{(a+2b+bx)^2}+\text{etc.}\right\}$$
$$-b^2\omega^2\left\{\frac{1}{(a+bx)^3}+\frac{1}{(a+b+bx)^3}+\frac{1}{(a+2b+bx)^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$+b^3\omega^3\left\{\frac{1}{(a+bx)^4}+\frac{1}{(a+b+bx)^4}+\frac{1}{(a+2b+bx)^4}+\text{etc.}\right\}$$
$$-\text{etc.}$$

en employant la valeur de S_ω, exprimée par les coefficiens différentiels. Appliquons ces formules à la série

$$1, \quad 1+\tfrac{1}{2}, \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, \text{ etc.}$$

nous aurons $a=1$, $b=1$, $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{x}$

$$S\omega = S + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \text{etc.}$$

Il est évident par la forme de la série que si T désigne le terme qui répond à l'indice fractionnaire ω, les termes T_1, T_2, etc. correspondans aux indices $1+\omega$, $2+\omega$, etc. seront

$$T+\frac{1}{1+\omega}, \quad T+\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{2+\omega}, \text{ etc.}$$

or en faisant $x=0$, dans $S\omega$, on aura $S=0$, et

$$T = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \frac{1}{5+\omega} - \text{etc.}$$

et la seconde expression de $S\omega$, rapportée dans la page précédente, deviendra par les mêmes hypothèses

$$T = +\omega\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}\right)$$
$$+\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}\right)$$
$$-\text{etc.}$$

Lorsque $\omega=\frac{1}{2}$, il vient, par la première de ces valeurs de T,

$$T = 1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{9}+\text{etc.}$$
$$= 2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{9}+\text{etc.}\right)$$

et comme $l2=l(1+1)= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\text{etc.}$
il est visible que $T=2-l2$; on a donc dans ce cas T sous une forme finie, de laquelle il résulte qu'aux indices

$$\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{5}{2}, \quad \text{etc.}$$

répondent les termes

$$2-2l2, \; 2+\tfrac{2}{3}-2l2, \; 2+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-2l2, \text{ etc.}$$

Prenons pour second exemple la série

$$1, \quad 1+\frac{1}{2^n}, \quad 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}, \quad 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}, \text{ etc.}$$

nous aurons $X=\frac{1}{x^n}$, $X_\omega=\frac{1}{(x+\omega)^n}$, et en faisant $x=0$;

il viendra, pour le terme correspondant à l'indice ω,

$$S_\omega = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$$
$$-\frac{1}{(1+\omega)^n}-\frac{1}{(2+\omega)^n}-\frac{1}{(3+\omega)^n}-\frac{1}{(4+\omega)^n}-\text{etc.}$$

Si l'on prend $\omega=\frac{1}{2}$, on trouvera

$$S_{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{2^n}{5^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{2^n}{7^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{2^n}{9^n}+\text{etc.}$$

ce qui revient à

$$S_{\frac{1}{2}}=2^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}+\text{etc.}\right);$$

et si l'on représente par A la série

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

on obtiendra $S_{\frac{1}{2}}=2^n-2^nA$, d'où l'on conclura pour les indices

$$\frac{1}{2}\,,\qquad \frac{3}{2}\,,\qquad \frac{5}{2}\,,\qquad \text{etc.}$$

les termes

$$2^n-2^nA,\ 2^n+\frac{2^n}{3^n}-2^nA,\ 2^n+\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^n}{5^n}-2^nA,\ \text{etc.}$$

961. Occupons-nous encore de quelques séries de la forme

$$A,\quad AB,\quad ABC,\quad ABCD,\ \text{etc.}$$

et prenons pour premier cas particulier la suivante

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c},\ \frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c}\cdot\frac{a+2c}{b+2c},\ldots\frac{a}{b}\cdot\frac{a+c}{b+c}\cdots\frac{a+(x-1)c}{b+(x-1)c}.$$

Nous aurons par le n°. 957,

$$S_\omega=\frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)}\cdot\frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)}\cdot\frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(a+2c+c\omega)}\cdot\text{etc.}$$

en supposant que les logarithmes des facteurs tendent à s'évanouir, et en faisant $x=0$, dans X_1, X_2, X_3, et dans $X_{\omega+1}$, $X_{\omega+2}$, etc.

Si l'on prend $a=1$, $b=2$, $c=1$, on aura la série

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6},\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10},\ \text{etc.}$$

pour laquelle on trouvera

$$S_\omega=\frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)}\cdot\frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)}\cdot\frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)}\cdot\frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)}\cdot\text{etc.}$$

et les termes qui répondent aux indices $\omega+1$, $\omega+2$, etc. seront nécessairement

$$S_{\omega+1}=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}S_\omega$$

$$S_{\omega+2}=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}S_\omega$$

$$S_{\omega+3}=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}\cdot\frac{5+2\omega}{6+2\omega}S_\omega,$$

etc.

ainsi qu'on peut s'en convaincre par leurs logarithmes, qui se rapportent au premier exemple du n°. précédent.

Soit $\omega=\frac{1}{2}$, il viendra

$$S_\omega=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 11}{10\cdot 10},\ \text{etc.}$$

résultat qui se change en $\frac{2}{\pi}$, d'après l'expression

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11},\ \text{etc.}$$

rapportée dans le n°. 945 ; on aura donc pour les indices

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{7}{2},\quad \text{etc.}$$

les termes

$$\frac{2}{\pi},\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi},\quad \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{\pi},\quad \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{2}{\pi},\ \text{etc.}$$

Proposons-nous encore la série

a, $a(a+b)$, $a(a+b)(a+2b)$, ... $a(a+b)$.... $(a+(x-1)b)$, etc.
dans laquelle ce sont les différences des logarithmes qui tendent à s'évanouir; la seconde formule du n°. 957, nous donnera pour ce cas

$$S_\omega=a^{\omega}\cdot\frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega}\cdot\frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}\cdot\frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega}\cdot\text{etc.}$$

d'où nous conclurons ensuite

$$S_{\omega+1}=(a+b\omega)S_\omega$$
$$S_{\omega+2}=(a+b\omega)(a+b+b\omega)S_\omega$$
$$S_{\omega+3}=(a+b\omega)(a+b+b\omega)(a+2b+b\omega)S_\omega;$$
etc.

Soit pour exemple $a=1$, $b=1$, ou

1, 1.2, $1.2.3$, $1.2.3.4$, etc.

et faisons $\omega=\frac{1}{2}$, nous obtiendrons

$$S_\omega=1^{\frac{1}{2}}.\frac{1^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}.\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{2}}.\frac{3^{\frac{1}{2}}4^{\frac{1}{2}}}{3+\frac{1}{2}}.\frac{4^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{2}}}{4+\frac{1}{2}}, \text{ etc.}$$

passant aux quarrés, nous aurons

$$S^2_\omega=\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}, \text{ etc.}$$

En rapprochant cette expression de celle de $\frac{\pi}{2}$, on verra que $S^2_\omega=\frac{\pi}{4}$, d'où on conclura qu'aux indices

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc.

répondent les termes

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \frac{3.5}{2.2}\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \frac{3.5.7}{2.2.2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

962. Ces dernières interpolations s'obtiennent avec la plus grande facilité par la théorie des puissances du second ordre. Il suffit pour cela de changer l'expression $[p]^{n}$, en produits infinis. Or on a (n°. 902),

$$[p]^{n}=[p]^{-r}[p+r]^{n+r}=[p]^{-r}[p+r]^{n}[p+r-n]^{r},$$

ou $$[p]^{n}=[p]^{-r}[p+r]^{n}.\frac{1}{[p-n]^{-r}},$$

en observant que $[p+r-n]^{r}=\frac{1}{[p-n]^{-r}}$. Il viendra de même

$$[q]^{-n}=[q]^{-r}[q+r]^{-n}.\frac{1}{[q+n]^{-r}},$$

d'où

d'où on tirera

$$[p]^{n}[q]^{-n}=[p+r]^{n}[q+r]^{-n}\cdot\frac{[p]^{-r}[q]^{-r}}{[p+n]^{-r}[q-n]^{-r}},$$

Maintenant il est visible, soit par le développement, soit par ce qui a été dit, n°. 902, que la limite vers laquelle tend l'expression $[p+r]^{n}[q+r]^{-n}$, à mesure que le nombre indéterminé r augmente par rapport aux nombres p, q, et n, est $[r]^{n}[r]^{-n}$, et que cette dernière tend à son tour vers $r^n r^{-n}=1$. En supposant donc r infini, on aura

$$[p]^{n}[q]^{-n}=\frac{[p]^{-r}}{[p+n]^{-r}}\cdot\frac{[q]^{-r}}{[q-n]^{-r}}=\frac{(p+n+1)(p+n+2)\text{etc.}}{(p+1)(p+2)\text{ etc.}}\cdot\frac{(q-n+1)(q-n+2)\text{etc.}}{(q+1)(q+2)\text{ etc.}},$$

valeur dans laquelle le nombre n n'entre plus comme exposant.

Prenons pour exemple la série

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1.3}{2.4},\quad \frac{1.3.5}{2.4.6},\quad \frac{1.3.5.7\ldots(2x-1)}{2.4.6.8\ldots 2x},$$

dont le terme général est $\dfrac{[2x-1,2]^{x}}{[2x,2]^{x}}=\dfrac{2^x[x-\frac{1}{2}]^{x}}{2^x[x]^{x}}=[x-\tfrac{1}{2}]^{x}[0]^{-x}$;

dans ce cas on a $p=x-\frac{1}{2}$, $q=0$, $n=x$, et il vient

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}[0]^{-x}=\frac{[x-\frac{1}{2}]^{-r}[0]^{-r}}{[2x-\frac{1}{2}]^{-r}[-x]^{-r}}.$$

Si l'on fait $x=\frac{1}{2}$, on trouvera, en développant les puissances affectées de l'exposant infini r,

$$[0]^{\frac{1}{2}}[0]^{-\frac{1}{2}}=\frac{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}+3)\text{ etc.}}{1.2.3.\text{etc.}}\cdot\frac{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{2})\text{ etc.}}{1.2.3.\text{etc.}}$$

$$=\frac{3.5.7.\text{etc.}}{2.4.6.\text{etc.}}\cdot\frac{1.3.5.\text{etc.}}{2.4.6.\text{etc.}}=\frac{1.3.3.5.5.7.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.\text{etc.}},$$

résultat semblable à celui du n°. précédent.

963. En changeant dans l'"équation

$$[p+q]^{n}=[p]^{n}+[q]^{1}[0]^{-1}[n]^{1}[p]^{n-1}+[q]^{2}[0]^{-2}[n]^{2}[p]^{n-2}$$
$$+[q]^{3}[0]^{-3}[n]^{3}[p]^{n-3}+[q]^{4}[0]^{-4}[n]^{4}[p]^{n-4}+\text{ etc.}$$

à laquelle nous sommes parvenus dans le n°. 904, q en m, p en $p+n$, et multipliant ses deux membres par $[p]^{-n}$, il viendra

$$\left.\begin{aligned}[p+m+n]^{n}[p]^{-n} = [p+n][p]^{-n} &+ [m]^{1}[0]^{-1}[n]^{1}[p+n]^{n-1}[p]^{-n} \\ &+ [m]^{2}[0]^{-2}[n]^{2}[p+n]^{n-2}[p]^{-n} \\ &+ [m]^{3}[0]^{-3}[n]^{3}[p+n]^{n-3}[p]^{-n} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}\right\};$$

or il est visible que

$$[p+n]^{n}[p]^{-n}=1,\quad [p+n]^{n-1}[p]^{-n}=[p]^{-1},\quad [p+n]^{n-2}[p]^{-n}=[p]^{-2},\ldots$$
$$[p+n]^{n-n}[p]^{-n}=[p]^{-n}:$$

on aura donc

$$[p+m+n]^{n}[p]^{-n}=1+[m]^{1}[0]^{-1}[n]^{1}[p]^{-1}+[m]^{2}[0]^{-2}[n]^{2}[p]^{-2}.$$
$$+[m]^{3}[0]^{-3}[n]^{3}[p]^{-3}+[m]^{4}[0]^{-4}[n]^{4}[p]^{-4}+\text{etc.}$$

et comme le second membre de cette équation demeure le même lorsqu'on y échange les quantités m et n entr'elles, il s'ensuit que

$$[p+m+n]^{n}[p]^{-n}=[p+n+m]^{m}[p]^{-m}.$$

Si l'on remplace p par q, et qu'on écrive ensuite p à la place de $q+m+n$, on aura cette expression

$$[p]^{n}[q]^{-n}=1+[p-q-n]^{1}[0]^{-1}[n]^{1}[q]^{-1}+[p-q-n]^{2}[0]^{-2}[n]^{2}[q]^{-2}$$
$$+[p-q-n]^{3}[0]^{-3}[n]^{3}[q]^{-3}+[p-q-n]^{4}[0]^{-4}[n]^{4}[q]^{-4}+\text{etc.}$$

dans laquelle la quantité n n'entre plus comme exposant, et qui peut par conséquent servir à l'interpolation.

En l'appliquant à l'exemple du n°. précédent, elle donnera

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}[0]^{-x}=1+[-\tfrac{1}{2}]^{1}[0]^{-1}[x]^{1}[0]^{-1}+[-\tfrac{1}{2}]^{2}[0]^{-2}[x]^{2}[0]^{-2}$$
$$+[-\tfrac{1}{2}]^{3}[0]^{-3}[x]^{3}[0]^{-3}+[-\tfrac{1}{2}]^{4}[0]^{-4}[x]^{4}[0]^{-4}+\text{etc.}$$

résultat qui revient à

$$[x-\tfrac{1}{2}]^{x}[0]^{-x}=1-\frac{1}{2}\,\frac{x}{1.1}+\frac{1.3}{2.2}\,\frac{x(x-1)}{1.1.2.2}-\frac{1.3.5}{2.2.2}\,\frac{x(x-1)(x-2)}{1.1.2.2.3.3}+\text{etc.}$$

964. Nous pouvons, à l'aide de ce qui précède, trouver l'expression de π, dont nous avons fait usage dans le n°. 945, et plusieurs autres très-remarquables. Pour cela il faut développer la quantité $(1-x^r)^m$, dans l'intégrale $nr\int x^{nr-1}dx(1-x^r)^m$, ce qui donnera

$$nr\int x^{nr-1}dr(1-x^r)^m = nr\int x^{nr-1}dx\{1-[m]^{1}[0]^{-1}x^r+[m]^{2}[0]^{-2}x^{2r}-[m]^{3}[0]^{-3}x^{3r}+\text{etc.}\}.$$

Intégrant chaque terme, depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, il viendra

$$1-\frac{n}{n+1}[m]^{1}[0]^{-1}+\frac{n}{n+2}[m]^{2}[0]^{-2}-\frac{n}{n+3}[m]^{3}[0]^{-3}+\frac{n}{n+4}[m]^{4}[0]^{-4}+\text{etc.}$$

expression équivalente à celle-ci

$$1+\frac{(-n)}{n+1}[m]^{1}[0]^{-1}+\frac{(-n)(-n-1)}{(n+1)(n+2)}[m]^{2}[0]^{-2}+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}[m]^{3}[0]^{-3}$$
$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}[m]^{4}[0]^{-4}+\text{etc.}$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$\left.\begin{array}{l}1+[m]^{1}[0]^{-1}[-n]^{1}[n]^{-1}+[m]^{2}[0]^{-2}[-n]^{2}[n]^{-2}+[m]^{3}[0]^{-3}[-n]^{3}[n]^{-3}\\ \qquad +[m]^{4}[0]^{-4}[-n]^{4}[n]^{-4}+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Cette dernière, devenant identique avec le développement de $[p+m+n]^{n}[p]^{-n}$, rapporté dans le n°. précéd. lorsqu'on y change n en $-n$ et p en n, est par conséquent celui de la quantité $[n+m-n]^{-n}[n]^{n}$, ou $[m]^{-n}[n]^{n}$, d'où il suit que la valeur de l'intégrale $nr\int x^{nr-1}dx(1-x^r)^m$, prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, est $[m]^{-n}[n]^{n}$, ou

$$\frac{1.2.3\ldots}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots}\;\frac{(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)\ldots}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots}\text{ (n°. 962).}$$

Appliquons maintenant ces formules au cercle, dont la demi-circonférence est donnée par l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (n°. 410); nous aurons pour ce cas $r=2$, $n=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$, et nous tirerons du développement en série

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1.1}{2.3}+\frac{1.1.3}{2.4.5}+\frac{1.1.3.5}{2.4.6.7}+\text{etc.}$$

résultat qui n'est que celui du n°. 410 ; mais en faisant usage du développement en puissances du second ordre, nous obtiendrons

$$\tfrac{1}{2}\pi = [\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}},$$

et en observant que l'équation $[p]^{n} = [p]^{m}[p-m]^{n-m}$ (n°. 902), donne $[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} = [\tfrac{1}{2}]^{1}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$, nous déduirons de là $\tfrac{1}{2}\pi = 2([\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}})^2$, ou $\pi = 4([\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}})^2$, ou enfin $\sqrt{\pi} = 2[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}$.

Cette expression est bien digne de remarque, car la quantité analogue à $2[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}$, dans les puissances ordinaires ou du premier ordre, étant $2(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, exprime la diagonale du quarré dont le côté $=1$, tandis que $\sqrt{\pi}$ est le côté du quarré dont l'aire est égale à celle du cercle ayant pour rayon l'unité.

Si l'on développe le produit $[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$, d'après le n°. 962, on tombera sur l'expression de Wallis $\pi = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}$, rapportée dans le (n°. 945).

On parvient encore à ce résultat sans le secours d'aucune intégrale, ainsi qu'il suit : on a

$$[\tfrac{1}{2}]^{1}[-\tfrac{1}{2}]^{-1} = \frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2}+1)} = 1$$

$$[\tfrac{1}{2}]^{2}[-\tfrac{1}{2}]^{-2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)} = -\frac{1}{3}$$

$$[\tfrac{1}{2}]^{3}[-\tfrac{1}{2}]^{-3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)(-\frac{1}{2}+3)} = \frac{1}{5}$$

$$[\tfrac{1}{2}]^{4}[-\tfrac{1}{2}]^{-4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)(-\frac{1}{2}+3)(-\frac{1}{2}+4)} = -\frac{1}{7},$$

etc.

d'où il faut conclure $[\tfrac{1}{2}]^{n}[-\tfrac{1}{2}]^{-n} = \pm\frac{1}{2n-1}$, suivant que n est impair ou pair ; et avec un peu d'attention on reconnoît que

l'expression $\dfrac{\sin\frac{2n-1}{2}\pi}{2n-1}$ donne précisément les mêmes valeurs lorsque l'indice n est entier, d'où il résulte que les deux expressions $[\tfrac{1}{2}]^{n}[-\tfrac{1}{2}]^{-n}$ et $\dfrac{\sin\frac{2n-1}{2}\pi}{2n-1}$, ont une infinité de valeurs communes. En interpolant donc la première par la seconde, on en déduira

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sin 0\times\frac{\pi}{2}}{0};$$

mais la vraie valeur du second membre de cette équation étant $\frac{1}{2}\pi$, il viendra $[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}$, comme ci-dessus, et nous apprenons en même tems par là que le terme qui répond à l'indice $\frac{1}{2}$ dans la série

$$1,\quad +\tfrac{1}{3},\quad -\tfrac{1}{5},\quad +\tfrac{1}{7},\quad -\text{etc.}$$

est $[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{2}}$.

Si l'on fait $n=\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, on trouvera

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{3}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{3}}=[\tfrac{1}{2}]^{\frac{2}{3}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{2}{3}}=\frac{5.7.11.13.17.19.23.25\ldots}{3.9.\;9.15.15.21.21.27\ldots}=\frac{3}{2},$$

puisque $\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$.

Prenant encore $n=\frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{4}$, on parviendroit à

$$[\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{4}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{1}{4}}=[\tfrac{1}{2}]^{\frac{3}{4}}[-\tfrac{1}{2}]^{-\frac{3}{4}}=\frac{3.5.7.\;9.11.13\ldots\ldots}{2.6.6.10.10.14\ldots\ldots}=\sqrt{2},$$

à cause de $\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

965. On peut obtenir dans cet algorithme un nombre infini de résultats semblables à ceux que nous venons de rapporter, et parmi lesquels il s'en trouvera qui seront transcendans, d'autres qui seront seulement irrationnels, et d'autres enfin qui seront rationnels, ce qui établit une différence essentielle entre les puissances du premier ordre et celles du second, puisque par les unes on n'a pu exprimer en termes finis que des quantités rationnelles ou irrationnelles, et que les autres s'appliquent aussi à certaines transcendantes. Il est incon-

testable que les puissances du troisième ordre, nécessairement plus générales que celles du premier et du second, doivent s'étendre à des quantités qui ne peuvent s'exprimer en termes finis par celles-ci. Vandermonde, dans le Mémoire dont nous avons tiré ce qui précède, comprend toutes ces quantités sous la dénomination générale d'*irrationnelles*, et il les distingue en ordres, en appelant irrationnelles du premier ordre, celles qui résultent de l'extraction des racines, irrationnelles du second, celles qui répondent à des exposans fractionnaires dans la série des puissances de cet ordre et qui sont irréductibles aux précédentes, et ainsi de suite. Non-seulement cette nomenclature, et la notation dont elle dérive, ont l'avantage de conserver l'analogie des idées, mais elles me paroissent propres à mettre sur la voie pour résoudre des questions importantes qui se lient avec les réflexions exposées dans les n°s 675 et 697.

Jusqu'à présent on ne s'est guère occupé que du problème direct de l'interpolation; cette recherche présente, comme toutes les autres, une question inverse qui peut être plus difficile que la question directe, mais aussi qui semble intéresser beaucoup les progrès de l'analyse. L'extraction des racines n'est évidemment que l'interpolation par rapport aux puissances du premier ordre, et la recherche des logarithmes, la question inverse dont nous parlons, puisqu'il s'agit, dans le premier cas, de trouver la quantité qui répond à un exposant fractionnaire, et dans le second l'exposant ou l'indice qui répond à une quantité donnée. Dans l'interpolation on connoît l'indice et on cherche le terme intermédiaire; dans la question inverse c'est ce terme que l'on connoît, et l'on veut trouver à quel indice il répond. Il résulteroit de la solution de cette question une manière d'exprimer toutes les grandeurs en les regardant comme faisant partie d'une suite proposée, et il doit nécessairement arriver que quelques-unes répondent à des indices entiers, d'autres à des indices fractionnaires, d'autres enfin à des indices dont la valeur ne seroit susceptible, en nombres, que d'une expression approchée; et comme toute série, dont les termes croissent indéfiniment, peut comprendre, au moins par approximation, une quantité qui surpasse son premier terme, quelle qu'elle soit d'ailleurs,

il existe un nombre indéfini de manières de représenter une quantité quelconque parmi lesquelles il doit s'en trouver d'utiles pour classer les transcendantes, pour les réduire les unes aux autres lorsque cela est possible, et enfin pour en dresser des tables, ce qui paroît le seul progrès qui reste à faire dans le Calcul intégral des différentielles d'une seule variable.

966. Nous avons montré dans le n°. 192, les inconvéniens de l'élimination successive des inconnues, inconvéniens qui deviennent d'autant plus grands que l'on a plus d'équations à combiner entr'elles; nous allons faire connoître la méthode qu'a donnée Bézout pour les éviter. Pour faire concourir de la même manière chacune des équations proposées à la formation de l'équation finale, le moyen qui se présente d'abord à l'esprit, et que l'on trouve appliqué dans les élémens, aux équations du premier degré, consiste à les multiplier par des facteurs indéterminés, puis à les ajouter entr'elles, et à égaler à zéro les quantités qui multiplient les inconnues que l'on veut faire disparoître.

Digression sur l'élimination dans les équations algébriques.

Si l'on avoit, par exemple, les trois équations

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$
$$a'x^2+b'y^2+c'xy+d'x+e'y+f'=0$$
$$a''x^2+b''y^2+c''xy+d''x+e''y+f''=0,$$

et qu'on les multipliât respectivement par trois polynomes de leur degré, savoir: par

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F$$
$$A'x^2+B'y^2+C'xy+D'x+E'y+F'$$
$$A''x^2+B''y^2+C''xy+D''x+E''y+F'',$$

en réunissant les produits qui seroient du quatrième degré et en les ordonnant par rapport à x et y, on auroit une *équation-somme*, qui contiendroit quinze termes, respectivement affectés de

$$\begin{array}{ccccc} x^4, & x^3, & x^2, & x, & x^0 \\ & x^3y, & x^2y, & xy, & y \\ & & x^2y^2, & xy^2, & y^2 \\ & & & xy^3, & y^3 \\ & & & & y^4; \end{array}$$

mais comme on auroit introduit dix-huit coefficiens indéterminés, on pourroit égaler à zéro les coefficiens des quatorze termes qui contiennent x et y, et ne conserver que celui qui en est indépendant ou qui est multiplié par x° : on obtiendroit ainsi l'équation

$$Ff + F'f' + F''f'' = 0.$$

Il est facile de voir que les coefficiens A, B, ... A', B', ... A'', B''... se détermineroient par des équations du premier degré; mais leur nombre total étant 18, il en resteroit quatre d'arbitraires.

Pour appliquer cette méthode à des équations plus élevées, ou qui soient en plus grand nombre, il faut avoir préalablement résolu les questions suivantes : 1°. *déterminer quel est le nombre de termes que doit renfermer un polynome complet d'un degré quelconque et comprenant un nombre quelconque d'inconnues*; 2°. *déterminer parmi ces termes le nombre de ceux qui contiennent telle de ces inconnues que l'on voudra et le nombre de ceux où elle n'entre pas*; car ce n'est que d'après la solution de ces questions qu'on pourra prévoir à quel degré doit monter l'équation finale, choisir en conséquence les polynomes qui doivent multiplier les équations proposées, et s'assurer qu'ils contiendront un nombre de coefficiens indéterminés suffisant pour qu'il soit permis d'égaler à zéro tous les termes dans lesquels entrent les inconnues que l'on veut éliminer.

967. Occupons-nous d'abord de la première question. Lorsque le polynome ne renferme qu'une inconnue, il est visible que son degré étant désigné par m, le nombre des termes qui le composent, s'il est complet, sera $m+1$, car il contiendra les termes

$$t^m, \quad t^{m-1}, \quad t^{m-2}, \quad t^{m-3} \ldots . t, \quad t^\circ,$$

et si l'on rend ces termes homogènes par l'introduction d'une nouvelle inconnue u, on aura précisément tous ceux qui composent la puissance m du binome $t+u$, dont le nombre est encore $m+1$. Réciproquement si l'on fait $u=1$, on reviendra de la puissance du binome $t+u$ au polynome à une seule inconnue; on passera de la même manière de $(t+u+x)^m$ au polynome complet à deux inconnues t et u, en faisant $x=1$: il suffit donc de trouver le nombre des termes que doit contenir $(t+u+x)^m$. Or, en mettant cette expression sous la forme $\{(t+u)+x)\}^m$, et en la développant

seulement

seulement par rapport à x, on obtient $m+1$ termes dont l'un quelconque est multiplié par $(t+u)^{m-n}x^n$. Si maintenant on développe celui-ci par rapport à t et à u, il en fournira $m-n+1$, d'où il suit que le nombre total des termes du polynome proposé sera la somme de la quantité $m-n+1$, prise en faisant varier n depuis o jusqu'à m, c'est-à-dire, la somme de la série

$$m+1, \quad m, \quad m-1, \quad m-2, \ldots. 1,$$

dont le terme général est $[m+1]^{1}$, et qui revient à $\frac{1}{1.2}[m+2]^{2}$, ou à $\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}$ (n°. 930).

En mettant le quadrinome $(t+u+x+y)^m$ sous la forme $\{(t+u+x)+y\}^m$, et en le développant par rapport à y seulement, on trouvera $m+1$ termes dont l'un quelconque sera multiplié par $(t+u+x)^{m-p}y^p$, et par le développement de la puissance du trinome en fournira, d'après ce qui précède, un nombre $\frac{(m-p+2)(m-p+1)}{1.2}$.
La somme de cette expression, prise depuis $p=0$, jusqu'à $p=m$, c'est-à-dire, celle de $\frac{1}{1.2}[m+2]^{2}$, donnera le nombre des termes contenus dans le développement de la puissance m du quadrinome, ou dans le polynome complet à trois inconnues : on aura donc, pour ce nombre de termes, $\frac{1}{1.2.3}[m+3]^{3}$, ou $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3}$.

De même, puisque le terme $(t+u+x+y)^{m-q}z^q$, du développement de $\{(t+u+x+y)+z\}^m$ en fournit $\frac{(m-q+3)(m-q+2)(m-q+1)}{1.2.3}$, et que la sommme de cette expression, prise depuis $q=0$, jusqu'à $q=m$, revient à celle de $\frac{1}{1.2.3.}[m+3]^{3}$, on aura $\frac{1}{1.2.3.4}[m+4]^{4}$, ou $\frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3.4}$, pour le nombre de termes du développement de la puissance m du quintinome, ou celui des termes du polynome complet à quatre inconnues.

En général le développement de la puissance m du polynome formé de μ termes t, u, x, y, z, etc. en contiendra un nombre exprimé par $\frac{[m+\mu]^{\mu}}{1.2.3....\mu}$, ou par

$$\frac{(m+\mu)(m+\mu-1)(m+\mu-2)....(m+1)}{1.2.3....\mu},$$

et ce nombre sera aussi celui des termes du polynome complet contenant μ inconnues. Passons maintenant à la seconde question.

968. Pour envisager cette question dans toute son étendue, nous l'énoncerons ainsi : *trouver dans un polynome complet du degré* m, *et renfermant un nombre quelconque d'inconnues* t, u, x, y, etc. *combien il y a de termes divisibles par* t^n ; *combien, outre ceux-là, il y en a de divisibles par* u^p ; *combien, outre les précédens, il y en a de divisibles par* x^q, etc. *en supposant d'ailleurs* n+p+q+etc.<m.

On voit aisément que si l'on rassemble tous les termes divisibles par t^n, et qu'on supprime ce facteur, le quotient sera un polynome du degré $m-n$. Si on avoit, par exemple, le polynome complet du sixième degré et à trois inconnues t, u et x, dont les termes seroient

t^6 t^5u t^5x t^4u^2 t^4ux t^4x^2 t^3u^3 t^3u^2x t^3ux^2 t^3x^3
t^2u^4 t^2u^3x $t^2u^2x^2$ t^2ux^3 t^2x^4
tu^5 tu^4x tu^3x^2 tu^2x^3 tux^4 tx^5
u^6 u^5x u^4x^2 u^3x^3 u^2x^4 ux^5 x^6

t^5 t^4u t^4x t^3u^2 t^3ux t^3x^2 t^2u^3 t^2u^2x t^2ux^2 t^2x^3
tu^4 tu^3x tu^2x^2 tux^3 tx^4
u^5 u^4x u^3x^2 u^2x^3 ux^4 x^5

t^4 t^3u t^3x t^2u^2 t^2ux t^2x^2 tu^3 tu^2x tux^2 tx^3
u^4 u^3x u^2x^2 ux^3 x^4

t^3 t^2u t^2x tu^2 tux tx^2 u^3 u^2x ux^2 x^3

t^2 tu tx u^2 ux x^2

t u x.

En réunissant ceux qui peuvent être divisés par t^3, savoir, tous ceux qui sont multipliés par des puissances de t, supérieures à la

seconde, et en effectuant la division, on formeroit le polynome du troisième degré, dont le nombre des termes seroit par conséquent

$$\frac{(3+3)(3+2)(3+1)}{1.2.3}=20.$$

En général, dans le polynome du degré m à μ inconnues, que nous désignerons ainsi $(t\ldots,\mu)^m$, le nombre des termes divisibles par t^n sera égal au nombre des termes du polynome $(t\ldots,\mu)^{m-n}$, ou à $[m-n+\mu]^{\mu}[0]^{-\mu}$.

Après qu'on aura effacé du polynome du sixième degré, qui nous sert d'exemple, les termes divisibles par t^3, si l'on se propose de trouver ceux qui sont divisibles par u^4, il faut, du nombre de ceux qui l'étoient avant l'exclusion des termes divisibles par t^3, retrancher celui des termes divisibles par u^4, contenus dans le polynome dont t^3 est le facteur commun; or les termes divisibles par u^4 dans le polynome total sont au nombre, de $\frac{(4+3)(4+2)(4+1)}{1.2.3}=35$, et celui des termes divisibles par u^4 dans le polynome du troisième degré formé des termes divisibles par t^3, étant le même que celui des termes du polynome du degré 3—2, ou du degré 1, est égal à 4; la différence 35—4, ou 31, sera donc le nombre des termes divisibles par u^4, après l'expulsion de ceux qui le sont par t^3.

En général $[m-p+\mu]^{\mu}[0]^{-\mu}$ étant le nombre des termes divisibles par u^p dans le polynome proposé, et $[m-n-p+\mu]^{\mu}[0]^{-\mu}$, celui des mêmes termes dans le polynome du degré $m-n$, formé des termes divisibles et t^n, la différence $[m-p+\mu]^{\mu}[0]^{-\mu}-[m-n-p+\mu]^{\mu}[0]^{-\mu}$, sera le nombre des termes divisibles par u^p, après l'exclusion de ceux qui le sont par t^n.

Il est facile de voir que le nombre de ceux qui le sont ensuite par x^q s'obtiendra, en retranchant du nombre total des termes de cette espèce contenus dans le polynome complet, le nombre de ceux que renferme le polynome divisible par t^n et le nombre de ceux

qui sont en outre divisibles par u^p, et que l'on aura

$$[m-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}[o]^{-\mu}$$
$$=[o]^{-\mu}\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}.$$

On trouveroit de la même manière que le nombre des termes divisibles ensuite par y^r est égal à celui des termes de cette espèce que contient le polynome complet, moins le nombre de ceux que contient le polynome divisible par t^n, moins le nombre de ceux qui sont en outre divisibles par u^p et moins le nombre de ceux qui sont en outre divisibles par x^q, ce qui revient à

$$[o]^{-\mu}\left\{\begin{matrix}[m-r+\mu]^{\mu}-[m-n-r+\mu]^{\mu}-[m-p-r+\mu]^{\mu}+[m-n-p-r]^{\mu}\\ -[m-q-r+\mu]^{\mu}+[m-n-q\cdot\cdot r+\mu]^{\mu}+[m-p-q-r+\mu]^{\mu}-[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\end{matrix}\right\},$$

et ainsi de suite.

En examinant de près les résultats que nous venons d'obtenir, on reconnoît bientôt, 1°. que

$$[o]^{-\mu}\{[m-p+\mu]^{\mu}-[m-n-p+\mu]^{\mu}\}=\Delta_n[o]^{-\mu}[m-p+\mu]^{\mu},$$

Δ_n marquant que la quantité $m-p+\mu$ varie de $-n$, 2°. que

$$[o]^{-\mu}\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}+[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}$$
$$=[o]^{-\mu}\left\{\{[m-q+\mu]^{\mu}-[m-p-q+\mu]^{\mu}\}-\{[m-n-q+\mu]^{\mu}-[m-n-p-q+\mu]^{\mu}\}\right\}$$
$$=\Delta_p[o]^{-\mu}[m-q+\mu]^{\mu}-\Delta_p[o]^{-\mu}[m-n-q+\mu]^{\mu}$$
$$=\Delta^2{}_{p,n}[o]^{-\mu}[m-q+\mu]^{\mu},$$

$\Delta^2{}_{p,n}$ marquant une différence du second ordre, dans laquelle la quantité $m-q+\mu$ varie successivement de $-p$ et de $-n$; et d'après ces considérations on verra que le nombre des termes divisibles par y^r, après l'exclusion des termes divisibles par t^n, u^p, x^q, est exprimé par $\Delta^3{}_{q,p,n}[o]^{-\mu}[m-r+\mu]^{\mu}$, $\Delta^3{}_{p,q,n}$ marquant que la quantité $m-r+\mu$ varie successivement de $-q$, $-p$, $-n$, et enfin que $\Delta^4{}_{r,q,p,n}[o]^{-\mu}[m-s+\mu]^{\mu}$, exprimera le nombre des

termes divisibles par z^s, après l'exclusion des termes divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r.

Quant au nombre des termes restans après l'exclusion de tous ceux qu'on vient de désigner, il s'obtiendra en observant que ceux qui restent après l'exclusion des termes divisibles par t^n est

$$\overset{-\mu}{[o]}\{\overset{\mu}{[m+\mu]}-\overset{\mu}{[m-n+\mu]}\}=\Delta_n\overset{-\mu}{[o]}\,\overset{\mu}{[m+\mu]},$$

et si l'on en retranche ceux qui restent divisibles par u^p et dont le nombre est $\Delta_n\overset{-\mu}{[o]}\,\overset{\mu}{[m-p+\mu]}$, il viendra

$$\Delta_n\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]}-\Delta_n\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m-p+\mu]}=\Delta^2{}_{n,p}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]};$$

retranchant encore de ce résultat le nombre des termes divisibles par x^q, après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n et u^p, on aura

$$\Delta^2{}_{n,p}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]}-\Delta^2{}_{p,n}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m-q+\mu]}=\Delta^3{}_{n,p,q}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]},$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, et on arrivera à

$$\Delta^3{}_{n,p,q}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]}-\Delta^3{}_{q,p,n}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m-r+\mu]}=\Delta^4{}_{n,p,q,r}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]},$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r: enfin à

$$\Delta^4{}_{n,p,q,r}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+\mu]}-\Delta^4{}_{r,q,p,n}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m-s+\mu]}=\Delta^5{}_{n,p,q,r,s}\overset{-\mu}{[o]}[m+\mu],$$

pour le nombre des termes restans après l'exclusion de ceux qui sont divisibles par t^n, u^p, x^q, y^r et z^s.

969. Maintenant, pour procéder à l'élimination entre un nombre quelconque μ d'équations, renfermant un pareil nombre d'inconnues et représentées par

$$(t\ldots\mu)^m=0,\quad (t\ldots\mu)^n=0,\quad (t\ldots\mu)^p=0,\ \text{etc.}\ldots$$

concevons qu'on multiplie la première par un polynome complet, contenant aussi μ inconnues, mais d'un degré indéterminé m', et désignons le résultat ou l'*équation-produit* par $(t\ldots\ldots\mu)^{m+m'}=0$; les autres équations pourroient donner immédiatement les valeurs de u^n, x^p, y^q, etc. considérées comme des inconnues au premier

degré, et serviroient par conséquent à chasser ces quantités de l'équation-produit, après quoi il n'y resteroit plus aucun des termes divisibles par u^n, x^p, y^q, etc. Si donc l'on ne veut conserver que l'inconnue t, dans l'équation-produit, qui deviendra dans ce cas l'équation finale résultante de l'élimination des inconnues u, x, y, etc. il faudra faire évanouir tous les termes qui en demeurent affectés, en disposant pour cela des coefficiens introduits par le polynome multiplicateur.

Pour ne pas embarrasser le Calcul de termes inutiles, il convient d'abord de faire disparoître du polynome multiplicateur tous ceux qui sont divisibles par u^n, x^p, y^q, etc. afin de connoître ensuite le nombre de ceux qu'il faudra faire évanouir; et le nombre des termes restans après cette opération sera exprimé par

$$\overset{\mu-1}{\Delta}_{n,p,q\ldots}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m'+\mu]}\text{ (n°. précéd.)},$$

puisque $\mu-1$ désigne le nombre des inconnues que l'on élimine. Les mêmes substitutions réduiront l'équation-produit à un nombre de termes marqué par

$$\overset{\mu-1}{\Delta}_{n,p,q\ldots}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m+m'+\mu]}.$$

Si donc D représente le degré de l'équation finale en t, le nombre de ses termes sera $D+1$, et par conséquent le nombre de ceux qui resteront affectés des inconnues u, x, y, etc. dans l'équation-produit, après les substitutions que nous venons d'indiquer, aura pour expression

$$\overset{\mu-1}{\Delta}_{n,p,q\ldots}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{m+m'+\mu]}-D-1,$$

tandis que le nombre des coefficiens indéterminés, introduits par le polynome multiplicateur, sera

$$\overset{\mu-1}{\Delta}_{n,p,q\ldots}\overset{-\mu}{[o]}\overset{\mu}{[m'+\mu]}.$$

Parmi ces coefficiens il en doit rester un qui soit arbitraire, puisque l'on peut toujours réduire à l'unité le coefficient de l'un des termes de l'équation-produit; d'après ces considérations on a,

pour déterminer m', l'équation

$$\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots\ldots}[0]^{-\mu}[m'+\mu]^{\mu}-1=\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots\ldots}[0]^{-\mu}[m+m'+\mu]^{\mu}-D-1,$$

qui donne

$$D=[0]^{-\mu}\{\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu}-\Delta^{\mu-1}_{n,p,q\ldots}[0]^{-\mu}[m'+\mu]^{\mu}\}$$
$$=[0]^{-\mu}\Delta^{\mu}_{m,n,p,q\ldots\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu},$$

en passant hors de la caractéristique Δ, le facteur constant $[0]^{-\mu}$, et en réduisant les deux termes du second membre à un seul. Il ne reste plus qu'à développer la différence indiquée, en observant que les variations de la quantité $m+m'+\mu$ sont successivement $-m$, $-n$, $-p$, $-q\ldots.$

Pour y parvenir il suffit de remarquer que la fonction $[m+m'+\mu]^{\mu}$, étant développée, par rapport aux puissances de $m+m'$, sera de la forme

$$(m+m')^{\mu}+A(m+m')^{\mu-1}+B(m+m')^{\mu-2}\ldots+M(m+m')+N;$$

et que l'on aura par conséquent

$$\Delta_m[m+m'+\mu]^{\mu}=\mu m(m+m')^{\mu-1}+(\mu-1)mA(m+m')^{\mu-2}\ldots+Mm$$

$$\Delta^2_{m,n}[m+m'+\mu]^{\mu}=\mu(\mu-1)mn(m+m')^{\mu-2}+(\mu-1)(\mu-2)mnA(m+m')^{\mu-3}\ldots.$$

....

$$\Delta^{\mu}_{m,n,p,q\ldots\ldots}[m+m'+\mu]^{\mu}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots.1.mnpq\ldots\ldots$$

Substituant cette valeur dans celle de D, on aura seulement

$$D=mnpq\ldots\ldots$$

c'est-à-dire, le théorême de Bézout, énoncé dans le n°. 189; savoir, que *le degré de l'équation finale, résultante de l'élimination d'un nombre quelconque d'équations complètes, renfermant un pareil nombre d'inconnues et de degrés quelconques, est égal au produit des exposans de ces équations.*

De l'intégration des équations aux Différences, à deux variables.

970. Jusqu'ici nous avons supposé que la différence de la fonction cherchée étoit donnée explicitement par les variables indépendantes, nous allons maintenant nous occuper des cas où l'on a seulement une équation contenant la fonction cherchée, ses différences, les variables indépendantes et leurs accroissemens. Supposons d'abord que la fonction cherchée y ne dépende que de la seule variable x, dont l'accroissement, considéré comme constant, sera désigné à l'ordinaire par h. L'équation proposée sera comprise dans la formule générale $F(x, h, y, \Delta y, \Delta^2 y, \text{etc.}) = 0$.

Il est à propos d'observer que l'on peut en faire disparoître les différences Δy, $\Delta^2 y$, etc. en les remplaçant par les valeurs consécutives de y, puisqu'on a

$$\Delta y = y_1 - y, \qquad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y, \text{ etc.}$$

et le résultat prendra la forme

$$F(x, h, y, y_1, y_2, \text{etc.}) = 0,$$

d'après laquelle on voit que toute équation aux différences fait connoître la valeur de la fonction cherchée, par le moyen d'un certain nombre de valeurs antécédentes.

Si l'équation étoit du premier ordre, par exemple, on auroit y_1, par le moyen de y; si elle étoit du second, on en tireroit y_2, exprimé par y_1 et par y, et ainsi de suite.

Il est facile de reconnoître qu'une équation quelconque aux différences équivaut à une série, dans laquelle on obtient chaque terme par le moyen de sa relation avec ceux qui le précèdent et avec l'indice qui marque le rang qu'il occupe. En effet, lorsqu'on a, par exemple, $y_2 = f(x, h, y, y_1)$, on en déduit

$$y_3 = f(x, h, y_1, y_2), \quad y_4 = f(x, h, y_2, y_3), \text{ etc.}$$

et l'on forme ainsi la série

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4, \text{ etc,}$$

au moyen de ses deux premiers termes.

Ce cas particulier suffit pour montrer que *dans la série déduite d'une équation quelconque aux différences, il y aura toujours autant de termes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de cette équation.*

On

971. On peut changer toute équation aux différences en une équation différentielle d'un ordre indéfini, en substituant, au lieu de $\Delta y, \Delta^2 y$, etc. leurs développemens d'après le n°. 864, et il n'est pas moins évident que l'on convertiroit aussi toute équation différentielle en une équation aux différences d'un ordre indéfini, en remplaçant les coefficiens différentiels par leurs développemens tirés de la formule du n°. 867.

Il ne paroît pas que ces transformations, qui ont l'inconvénient d'introduire un nombre infini de termes, puissent être, en général, fort utiles pour l'intégration des équations; mais elles sont très-propres à faire sentir la différence qui existe entre le Calcul différentiel et le Calcul aux différences. Elles prouvent que par la nature de ce dernier, les différences de la variable indépendante doivent avoir nécessairement une valeur déterminée; car si l'on avoit une équation entre x, y, Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc. dans laquelle Δx demeurât indéterminé, qu'on la développât suivant les puissances de Δx, Δy, $\Delta^2 y$, etc. ce qui lui donneroit la forme

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y \\ + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta^2 y \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0;$$

on y pourroit substituer, au lieu de Δy, $\Delta^2 y$, etc. leurs développemens, et comme Δx y resteroit encore indéterminé, il faudroit que les coefficiens des diverses puissances de cet accroissement s'évanouissent d'eux-mêmes. On obtiendroit ainsi, entre les variables x, y, et leurs différentielles, un nombre infini d'équations qui devroient s'accorder entr'elles pour que la proposée signifiât quelque chose; et dans ce cas elle ne seroit équivalente qu'à la première de ces équations, dont les autres deviendroient les différentielles successives.

En ne supposant l'équation aux différences que du premier ordre, ce qui la réduit à

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \text{etc.} = 0,$$

et prenant

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

il vient

$$\left.\begin{array}{l} B\dfrac{dy}{dx} \\ +A \end{array}\right\}\Delta x + \left.\begin{array}{l} E\dfrac{dy^2}{dx^2} \\ +D\dfrac{dy}{dx} \\ +C \\ +\dfrac{B}{1.2}\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{array}\right\}\Delta x^2 + \text{etc.} \Bigg\} = 0,$$

d'où l'on tire

$$B\frac{dy}{dx}+A=0;\quad E\frac{dy^2}{dx^2}+D\frac{dy}{dx}+C+\frac{B}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \text{etc.}$$

et si cette suite d'équations ne peut avoir lieu, la proposée ne pourra se vérifier qu'en assignant à Δx une valeur particulière.

972. Ces préliminaires posés, entrons en matière par l'intégration de l'équation générale du premier degré et du premier ordre.

Soit l'équation $\Delta y + Py = Q$, analogue à l'équation différentielle que nous avons traitée dans le n°. 547; un procédé semblable à celui du n°. cité va nous conduire à son intégrale. Faisons $y = uz$, et nous aurons $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u \Delta z$, ce qui changera l'équation proposée en

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q;$$

en posant séparément

$$z\Delta u + Puz = 0,\ \text{ou}\ \Delta u + Pu = 0,$$

il restera $u\Delta z + \Delta u \Delta z = Q$, d'où l'on tirera

$$\Delta z = \frac{Q}{u+\Delta u}\ \text{et}\ z = \Sigma\frac{Q}{u+\Delta u}.$$

La question se réduit donc à intégrer l'équation $\Delta u + Pu = 0$, dans laquelle on peut séparer les variables en lui donnant la forme $\frac{\Delta u}{u} = -P$, puisque P est supposé ne contenir que x. Prenons $u = e^t$, il en résultera $\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1)$ et $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -P$, d'où nous tirerons

$$e^{\Delta t} = 1 - P,\ \Delta t = l(1-P)\ \text{et}\ t = \Sigma\, l(1-P);$$

mais la somme des logarithmes de la fonction $1-P$, répondant au produit continuel des valeurs successives que reçoit $1-P$, entre les limites de l'intégrale, si l'on désigne ce produit par $[1-P_{x-1}]^{x}$, on aura $t=l[1-P_{x-1}]^{x}$, d'où on conclura

$$u=e^{t}=[1-P_{x-1}]^{x}.$$

Le sens de la notation que nous venons d'introduire est facile à saisir d'après celle du n°. 902, car il est visible que

$$[1-P_{x-1}]^{x}=(1-P_{x-1})(1-P_{x-2})(1-P_{x-3})\ldots\ldots(1-P_{0}),$$

en s'arrêtant à la première des valeurs de x; et si l'on fait attention que $u+\Delta u=u_{1}$, on obtiendra

$$u+\Delta u=[1-P_{x}]^{x+1} \text{ et } z=\Sigma\frac{Q}{[1-P_{x}]^{x+1}};$$

ce qui donnera enfin

$$y=[1-P_{x-1}]^{x}\Sigma\frac{Q}{[1-P_{x}]^{x+1}},$$

la constante arbitraire étant comprise dans l'intégrale indiquée.

C'est à peu près ainsi que Lagrange, qui le premier fit voir l'analogie que les équations du premier degré, aux différences, ont avec les équations différentielles du même degré, a intégré, en 1761, l'équation traitée ci-dessus; il applique ensuite son résultat à l'équation

$$y_{1}=Ry+Q,$$

qui revient à $y+\Delta y=Ry+Q$. En comparant cette dernière avec $\Delta y+Py=Q$, il vient $P=1-R$, $1-P=R$, et l'on a par conséquent $y=[R_{x-1}]^{x}\Sigma\frac{Q}{[R_{x}]^{x+1}}$.

Dans le développement du produit $[1-P_{x-1}]^{x}$, nous avons supposé, pour plus de simplicité, la différence de x égale à l'unité; on pourroit conserver la même expression en convenant qu'elle répond à $(1-P_{x-n})(1-P_{x-2n})(1-P_{x-3n})$ etc. lorsque $\Delta x=n$, ou bien transformer l'équation proposée en une autre, en faisant $x=nx'$, ce qui donneroit $\Delta x=n\Delta x'$ et $\Delta x'=1$.

Si l'on suppose que le coefficient R soit constant, on aura

$$y = R^x \Sigma \frac{Q}{R^{x+1}}.$$

L'intégration indiquée s'effectue facilement lorsque Q est constant ; on obtient dans ce cas

$$\Sigma \frac{Q}{R^{x+1}} = Q \Sigma R^{-x-1} = \frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1} = \frac{Q}{R^x(1-R)} \text{ (n°. 906)},$$

et $$y = R^x \left\{ \frac{Q}{R^x(1-R)} + const. \right\}.$$

En général on obtiendra la valeur de y, délivrée du signe d'intégration toutes les fois que Q sera une fonction rationnelle et entière de x (n°. 911).

973. Dans les recherches citées n°. précéd. Lagrange applique aux équations du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences, la méthode que d'Alembert a donnée pour les équations différentielles du premier degré et dont nous avons fait connoître l'esprit, n°. 658 ; mais il est revenu sur ce sujet, en 1775, par une méthode encore plus simple, que nous allons faire connoître.

Représentons par

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \ldots + U_x y_x = V_x \qquad (A),$$

une équation d'un ordre quelconque et du premier degré par rapport à la fonction y_x ; on prouve, comme dans le n°. 647, que son intégration se ramène à celle de

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} \ldots + U_x z_x = 0 \qquad (B),$$

et que l'on obtient la valeur complète de z_x, lorsqu'on en connoit un nombre n de valeurs particulières.

Cette dernière proposition est évidente par elle-même ; car il est clair que si

$$z'_x, \quad z''_x, \quad z'''_x, \ldots$$

sont des fonctions de x, qui satisfassent à l'équation (B), l'expression

$$z = C'z'_x + C''z''_x + C'''z'''_x + \text{etc.}$$

y satisfera pareillement ; et quand le nombre de ses termes supposés absolument réductibles entr'eux sera n, elle sera l'intégrale

complète de cette équation, puisqu'elle renfermera n constantes arbitraires, C', C'', C''', etc.

Cela posé, si l'on regarde ces constantes comme des fonctions de x, et que dans cette hypothèse on change ζ_x en y_x, ou que l'on fasse

$$y_x = C'_x \zeta'_x + C''_x \zeta''_x + C'''_x \zeta'''_x + \text{etc.}$$

on en déduira d'abord

$$y_{x+1} = C'_{x+1} \zeta'_{x+1} + C''_{x+1} \zeta''_{x+1} + C'''_{x+1} \zeta'''_{x+1} + \text{etc.}$$

résultat qui se transforme en

$$\begin{aligned} y_{x+1} = {} & C'_x \zeta'_{x+1} + C''_x \zeta''_{x+1} + C'''_x \zeta'''_{x+1} + \text{etc.} \\ & + \zeta'_{x+1} \Delta C'_x + \zeta''_{x+1} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

en mettant pour C'_{x+1}, C''_{x+1}, etc. leurs valeurs $C'_x + \Delta C'_x$, $C''_x + \Delta C''_x$, etc. et se réduit à

$$y_{x+1} = C'_x \zeta'_{x+1} + C''_x \zeta''_{x+1} + C'''_x \zeta'''_{x+1} + \text{etc.}$$

lorsqu'on fait

$$\zeta'_{x+1} \Delta C'_x + \zeta''_{x+1} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+1} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (1),$$

de même que si les quantités C'_x, C''_x, C'''_x, etc. fussent demeurées constantes. En faisant de nouveau varier x, on obtiendra

$$\begin{aligned} y_{x+2} & = C'_{x+1} \zeta'_{x+2} + C''_{x+1} \zeta''_{x+2} + C'''_{x+1} \zeta'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & = C'_x \zeta'_{x+2} + C''_x \zeta''_{x+2} + C'''_x \zeta'''_{x+2} + \text{etc.} \\ & + \zeta'_{x+2} \Delta C'_x + \zeta''_{x+2} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} \end{aligned}$$

résultat que l'on réduira à

$$y_{x+2} = C'_x \zeta'_{x+2} + C''_x \zeta''_{x+2} + C'''_x \zeta'''_{x+2} + \text{etc.}$$

par la supposition de

$$\zeta'_{x+2} \Delta C'_x + \zeta''_{x+2} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+2} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (2).$$

Faisant varier x une troisième fois, on parvient à

$$y_{x+3} = C'_x \zeta'_{x+3} + C''_x \zeta''_{x+3} + C'''_x \zeta'''_{x+3} + \text{etc.}$$

en posant

$$\zeta'_{x+3} \Delta C'_x + \zeta''_{x+3} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+3} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \quad (3),$$

et l'on continue ainsi jusqu'aux équations

$$\begin{aligned} & y_{x+n-1} = C'_x \zeta'_{x+n-1} + C''_x \zeta''_{x+n-1} + C'''_x \zeta'''_{x+n-1} + \text{etc.} \\ & \zeta'_{x+n-1} \Delta C'_x + \zeta''_{x+n-1} \Delta C''_x + \zeta'''_{x+n-1} \Delta C'''_x + \text{etc.} = 0 \ (n-1). \end{aligned}$$

Maintenant, si dans la valeur de y_{x+n-1} on change x en $x+1$; on trouvera

$$y_{x+n} = C'_x z'_{x+n} + C''_x z''_{x+n} + C'''_x z'''_{x+n} + \text{etc.}$$
$$+ z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.}$$

mettant dans l'équation (A) les valeurs de y_x, y_{x+1}, ... y_{x+n-1}, y_{x+n}, en observant que par l'hypothèse et d'après l'équation (B),

$$z'_{x+n} + P_x z'_{x+n-1} + Q_x z'_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z'_x = 0$$
$$z''_{x+n} + P_x z''_{x+n-1} + Q_x z''_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z''_x = 0$$
$$z'''_{x+n} + P_x z'''_{x+n-1} + Q_x z'''_{x+n-2} \ldots\ldots + U_x z'''_x = 0,$$

etc.

il restera

$$z'_{x+n}\Delta C'_x + z''_{x+n}\Delta C''_x + z'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{etc.} = V_x \ldots\ldots\ldots (n).$$

On conçoit facilement qu'avec le secours des équations (1), (2), (3), ...($n-1$), (n), on déterminera en fonctions de x, les différences $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$, etc. ce qui réduira la recherche des quantités C', C'', C''', etc. à l'intégration des fonctions d'une seule variable.

974. Il convient donc de nous occuper de l'équation

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} + R_x z_{x+n-3} \ldots + U_x z_x = 0 \ldots (B).$$

Lorsque les coefficiens de cette équation, au lieu d'être des fonctions de x, sont des constantes, ou que l'on a seulement

$$z_{x+n} + P z_{x+n-1} + Q z_{x+n-2} + R z_{x+n-3} \ldots + U z_x = 0 \ldots (C),$$

on y satisfait en faisant $z_x = m^x$, d'où il résulte

$$z_{x+1} = m^{x+1}, \qquad z_{x+2} = m^{x+2}, \ldots\ldots\ldots z_{x+n} = m^{x+n};$$

elle devient

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} + R m^{n-3} \ldots\ldots + U = 0 \ldots\ldots (D),$$

et sera vérifiée si l'on prend pour l'indéterminée m les racines de cette dernière. Si donc on désigne par m', m'', m''', etc. ces diverses racines, on aura (n°. précéd.)

$$z_x = C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x + \ldots\ldots$$

Cette expression présente, par rapport aux quantités m', m'', m''', etc. les mêmes circonstances que l'intégrale de l'équation différentielle $d^n z + P dx d^{n-1} z + Q dx^2 d^{n-2} z + R dx^3 d^{n-3} z \ldots + U z dx^n = 0$ (n°. 648);

Il peut arriver que les racines de l'équation (D) soient toutes réelles et inégales, ou qu'il s'en trouve d'égales entr'elles ; dans le premier cas la valeur de z est complète, mais elle cesse de l'être dans le second. Il faut alors recourir à des artifices d'analyse, semblables à ceux que nous avons employés pour l'équation différentielle ; mais nous présenterons cette recherche sous un point de vue un peu différent, en la ramenant à une détermination particulière des constantes arbitraires.

975. L'équation (C), qui peut être considérée comme exprimant la nature d'une série dont un terme quelconque représenté par z_{r+n} dépend des n termes qui le précédent, suppose nécessairement que les n premiers termes de cette série désignés par

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_3, \ldots z_{n-1}$$

sont arbitraires (n°. 970) : ce sont ces termes que nous allons introduire à la place des constantes C', C'', C''', etc. Pour cela nous aurons les équations

$$\left.\begin{array}{l} z_0 = C' + C'' + C''' + \text{etc.} \\ z_1 = C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{etc.} \\ z_2 = C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{etc.} \\ z_3 = C'm'^3 + C''m''^3 + C'''m'''^3 + \text{etc.} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n-1} = C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{etc.} \end{array}\right\} (E),$$

dont le nombre est égal à celui des quantités C', C'', C''', etc. qui n'y montent d'ailleurs qu'au premier degré ; et en prenant successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. on obtiendra ces résultats particuliers

$$C' = z^0$$

$$C' = \frac{z_1 - m''z_0}{m' - m''}, \qquad C'' = \frac{z_1 - m'z_0}{m'' - m'}$$

$$\left.\begin{array}{l} C' = \dfrac{z_2 - (m'' + m''')z_1 + m''m'''z_0}{(m' - m'')(m' - m''')} \\ C'' = \dfrac{z_2 - (m' + m''')z_1 + m'm'''z_0}{(m'' - m')(m'' - m''')} \\ C''' = \dfrac{z_2 - (m' + m'')z_1 + m'm''z_0}{(m''' - m')(m''' - m'')} \end{array}\right\}$$

etc.

La loi de ces résultats est déjà assez évidente pour qu'on puisse les pousser aussi loin qu'il sera nécessaire ; mais on peut en découvrir la forme générale sans recourir à l'induction, en faisant usage du procédé d'élimination donné à la fin du n°. 649.

En effet, si l'on représente par

$$t^{n-1}+P't^{n-2}+Q't^{n-3}\ldots\ldots+U'=0,$$

l'équation dont les racines sont m'', m''', etc. et que l'on multiplie l'avant-dernière des équations (E) par P', la précédente par Q', et ainsi de suite jusqu'à la première, qui sera multipliée par U', on aura, en ajoutant les produits,

$$\left.\begin{aligned} &z^{n-1}+P'z^{n-2}+Q'z^{n-3}\ldots\ldots\ldots+U'z_0\\ &=C'\,(m'^{n-1}+P'm'^{n-2}+Q'm'^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+C''(m''^{n-1}+P'm''^{n-2}+Q'm''^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+C'''(m'''^{n-1}+P'm'''^{n-2}+Q'm'''^{n-3}\ldots\ldots+U')\\ &+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\};$$

toutes les lignes du second membre, excepté la première, sont nécessairement nulles, comme n'offrant que les résultats de la substitution des quantités m'', m''', etc. à la place de t: il viendra donc

$$C'=\frac{z_{n-1}+P'z_{n-2}+Q'z_{n-3}\ldots\ldots+U'z_0}{m'^{n-1}+P'm'^{n-2}+Q'm'^{n-3}\ldots+U'}.$$

On trouveroit de la même manière C'', C''', etc. en substituant successivement les racines m'', m''', etc. à la place de m', et en formant l'équation t avec les racines m', m''', m'''', etc. m', m'', m'''', etc.

Nous avons déjà fait voir dans le n°. cité, que

$$m'^{n-1}+P'm'^{n-2}+Q'm'^{n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+U'=(m'-m'')(m'-m''')\text{ etc.}$$
$$=n\,m'^{n-1}+(n-1)P\,m'^{n-2}+(n-2)Qm'^{n-3}\ldots\ldots+T,$$

ce qui se déduit évidemment de

$$\frac{d\{m^n+Pm^{n-1}+Qm^{n-2}\ldots\ldots+Tm+U\}}{dm},$$

pourvu qu'après la différentiation on change m en m'. Pour former les quantités P', Q', $R'\ldots\ldots U'$, il faut multiplier l'équation

$$t^{n-1}+P't^{n-2}+Q't^{n-3}\ldots\ldots+U'=0,$$

par $t-m'$, ce qui doit la rendre identique avec

$$m^n+Pm^{n-1}+Q^{n-2}\ldots\ldots+Tm+U=0;$$

en

en changeant t en m, et on aura, par la comparaison des termes semblables

$$P'-m'=P,\quad Q'-P'm'=Q,\quad R'-Q'm'=R,\quad S'-R'm'=S,\ldots$$

d'où on tirera

$$\begin{aligned}
P'&=P+m'\\
Q'&=Q+Pm'+m'^2\\
R'&=R+Qm'+Pm'^2+m'^3\\
S'&=S+Rm'+Qm'^2+Pm'^3+m'^4,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

976. Supposons à présent que l'équation en m ait des racines imaginaires et des racines égales; il faudra, comme on l'a indiqué dans le n°. 650, réunir les premières par couple, et on convertira ensuite chacune en fonction de sinus et de cosinus, suivant les formules connues: la transformation s'opéreroit avec un peu plus de facilité en traitant immédiatement par le procédé du n°. 648, la valeur obtenue dans le n°. 974.

En observant que

$$\begin{aligned}
&m'^{n-1}+P'm'^{n-2}+Q'm'^{n-3}\ldots\ldots+U'=(m'-m'')(m'-m''')(m'-m'''')\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m''^{n-1}+P''m''^{n-2}+Q''m''^{n-3}\ldots\ldots+U''=(m''-m')(m''-m''')(m''-m'''')\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m'''^{n-1}+P'''m'''^{n-2}+Q'''m'''^{n-3}\ldots\ldots+U'''=(m'''-m')(m'''-m'')(m'''-m'''')\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

on peut écrire les deux premiers termes de la valeur de z, ainsi qu'il suit,

$$\frac{1}{m'-m''}\left\{\begin{aligned}
&\frac{z_{n-1}+P'z_{n-2}+Q'z_{n-3}\ldots\ldots+U'z_0}{(m'-m''')(m'-m'''')\ldots\ldots}m'^x\\
-&\frac{z_{n-1}+P''z_{n-2}+Q''z_{n-3}\ldots\ldots+U''z_0}{(m''-m''')(m''-m'''')\ldots\ldots}m''^x
\end{aligned}\right.$$

et l'on voit qu'ils se réduisent à $\frac{0}{0}$ lorsque $m'=m''$.

Les trois premiers termes étant écrits de cette manière:

$$\frac{1}{(m'-m'')(m'-m''')(m''-m''')}\left\{\begin{aligned}
&\frac{(m''-m''')(z_{n-1}+P'z_{n-2}+Q'z_{n-2}\ldots\ldots+U'z_0)m'^x}{(m'-m'''')\ldots\ldots}\\
-&\frac{(m'-m''')(z_{n-1}+P''z_{n-2}+Q''z_{n-3}\ldots\ldots+U''z_0)m''^x}{(m''-m'''')\ldots\ldots}\\
+&\frac{(m'-m'')(z_{n-1}+P'''z_{n-2}+Q'''z_{n-3}\ldots\ldots+U'''z_0)m'''^x}{(m'''-m'''')\ldots\ldots}
\end{aligned}\right.$$

deviennent visiblement $\frac{0}{0}$, lorsque l'on a en même tems $m' = m'' = m'''$, et ainsi de suite, à mesure que le nombre des racines égales augmente. Il faut, pour trouver alors la vraie forme de l'intégrale, recourir à la méthode du n°. 139, quand il n'y a que deux racines égales, et à celle du n°. 147 lorsque le nombre de ces racines surpasse deux. L'usage que nous avons déjà fait de ces méthodes dans un cas absolument semblable à celui qui nous occupe (n°. 650), nous dispense d'entrer dans aucun détail, et nous nous bornerons en conséquence à donner la forme des résultats. Il faudra substituer aux deux premiers termes de la valeur de z la quantité

$$c' m'^x + c'' x m'^{x-1},$$

lorsque $m' = m''$, aux trois premiers, la quantité

$$c' m'^x + c'' x m'^{x-1} + c''' \frac{x(x-1)}{2} m'^{x-2},$$

lorsque $m' = m'' = m'''$, et ainsi de suite: dans ces expressions c', c'', c''', etc. remplacent les constantes arbitraires C', C'', C''', etc.

977. Nous indiquerons succinctement ici la route qu'il faut suivre pour déterminer les quantités C', C'', C''', etc. par le moyen des équations (1), (2)...(n—1), (n), du n°. 973, afin de parvenir à l'intégrale de l'équation (A), dans le cas où les coefficiens P, Q, R... U sont constans et V_x est une fonction quelconque de x. Les équations (1), (2)....(n—1), (n), deviennent alors

$$m'^{x+1} \Delta C' + m''^{x+1} \Delta C'' + m'''^{x+1} \Delta C''' + \text{etc.} = 0$$
$$m'^{x+2} \Delta C' + m''^{x+2} \Delta C'' + m'''^{x+2} \Delta C''' + \text{etc.} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m'^{x+n-1} \Delta C' + m''^{x+n-1} \Delta C'' + m'''^{x+n-1} \Delta C''' + \text{etc.} = 0$$
$$m'^{x+n} \Delta C' + m''^{x+n} \Delta C'' + m'''^{x+n} \Delta C''' + \text{etc.} = V_x,$$

en y substituant pour z'_x, z'_{x+1}, z'_{x+2}, ... z''_x etc.

$$m'^x,\ m'^{x+1},\ m'^{x+2} \ldots m''^x,\ \text{etc.}$$

si l'on fait

$$m'^{x+1} \Delta C' = A' V_x; \quad m''^{x+1} \Delta C'' = A'' V_x, \quad m'''^{x+1} \Delta C''' = A' V_x, \quad \text{etc.}$$

on arrivera aux équations

$$A' + A'' + A''' + \text{etc.} = 0$$
$$m'A' + m''A'' + m'''A''' + \text{etc.} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m'^{n-2}A' + m''^{n-2}A'' + m'''^{n-2}A''' + \text{etc.} = 0$$
$$m'^{n-1}A + m''^{n-1}A'' + m'''^{n-1}A''' + \text{etc.} = 0$$

traitées dans le n°. 649, et l'on terminera l'opération comme dans le n°. 975. Si parmi les valeurs de m, il s'en trouve d'imaginaires ou d'égales entr'elles, on aura égard à chacune de ces circonstances par des procédés absolument semblables à ceux qui sont développés dans le n°. 650.

978. L'on n'a fait que peu de tentatives pour intégrer l'équation

$$z_{x+n} + P_x z_{x+n-1} + Q_x z_{x+n-2} \dots + U_x z_x = 0,$$

dans le cas où les coefficiens P_x, Q_x, ... U_x, sont des fonctions de x; c'est Laplace qui, dans ce genre, a porté le plus loin ses recherches, et pour en présenter l'ensemble, nous commencerons par donner la méthode qu'il employe pour intégrer l'équation du premier degré et du premier ordre.

Soit $y_{x+1} = P_x y_x + Q_x$,
on tire successivement de cette équation

$$y_1 = P_0 y_0 + Q_0$$
$$y_2 = P_1 y_1 + Q_1$$
$$y_3 = P_2 y_2 + Q_2$$
$$y_4 = P_3 y_3 + Q_3$$
etc.

substituant la valeur de y_1, dans celle de y_2, puis cette dernière dans celle de y_3 et ainsi de suite, il viendra

$$y_1 = P_0 y_0 + Q_0$$
$$y_2 = P_1 P_0 y_0 + P_1 Q_0 + Q_1$$
$$y_3 = P_2 P_1 P_0 y_0 + P_2 P_1 Q_0 + P_2 Q_1 + Q_2$$
$$y_4 = P_3 P_2 P_1 P_0 y_0 + P_3 P_2 P_1 Q_0 + P_3 P_2 Q_1 + P_3 Q_2 + Q_3;$$

et en général

$$\begin{aligned}y_x = P_{x-1}P_{x-2}P_{x-3}\ldots P_0 y_0 &+ P_{x-1}P_{x-2}\ldots P_1 Q_0\\ &+ P_{x-1}P_{x-2}\ldots P_2 Q_1\\ &+ P_{x-1}P_{x-2}\ldots P_3 Q_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ Q_{x-1},\end{aligned}$$

expression que, d'après la convention faite dans le n°. 972, l'on peut encore écrire comme il suit:

$$y_x = [P_{x-1}]^{x} y_0 + [P_{x-1}]^{x-1} Q_0 + [P_{x-1}]^{x-2} Q_1 + [P_{x-1}]^{x-3} Q_2 \ldots + [P_{x-1}]^{0} Q_{x-1};$$

on a dans cette formule la valeur de y_x, exprimée par le moyen de y_1, et par conséquent le terme général de la série correspondante à l'équation

$$y_{x+1} = P_x y_x + Q_x.$$

Si l'on représente y_0 par une quantité arbitraire C, et que l'on observe en même tems que la série

$$[P_{x-1}]^{x-1} Q_0 + [P_{x-1}]^{x-2} Q_1 + P_{x-1}]^{x-3} Q_2 \ldots + [P_{x-1}]^{0} Q_{x-1},$$

étant mise sous la forme

$$[P_{x-1}]^{x} \left\{ \frac{Q_0}{[P_0]^{1}} + \frac{Q_1}{[P_1]^{2}} + \frac{Q_2}{[P_2]^{3}} \ldots + \frac{Q_{x-1}}{[P_{x-1}]^{x}} \right\},$$

que l'on peut vérifier par le développement ou par les analogies de la notation actuelle avec celle du n°. 902, revient à $[P_{x-1}]^{x} \Sigma \frac{Q_x}{[P_x]^{x+1}}$ (n°. 897), on aura de même que dans le n°. 972

$$y_x = [P_{x-1}]^{x} \left\{ C + \Sigma \frac{Q_x}{[P_x]^{x+1}} \right\}.$$

Ce procédé doit être remarqué parce qu'il conduit directement à l'intégrale et qu'il montre le parti que l'on peut tirer de la formation des valeurs successives de la fonction cherchée, pour en obtenir l'expression générale.

979. Passons aux ordres supérieurs : soit

$$y_{x+n}=P_x y_{x+n-1}+Q_x y_{x+n-2}\ldots+T_x y_{x+1}+U_x y_x+V_x,$$

et faisons

$$y_{x+1}=p_x y_x+q_x$$
$$y_{x+2}=p_{x+1}y_{x+1}+q_{x+1}$$
$$y_{x+3}=p_{x+2}y_{x+2}+q_{x+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{x+n}=p_{x+n-1}y_{x+n-1}+q_{x+n-1};$$

multipliant successivement les $n-1$, premières de ces équations, par α_1, α_2, α_3, etc.....α_{n-1}, et ajoutant les résultats avec la dernière, nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned}y_{x+n}=&(p_{x+n-1}-\alpha_{n-1})y_{x+n-1}+(\alpha_{n-1}p_{x+n-2}-\alpha_{n-2})y_{x+n-2}\\&+(\alpha_{n-2}p_{x+n-3}-\alpha_{n-3})y_{x+n-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_1 p_x y_x\\&+q_{x+n-1}+\alpha_{n-1}q_{x+n-2}+\alpha_{n-2}q_{x+n-3}\ldots\ldots+\alpha_1 q_x;\end{aligned}$$

comparant celle-ci avec la proposée, nous en déduirons les suivantes,

$$P_x=p_{x+n-1}-\alpha_{n-1}$$
$$Q_x=\alpha_{n-1}p_{x+n-2}-\alpha_{n-2}$$
$$R_x=\alpha_{n-2}p_{x+n-3}-\alpha_{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_x=\alpha_2 p_{x+1}-\alpha_1$$
$$U_x=\alpha_1 p_x$$
$$V_x=q_{x+n-1}+\alpha_{n-1}q_{x+n-2}+\alpha_{n-2}q_{x+n-3}\ldots\ldots+\alpha_1 q_x,$$

dont le nombre est évidemment égal à $n+1$. On tire successivement des $n-1$ premières,

$$\alpha_{n-1}=p_{x+n-1}-P_x$$
$$\alpha_{n-2}=p_{x+n-2}p_{x+n-1}-p_{x+n-2}P_x-Q_x$$
$$\alpha_{n-3}=p_{x+n-3}p_{x+n-2}p_{x+n-1}-p_{x+n-3}p_{x+n-2}P_x-p_{x+n-3}Q_x-R_x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1=\overset{n-1}{[p_{x+n-1}]}-\overset{n-2}{[p_{x+n-2}]}P_x-\overset{n-3}{[p_{x+n-3}]}Q_x\ldots\ldots+T_x$$

et à cause que $U_x=\alpha_1 p_x$, il viendra

$$U_x=\overset{n}{[p_{x+n-1}]}-\overset{n-1}{[p_{x+n-2}]}P_x-\overset{n-2}{[p_{x+n-3}]}Q_x\ldots\ldots-\overset{1}{[p_x]}T_x,$$

équation qui n'est que de l'ordre $n-1$, par rapport à la fonction

inconnue p_x, puisqu'elle ne comprend que les valeurs $p_x, p_{x+1}, \ldots p_{x+n-1}$, mais qui n'est plus du premier degré. Il n'est pas nécessaire de l'intégrer complètement, il suffit de trouver une seule valeur qui y satisfasse; on substituera cette valeur, ainsi que celles de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots\ldots \alpha_1$, dans l'équation

$$V_x = q_{x+n-1} + \alpha_{n-1} q_{x+n-2} + \alpha_{n-2} q_{x+n-3} \ldots + \alpha_1 q_x,$$

qui ne renfermera plus alors de fonction inconnue que q_x et qui ne sera que de l'ordre $n-1$ et du premier degré par rapport à cette fonction. Cette dernière étant intégrée, donnera une expression de y_x, avec $n-1$ constantes arbitraires, et l'intégrale de l'équation du premier ordre et du premier degré $y_{x+1} = p_x y_x + q_x$, deviendra celle de la proposée; on aura ainsi par le n°. 972,

$$y_x = [p_{x-1}]^{x} \left\{ C + \Sigma \frac{q_x}{[p_x]^{x+1}} \right\}.$$

980. En poursuivant les conséquences de cette méthode, Laplace étoit parvenu de son côté au théorême que nous avons démontré dans le n°. 973; nous renvoyons, pour cet objet, le lecteur à son Mémoire, mais nous intégrerons avec lui l'équation très-étendue

$$y_{x+n} = A[X_{x+n}]^{1} y_{x+n-1} + B[X_{x+m}]^{2} y_{x+n-2} + C[X_{x+m}]^{3} y_{x+n-3} \ldots + L[X_{x+m}]^{n} y_x,$$

dans laquelle les coefficiens A, B, $C, \ldots L$, sont constans; mais où X désigne une fonction quelconque de x. L'équation qui donne p_x devient alors

$$[p_{x+n-1}]^{n} - A[X_{x+m}]^{1}[p_{x+n-2}]^{n-1} - B[X_{x+n}]^{2}[p_{x+n-3}]^{n-2} \ldots - K[X_{x+m}]^{n-1}[p_x]^{1} - L[X_{x+m}]^{n} = 0;$$

et si l'on prend $p_x = aX_{x+m-n+1}$, a étant une quantité constante, il viendra

$$[p_{x+n-1}]^{n} = a^n [X_{x+m}]^{n}, \quad [p_{x+n-2}]^{n-1} = a^{n-1}[X_{x+m-1}]^{n-1}, \text{ etc.}$$

La substitution de ces valeurs fait disparoître X, et il ne reste que l'équation algébrique

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots - Ka - L = 0.$$

Si, pour simplifier, on prend $m = n-1$, et que l'on représente par a', a'', a''', etc. les valeurs de a, celles de p_x seront

$$a'X_x, \quad a''X_x, \quad a'''X_x, \text{ etc.}$$

Il est visible que l'on doit supprimer dans ce cas la quantité q_x, et que l'on a seulement $y_x=[p_{x-1}]^x$ pour l'intégrale première de l'équation proposée, mais à cause des diverses valeurs de p_x, on en déduira, par la théorie des équations du premier degré,

$$y_x=C'a'^x[X_x]^x+C''a''^x[X_x]^x+C'''a'''^x[X_x]^x+\text{etc.}\ldots.$$

intégrale complète de la proposée, et qui revient à

$$y_x=[X_x]^x\{C'a'^x+C''a''^x+C'''a'''^x+\text{etc.}\ldots\}.$$

981. Les résultats précédens peuvent être changés en d'autres d'une forme plus simple à quelques égards, en mettant à y l'indice x à la place de $x+n$: l'équation proposée deviendra par là

$$y_x=P_xy_{x-1}+Q_xy_{x-2}\ldots+T_xy_{x-n-1}+U_xy_{x-n}+V_x.$$

On la traitera encore suivant le procédé du n°. 979, en observant d'écrire p_{x+1} et q_{x+1}, au lieu de p_x et de q_x, dans les premières équations de la page 197, avant d'y changer $x+n$ en x, et de les prendre ensuite dans un ordre inverse.

L'équation du n°. précédent se changera, de cette manière, en

$$y_x=A[X_x]^1y_{x-1}+B[X_x]^2y_{x-2}\ldots+L[X_x]^ny_{x-n},$$

si l'on fait $m=n$, et dépendra alors de l'équation

$$[p_x]^n-A[X_x]^1[p_x]^{n-1}-B[X_x]^2[p_x]^{n-2}\ldots+K[p_x]^1[X_x]^{n-1}-L[X_x]^n=0,$$

qu'on transformera encore en

$$a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}\ldots.-Ka-L=0;$$

en prenant $p_x=aX_x$, et la valeur complète de y_x sera

$$y_x=[X_x]^x\{C'a'^x+C''a''^x+C'''a'''^x+\text{etc.}\}.$$

982. Passons à l'application de ces derniers résultats, et prenons pour cela les équations comprises dans la formule

$$y_x=A[x]^1y_{x-1}+B[x]^2y_{x-2}\ldots\ldots+L[x]^ny_{x-n},$$

qui s'obtient en faisant $X_x=x$ dans l'équation proposée; nous trouverons qu'elle dépend de

$$a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}\ldots.-Ka-L=0,$$

et qu'elle a pour intégrale

$$y_x=[x]^x\{C'a'^x+C''a''^x+C'''a'''^x+\text{etc.}\}.$$

Supposons, pour particulariser les résultats, que l'équation proposée ne monte qu'au second ordre; nous aurons seulement

$$y_x = A\overset{1}{[x]}y_{x-1} + B\overset{2}{[x]}y_{x-2},$$

d'où nous tirerons

$$a^2 - Aa - B = 0, \quad a = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 + B},$$

$$y_x = \overset{x}{[x]}\{C'a'^x + C''a''^x\}.$$

Si l'on veut déterminer C' et C'' par le moyen des termes y_0 et y_1, on aura, à cause de $\overset{0}{[0]} = 1$, les équations

$$y_0 = C' + C'', \quad y_1 = C'a' + C''a'',$$

lesquelles donneront

$$C' = \frac{a''y_0 - y_1}{a'' - a'}, \quad C'' = \frac{a'y_0 - y_1}{a' - a''},$$

et il viendra pour résultat final

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{\frac{a''y_0 - y_1}{a'' - a'}a'^x + \frac{a'y_0 - y_1}{a' - a''}a''^x\right\}.$$

Quand les deux racines a' et a'' seront égales, on fera $a'' = a' + k$, il viendra

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{\frac{(a'+k)y_0 - y_1}{k}a'^x + \frac{a'y_0 - y_1}{-k}(a'+k)^x\right\};$$

en développant et réduisant, on trouvera

$$y_x = \overset{x}{[x]}\left\{y_0a'^x - \frac{a'y_0 - y_1}{k}\left(xa'^{x-1}k + \frac{x(x-1)}{2}a'^{x-2}k + \text{etc.}\right)\right\}$$

$$= \overset{x}{[x]}\left\{y_0a'^x - (a'y_0 - y_1)\left(xa'^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}a'^{x-2}k + \text{etc.}\right)\right\};$$

posant ensuite $k = 0$, on aura seulement

$$y_x = \overset{x}{[x]}a'^{x-1}\{a'y_0 - (a'y_0 - y_1)x\}.$$

Si les deux racines a' et a'' étoient imaginaires, en les ramenant à

à la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, on changeroit l'expression de y_x en

$$y_x=[\overset{x}{x}]\left\{\frac{(\alpha-\beta\sqrt{-1})y_0-y_1}{-2\beta\sqrt{-1}}(\alpha+\beta\sqrt{-1})^x+\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})y_0-y_1}{2\beta\sqrt{-1}}(\alpha-\beta\sqrt{-1})^x\right\}$$

$$=[\overset{x}{x}]\left\{\frac{(y_1-\alpha y_0)((\alpha+\beta\sqrt{-1})^x-(\alpha-\beta\sqrt{-1})^x)}{2\beta\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{y_0((\alpha+\beta\sqrt{-1})^x+(\alpha-\beta\sqrt{-1})^x)}{2}\right\};$$

mais on a par le n°. 165

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^x=\gamma^x(\cos\delta x+\sqrt{-1}\sin\delta x)$$

$$(\alpha-\beta\sqrt{-1})^x=\gamma^x(\cos\delta x-\sqrt{-1}\sin\delta x),$$

en posant

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\gamma,\qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\delta,\qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\delta;$$

et la substitution de ces valeurs dans celle de y_x donnera

$$y_x=[\overset{x}{x}]\gamma^x\left\{y_0\cos\delta x+\frac{y_1-\alpha y_0}{\beta}\sin\delta x\right\}.$$

Prenons enfin un exemple en nombres; soit l'équation

$$y_x=2[\overset{1}{x}]y_{x-1}+3[\overset{2}{x}]y_{x-2},$$

ou

$$y_x=2\,x\,y_{x-1}+3x(x-1)y_{x-2},$$

qui, lorsqu'on fait $y_0=1$, $y_1=4$, engendre la série

1, 4, 22, 204, 1426, etc.

nous aurons, pour déterminer a, l'équation

$$a^2-2a-3=0,$$

de laquelle nous tirerons $a'=3$, $a''=-1$; puis nous obtiendrons avec ces valeurs

$$C'=\frac{y_0+y_1}{4}=\frac{5}{4};\quad C''=\frac{3y_0-y_1}{4}=-\frac{1}{4},$$

$y_x=[\overset{x}{x}]\{\frac{5}{4}.3^x-\frac{1}{4}(-1)^x\}$.

Si l'on prend, par exemple, $x=3$, on déduira de ce résultat $y_3=204$, de même que ci-dessus.

L'équation générale

$$y_x = A\overset{1}{[x]}y_{x-1} + B\overset{2}{[x]}y_{x-2} + \ldots L\overset{n}{[x]}y_{x-n}$$

se traiteroit absolument comme la précédente, et son intégrale seroit de la forme

$$y_x = \overset{x}{[x]}\{C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.}\},$$

a', a'', a''', etc. étant les racines de l'équation

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots\ldots - L = 0.$$

Si l'on vouloit déterminer les constantes C', C'', C''', etc. par le moyen des n premiers termes de la série engendrée par l'équation proposée, on auroit ces équations

$$y_0 = C' \quad + C'' \quad + C''' \quad + \text{etc.}$$

$$\frac{y_1}{1} = C'a' + C''a'' + C'''a''' + \text{etc.}$$

$$\frac{y_2}{1.2} = C'a'^2 + C''a''^2 + C'''a'''^2 + \text{etc.}$$

etc.

qui rentrent dans celles du n°. 975, et dont on tireroit les valeurs de C', C'', C''', etc. par le procédé de ce numéro.

Si l'équation en a contenoit des racines égales ou des racines imaginaires, l'emploi des méthodes indiquées n°. 976, conduiroit aux résultats relatifs à chacun de ces cas; et l'exemple du second ordre auquel nous nous sommes arrêtés, joint à ceux que nous avons donnés pour les équations différentielles, doit lever toutes les difficultés à cet égard.

983. Il est bon de remarquer que si l'on prend

$$z_x = C'a'^x + C''a''^x + C'''a'''^x + \text{etc.}$$

la fonction z_x dépendra de l'équation

$$z_x = Az_{x-1} + Bz_{x-2} \ldots\ldots + Lz_{x-n},$$

dont l'expression ci-dessus offrira par conséquent l'intégrale complète (n°. 974), et que y_x étant donné par l'équation

$$y_x = A\overset{1}{[X_x]}y_{x-1} + B\overset{2}{[X_x]}y_{x-2} \ldots\ldots + L\overset{n}{[X_x]}y_{x-n},$$

on aura $y_x = \overset{x}{[X_x]}z_x$, d'où il suit que le terme général de la série

$$y_x, \quad y_{x+1}, \quad y_{x+2} \ldots\ldots$$

sera donné par le moyen de celui de la série beaucoup plus simple

$$z_x, \quad z_{x+1}, \quad z_{x+2}, \text{ etc.}$$

dont un terme quelconque se forme d'un nombre n des précédens multipliés chacun par une quantité constante.

Nous observerons que cette dernière est le type général de celles que les Analystes ont nommées *récurrentes.* Elles jouissent d'un très-grand nombre de belles propriétés ; on a déjà vu, dans les Elémens d'Algèbre, qu'elles tirent leur origine du développement en série des fractions rationnelles, et nous reviendrons encore sur cet objet dans la suite.

L'équation $y_x = [\overset{n}{X_x}] z_x$ fait voir que l'on satisferoit à

$$y_x = A[\overset{1}{X_x}] y_{x-1} + B[\overset{2}{X_x}] y_{x-2} \ldots + L[\overset{n}{X_x}] y_{x-n} ;$$

en prenant $y_x = [\overset{n}{X_x}] a^x$; il peut être utile de se rappeler cette circonstance, facile à reconnoître d'ailleurs lorsqu'on est exercé dans l'Analyse, parce qu'elle conduit immédiatement l'intégrale par le moyen de la méthode du n°. 974.

Nous avons supprimé le dernier terme V_x dans l'équation proposée ; si on vouloit restituer cette fonction, on arriveroit à l'intégrale au moyen de la valeur de y_x, trouvée ci-dessus, que l'on substitueroit à z_x dans les formules du n°. 977.

984. On peut encore déduire de l'équation en p_x du n°. 979, d'autres cas d'intégrabilité pour les équations du premier degré aux différences. En s'arrêtant, par exemple, au deuxième ordre, on a

$$[\overset{2}{p_{x+1}}] - P_x[\overset{1}{p_x}] - Q_x = 0, \quad \text{ou} \quad p_{x+1}p_x - P_x p_x - Q_x = 0,$$

équation de laquelle on tire

$$P_x = p_{x+1} - \frac{Q_x}{p_x},$$

et qui change par conséquent la proposée en

$$y_{x+2} = \left(p_{x+1} - \frac{Q_x}{p_x}\right) y_{x+1} + Q_x y_x + V_x ;$$

équation intégrable, quelles que soient les fonctions p_x et Q_x. Si l'on fait $p_x = m$, m désignant une constante, il viendra

$$y_{x+2} = \left(m - \frac{Q_x}{m}\right) y_{x+1} + Q_x y_x + V_x.$$

Il est visible que toute équation de la forme

$$Y_x y_x = A[X_x]^{1} Y_{x-1} y_{x-1} + B[X_x]^{2} Y_{x-2} y_{x-2} \ldots + L[X_x]^{n} Y_{x-n} y_{x-n} + V_x$$

rentre dans celle que nous avons considérée n°. précédent, en y faisant $Y_x y_x = y'_x$.

Voici une équation qui semble indéfinie, ou dont l'ordre dépend de la valeur de la variable x, et qui pourtant se ramène à la forme du n°. 973 ; cette équation est

$$\begin{aligned} y_x = \; & P_{x-1} y_{x-1} + Q_{x-2} y_{x-2} + R_{x-3} y_{x-3} + V_x \\ & + P_{x-4} y_{x-4} + Q_{x-5} y_{x-5} + R_{x-6} y_{x-6} \\ & + P_{x-7} y_{x-7} + Q_{x-8} y_{x-8} + R_{x-9} y_{x-9} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + P_3 \; y_3 \; + Q_2 \; y_2 \; + R_1 \; y_1 : \end{aligned}$$

un terme quelconque y_x s'y trouve rapporté à tous ceux qui le précèdent; mais avec cette condition que les fonctions P, Q, R, qui multiplient ces termes, reviennent les mêmes de trois en trois. On tire de là cette équation

$$\begin{aligned} y_{x-3} = \; & P_{x-4} y_{x-4} + Q_{x-5} y_{x-5} + R_{x-6} y_{x-6} + V_{x-3} \\ & + P_{x-7} y_{x-7} + Q_{x-8} y_{x-8} + R_{x-9} y_{x-9} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + P_3 \; y_3 \; + Q_2 \; y_2 \; + R_1 \; y_1 ; \end{aligned}$$

retranchant cette dernière de la proposée, on a

$$y_x - y_{x-3} = P_{x-1} y_{x-1} + Q_{x-2} y_{x-2} + R_{x-3} y_{x-3} + V_x - V_{x-3} ;$$

ou $\quad y_x = P_{x-1} y_{x-1} + Q_{x-2} y_{x-2} + (R_{x-3} + 1) y_{x-3} + V_x - V_{x-3}$.

Cet exemple suffit pour faire connoître comment il faut traiter les équations du genre de la précédente, que l'on pourroit nommer *équations périodiques.*

Nous terminerons cet article en faisant observer que les équations de la forme

$$y_x = V_x y^{\alpha}_{x-1} y^{\beta}_{x-2} y^{\gamma}_{x-3} \ldots\ldots y^{\nu}_{x-n}$$

se ramènent par le moyen des logarithmes à une équation du premier degré ; on en tire en effet

$$\mathrm{l} y_x = \mathrm{l} V_x + \alpha \, \mathrm{l} y_{x-1} + \beta \, \mathrm{l} y_{x-2} + \gamma \, \mathrm{l} y_{x-3} \ldots\ldots + \nu \, \mathrm{l} y_{x-n},$$

et faisant $\mathrm{l} y_x = y'_x$, il vient

$$y'_x = \alpha y'_{x-1} + \beta y'_{x-2} + \gamma y'_{x-3} \ldots + \nu y'_{x-n} + \mathrm{l} V_x.$$

En intégrant cette équation, on aura donc le terme général des séries dont chaque terme se forme du produit d'un certain nombre de ceux qui le précèdent.

985. On intègre aussi les équations aux différences finies par la méthode des coefficiens indéterminés, lorsqu'on peut découvrir au moins quelques parties de la loi que suivent les valeurs successives de la fonction cherchée. Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{n-1}(\alpha_n u + \beta_n) \\ & + y_{n-2}(\alpha'_n u^2 + \beta'_n u + \gamma'_n) \\ & + y_{n-3}(\alpha''_n u^3 + \beta''_n u^2 + \gamma''_n u + \delta''_n u) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

dans laquelle α_n, β_n, α'_n, etc........ représentent des fonctions de la variable indépendante n; si l'on en déduit successivement

$y_0 = A_0$

$y_1 = A_1 u + B_1$

$y_2 = A_2 u^2 + B_2 u + C_2$

$y_3 = A_3 u^3 + B_3 u^2 + C_3 u + D_3$,

on supposera en général

$y_n = A_n u^n + B_n u^{n-1} + C_n u^{n-2} + \text{etc.}$

et substituant cette expression dans l'équation proposée, on aura

$$\begin{aligned} & A_n u^n + B_n u^{n-1} + C_n u^{n-2} + \text{etc.} \\ = {} & (A_{n-1} u^{n-1} + B_{n-1} u^{n-2} + C_{n-1} u^{n-3} + \text{etc.})(\alpha_n u + \beta_n) \\ & + (A_{n-2} u^{n-2} + B_{n-2} u^{n-3} + C_{n-2} u^{n-4} + \text{etc.})(\alpha'_n u^2 + \beta'_n u + \gamma'_n) \\ & + (A_{n-3} u^{n-3} + B_{n-3} u^{n-4} + C_{n-3} u^{n-5} + \text{etc.})(\alpha''_n u^3 + \beta''_n u^2 + \gamma''_n u + \delta''_n) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

comparant entr'eux les termes affectés des mêmes puissances de u, on obtiendra

$$\begin{aligned} A_n = {} & \alpha_n A_{n-1} + \alpha'_n A_{n-2} + \alpha''_n A_{n-3} + \text{etc.} \\ B_n = {} & \alpha_n B_{n-1} + \alpha'_n B_{n-2} + \alpha''_n B_{n-3} + \text{etc.} \\ & + \beta_n A_{n-1} + \beta'_n A_{n-2} + \beta''_n A_{n-3} + \text{etc.} \\ C_n = {} & \alpha_n C_{n-1} + \alpha'_n C_{n-2} + \alpha''_n C_{n-3} + \text{etc.} \\ & + \beta_n B_{n-1} + \beta'_n B_{n-2} + \beta'_n B_{n-3} + \text{etc.} \\ & + \gamma_n A_{n-1} + \gamma'_n A_{n-2} + \gamma''_n A_{n-3} + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

et lorsqu'on pourra intégrer chacune de ces équations, on aura l'expression générale de y_n. Voici deux exemples qui feront bien connoître le parti que l'on peut tirer de cette méthode.

On a

$$\sin n z = \sin(n-1)z\cos z + \cos(n-1)z\sin z$$

et $$\cos(n-1)z\sin z = \tfrac{1}{2}\sin n z - \tfrac{1}{2}\sin(n-2)z,$$

d'où il résulte

$$\sin n z = 2\cos z\sin(n-1)z - \sin(n-2)z;$$

faisant $\sin n z = y_n$ et $\cos z = u$, on formera l'équation

$$y_n = 2uy_{n-1} - y_{n-2},$$

de laquelle on tirera successivement

$y_2 = y_1(2u)$
$y_3 = y_1(4u^2 - 1)$
$y_4 = y_1(8u^3 - 4u)$
$y_5 = y_1(16u^4 - 12u^2 + 1)$
etc.

on donnera donc à la valeur de y_n cette forme

$$y_n = y_1(A_n u^{n-1} + B_n u^{n-3} + C_n u^{n-5} + \text{etc.}).$$

Substituant pour y_{n-1}, et y_{n-2}, leurs valeurs, et comparant entr'eux dans l'équation résultante les termes affectés de la même puissance de u, on obtiendra les équations suivantes

$A_n = 2A_{n-1}$
$B_n = 2B_{n-1} - A_{n-2}$
$C_n = 2C_{n-1} - B_{n-2}$
etc.

qui ne sont que du premier ordre et qui conduisent très-simplement aux valeurs des coefficiens A_n, B_n, C_n, etc. mais pour en faire usage, il faut observer qu'elles n'ont pas toutes la même étendue, c'est-à-dire, qu'elles ne commencent à exister que successivement: la première n'a lieu que lorsque $n=2$, parce que l'équation proposée laisse arbitraires les valeurs de y_0 et y_1. Avec cette attention on trouve que le plus petit indice de B est 3, parce que l'équation qui le détermine ne commence que quand $n=3$; celle qui détermine C ne commence que quand $n=4$, et ainsi de suite.

Cela posé, en intégrant la première il vient $A_n = 2^n C'$, C' étant la constante arbitraire; et comme on doit avoir $A_1 = 1$, il en résulte $C' = \frac{1}{2}$, d'où $A_n = 2^{n-1}$, ce qui donne $A_{n-2} = 2^{n-3}$. Par cette valeur l'équation en B devient $B_n = 2B_{n-1} - 2^{n-3}$, et son intégrale sera

$$B_n = 2^n\left(C'' - \frac{1}{8}\Sigma 1\right) = 2^n\left(C'' - \frac{1}{8}n\right) \quad (\text{n}^{\text{os}}.\ 972 \text{ et } 981),$$

ou $B_n = -2^{n-3}(C'' + n)$, en changeant la constante arbitraire C'' en $-\frac{1}{8}C''$. Pour déterminer la constante C'', il faut faire $n = 2$ et $B_2 = 0$, puisque l'équation en B ne commence que lorsque $n = 3$, et on trouve $\frac{1}{2}(C'' + 2) = 0$, ou $C'' = -2$, d'où il résulte $B_n = -2^{n-3}(n-2)$. Cette détermination donne $B_{n-2} = -2^{n-5}(n-4)$, et si on substitue cette valeur dans celle de C_n, on aura l'équation

$$C_n = 2C_{n-1} + 2^{n-5}(n-4),$$

dont l'intégrale sera

$$C_n = 2^n\left(C''' + \Sigma\frac{2^{n-4}(n-3)}{2^{n+1}}\right) = 2^n\left(C''' + \frac{1}{2^5}\Sigma(n-3)\right)$$

$$= 2^n\left(C''' + \frac{1}{2^5}\frac{(n^2-7n)}{2}\right) = 2^{n-5}\left(C''' + \frac{n^2-7n}{2}\right),$$

en changeant de constante arbitraire. La valeur de C ne commençant que lorsque $n=4$, on doit voir $C_3 = 0$, condition de laquelle on tire $\frac{1}{2^5}(C''' - 6) = 0$, ou $C''' = 6$, et d'où il résulte

$$C_n = 2^{n-5}\left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right) = 2^{n-5}\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}.$$

On trouvera de même les autres coefficiens, et l'on parviendra ainsi au développement de $\sin n z$, sans avoir recours à l'induction : on obtiendra

$$\sin nz = \sin z \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}\cos z^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos z^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos z^{n-5} \\ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos z^{n-7} + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

986. L'équation $y_n = 2uy_{n-1} - y_{n-2}$, se rapporte à celle du n°. 974, car u y est regardé comme constant; en y faisant donc $y_n = m^n$, on parvient à l'équation $m^2 = 2um - 1$,

de laquelle on tire $m = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$, et par conséquent

$$y_n = C'(u + \sqrt{u^2 - 1})^n + C''(u - \sqrt{u^2 - 1})^n;$$

remettant pour u sa valeur $\cos z$, et changeant y_n en $\sin nz$, il viendra

$$\sin nz = C'(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + C''(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires, il faut observer qu'on a $\sin nz = 0$, lorsque $n = 0$, et $\sin nz = \sin z$, lorsque $n = 1$; ce qui donne les deux équations

$$0 = C' + C''$$

$$\sin z = C'(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) + C''(\cos z - \sqrt{-1}\sin z),$$

qui mènent à $\quad C' = \frac{1}{2\sqrt{-1}}, \quad C'' = -\frac{1}{2\sqrt{-1}},$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos - z\sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}},$$

résultat conforme à celui du n°. 40 de l'Introduction. Le développement auquel il conduit ne diffère de celui du n°. précédent que parce qu'il contient les puissances impaires de $\sin z$, qui sont réduites à la première dans ce dernier.

987. Pour achever d'éclaircir l'application du Calcul aux différences à la recherche des loix que suivent les formules, nous en donnerons encore un second exemple sur l'expression

$$d^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = d^n . \operatorname{arc}(\sin = x).$$

En faisant pour abréger $\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = u$, on trouve d'abord

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}, \text{ etc.}$$

d'où l'on doit conclure qu'en général

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{A_n x^n + B_n x^{n-2} + C_n x^{n-4} + D_n x^{n-6} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}};$$

différentiant

différentiant cette dernière expression, on obtient le résultat

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \left\{ \frac{\begin{matrix}(n+1)A x^{n+1} + (n+3)B_n \\ + \quad nA_n\end{matrix}\Bigg| x^{n-1} + \begin{matrix}(n+5)C_n \\ +(n-2)B_n\end{matrix}\Bigg| x^{n-3} + \begin{matrix}(n+7)D_n \\ +(n-4)C_n\end{matrix}\Bigg| x^{n+3} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}} \right\},$$

dont la comparaison avec

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^{n-1} + C_{n+1}x^{n-3} + D_{n+1}x^{n-5} + \text{etc.}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}},$$

donne les équations suivantes

$$A_{n+1} = (n+1)A_n$$
$$B_{n+1} = (n+3)B_n + nA_n$$
$$C_{n+1} = (n+5)C_n + (n-2)B_n$$
etc.

Toutes ces équations ont la même origine, et l'on peut en conséquence supposer dans toutes $n=1$. La première $A_{n+1}=(n+1)A_n$, d'après cette remarque, a pour intégrale $A_n=[n]^{n}$. La seconde devenant alors $B_{n+1}=(n+3)B_n+n[n]^{n}$, a pour intégrale (n°. 972),

$$B_n = [n+2]^{n}\left\{C' + \Sigma\frac{n[n]^{n}}{[n+3]^{n+1}}\right\}$$
$$= [n+2]^{n}\left\{C' + 1.2\Sigma\frac{n}{[n+3]^{3}}\right\}$$
$$= [n+2]^{n}\left\{C' + 1.2\Sigma n[n]^{-3}\right\}$$

et comme

$$\Sigma n[n]^{-3} = -\frac{n[n]^{-2}}{2} - \frac{[n+1]^{-1}}{1.2} = -\frac{n}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+2)} \text{(n°. 910)},$$

on aura

$$B_n = [n+2]^{n}\left\{C' - \frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n+2}\right\},$$

expression dans laquelle il faudra déterminer C', par la condition

que B_n soit nul lorsque $n=1$; on trouvera ainsi $C'=\frac{1}{2}$, et

$$B_n=[n]^{n-2}\frac{(n^2-n)}{2}=[n]^{n}\frac{1}{2}\,\frac{[n]^{2}}{1.2}=[n]^{n}[\tfrac{1}{2}]^{1}[0]^{-1}[n]^{2}[0]^{-2}.$$

Les valeurs de C_n, D_n et des coefficiens ultérieurs, s'obtiendront de la même manière, on aura

$$C_n=[n]^{n}.\frac{1.3}{2.4}[n]^{4}[0]^{-4}=[n]^{n}[\tfrac{1}{2}]^{2}[0]^{-2}[n]^{4}[0]^{-4}$$

$$D_n=[n]^{n}.\frac{1.3.5}{2.4.6}[n]^{6}[0]^{-6}=[n]^{n}[\tfrac{1}{2}]^{3}[0]^{-3}[n]^{6}[0]^{-6}$$

etc.

en changeant n en $n-1$, on en conclura

$$\frac{d^n\mathrm{arc}(\sin=x)}{dx^n}=\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}=$$

$$\frac{[n-1]^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}\{x^{n-1}+[\tfrac{1}{2}]^{1}[0]^{-1}[n-1]^{2}[0]^{-2}x^{n-3}+[\tfrac{1}{2}]^{2}[0]^{-2}[n-1]^{4}[0]^{-4}x^{n-5}$$

$$+[\tfrac{1}{2}]^{3}[0]^{-3}[n-1]^{6}[0]^{-5}x^{n-7}+[\tfrac{7}{2}]^{4}[0]^{-4}[n-1]^{8}[0]^{-8}x^{n-9}+\text{etc.}\}.$$

988. Jusqu'ici nous avons toujours supposé que l'accroissement de la variable indépendante x étoit constant; il existe cependant des questions analytiques dans lesquelles cet accroissement est variable, telle seroit la suivante: trouver une fonction de x, désignée par $\varphi(x)$, dans laquelle en mettant successivement $f(x)$ et $F(x)$, au lieu de x, on ait $\varphi(F(x))=P_x\varphi(f(x))+Q_x$; $f(x)$, $F(x)$, P_x et Q_x, étant des fonctions données de x. Laplace, par un procédé très-simple, ramène cette question à l'intégration d'une équation aux différences, dans laquelle l'accroissement de la variable indépendante est constant; il fait $f(x)=u_z$, $F(x)=u_{z+1}$, u_z représentant une fonction inconnue de la variable z, et puisque $f(x)$ est connue, on peut, en supposant l'équation algébrique $f(x)=u_z$, résoluble par rapport à x, tirer de là $x=f_{,}(u_z)$, valeur qui transforme l'équation $F(x)=u_{z+1}$, en cette autre $u_{z+1}=E(f_{,}(u_z))$.

Lorsqu'on pourra intégrer cette équation, on aura l'expression de u_z en fonction de z, au moyen de laquelle on obtiendra aussi x

en fonction de z: les fonctions $\varphi(F(x))$ et $\varphi(f(x))$, deviendront respectivement $\varphi(u_{z+1})$, $\varphi(u_z)$; on pourra les représenter par y_{z+1}, y_z, d'où il résultera une équation de la forme

$$y_{z+1} = P y_z + Q_z,$$

dans laquelle la variable indépendante z ne croîtra que de l'unité. Après la détermination de y_z, on y substituera la valeur de z en x, pour passer à l'expression de $\varphi(f(x))$, que l'on ramenera à celle de $\varphi(x)$, en y changeant $f(x)$ en x.

Pour donner un exemple de la recherche précédente, faisons $f(x) = mx$, $F(x) = x^q$, et supposons que l'on doive trouver

$$\varphi(x^q) = \varphi(mx) + Q,$$

Q étant un coefficient constant. En prenant $u_z = mx$, $u_{z+1} = x^q$, on formera l'équation $u_{z+1} = \frac{u^q_z}{m^q}$, qu'on transformera par le moyen des logarithmes en $1u_{z+1} = q\,1u_z - q\,1m$: l'intégrale de cette dernière, par rapport à $1u_z$ est

$$1u_z = q^z\left(C' - \Sigma\frac{1m}{q^z}\right) = q^z\left(C' - \frac{q^{-z}1m}{q^{-1}-1}\right) = q^z\left(C' - \frac{1m}{q^{z-1}(1-q)}\right).$$

Pour déterminer la constante, soit $u_1 = a$; il viendra

$$1a = q\left(C' - \frac{1m}{1-q}\right),\text{ d'où}\quad C' = \frac{1}{q}\left(1a + q\frac{1m}{1-q}\right),\qquad 1u_z =$$

$$q^z\left(C' - \frac{1m}{q^{z-1}(1-q)}\right) = q^{z-1}1a + \frac{q^z 1m}{1-q} - \frac{q\,1m}{1-q} = q^{z-1}1a - \frac{(q^z-q)}{q-1}1m,$$

et enfin, en passant aux nombres, $u_z = \dfrac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{q^z-q}{q-1}}}$.

Posant ensuite $\varphi(mx) = y_z$ et $\varphi(x^q) = y_{z+1}$, on aura $y_{z+1} = y_z + Q$, équation dont l'intégrale donne $y_z = C' + \Sigma Q = C' + Qz$, d'où l'on conclut $\varphi(mx) = C' + Qz$, et il ne reste plus qu'à exprimer z en x, par le moyen de l'équation $u_z = mx = \dfrac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{q^z-q}{q-1}}}$. En reprenant les logarithmes, nous obtiendrons $1mx = q^{z-1}1a - \frac{q^z-q}{q-1}1m$,

résultat que nous mettrons sous la forme

$$\mathrm{l}mx = \frac{q^z \mathrm{l}a}{q} - \frac{q^z - q}{q-1}\mathrm{l}m = q^z\left(\frac{\mathrm{l}a}{q} - \frac{\mathrm{l}m}{q-1}\right) + \frac{q\,\mathrm{l}m}{q-1},$$

et d'où nous tirerons alors

$$q^z\left(\frac{\mathrm{l}a}{q} - \frac{\mathrm{l}m}{q-1}\right) = \mathrm{l}mx - \frac{q\,\mathrm{l}m}{q-1} = \mathrm{l}\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}.$$

Si nous faisons pour abréger $\frac{\mathrm{l}a}{q} - \frac{\mathrm{l}m}{q-1} = b$, nous aurons

$$q^z = \frac{1}{b}\mathrm{l}\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}, \quad z = \frac{1}{\mathrm{l}q}\left\{\mathrm{ll}\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}b\right\},$$

et par conséquent

$$y_z = \varphi(mx) = C' + \frac{Q}{\mathrm{l}q}\left\{\mathrm{ll}\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}b\right\}.$$

Si l'on écrit simplement x, au lieu de mx, on obtiendra pour dernier résultat

$$\varphi(x) = C' + \frac{Q}{\mathrm{l}q}\left\{\mathrm{ll}\frac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}} - \mathrm{l}b\right\}.$$

Occupons-nous encore de l'équation $\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2$; nous ferons dans cet exemple $u_z = x$, $u_{z+1} = 2x$, et nous aurons en conséquence $u_{z+1} = 2u_z$, d'où nous déduirons $u_z = C.2^z = x$; posant ensuite $\varphi(x) = y_z$ et $\varphi(2x) = y_{z+1}$, l'équation à intégrer sera $y_{z+1} = y^2_z - 2$. Si l'on suppose d'abord $y_1 = a + \frac{1}{a}$, on trouvera

$$y_2 = a^2 \quad + \frac{1}{a^2}$$

$$y_3 = a^4 \quad + \frac{1}{a^4}$$

$$y_4 = a^8 \quad + \frac{1}{a^8}$$

....

$$y_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}.$$

La dernière de ces valeurs est l'intégrale complète, puisqu'elle renferme une première valeur arbitraire a, et l'équation $C.2^z = x$, donnant $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$, on aura

$$y_z = \varphi(x) = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

résultat qui revient à

$$\varphi(x) = b^x + b^{-x},$$

si l'on prend $b = a^{\frac{1}{2C}}$ (*).

(*) M. Daviet de Foncenex avoit cru que l'équation $\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2$ ne pouvoit être résolue qu'en supposant $\varphi(x)$ égale à une constante (*Mélanges de Turin*, T. II, page 320); ce qui précède montre au contraire qu'elle a une infinité de solutions indéterminées. Nous remarquerons ici que l'on seroit parvenu à la même conclusion en faisant

$$\varphi(x) = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{etc.}$$

d'où il seroit résulté l'équation

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + 2ABx^2 + 2AC \\ \qquad\qquad\quad + B^2 \end{array}\right| x^4 + \left.\begin{array}{l} 2AD \\ 2BC \end{array}\right| x^6 + \text{etc.} \Big\} = \Big\{ \begin{array}{l} A + 4Bx^2 + 16Cx^4 + 64Dx^6 \\ +2 \end{array}$$

de laquelle on auroit tiré

$$A^2 = A + 2, \quad 2AB = 4B, \quad 2AC + B^2 = 16C, \text{ etc.}$$

Les racines de la première de ces équations sont $A = 2$, $A = -1$; la seconde équation $2AB = 4B$, réduite à $A = 2$, s'accorde avec l'une de ces racines et laisse B indéterminé; on trouve ensuite

$$C = \frac{B^2}{12} = \frac{2B^2}{1.2.3.4}, \quad D = \frac{2BC}{60} = \frac{2B^3}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc}$$

ce qui conduit à la série

$$\varphi(x) = 2 + \frac{2B}{1.2}x^2 + \frac{2B^2}{1.2.3.4}x^4 + \frac{2B^3}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \text{etc.}$$

équivalente à

$$\varphi(x) = \left.\begin{array}{l} 1 + \frac{B^{\frac{1}{2}}x}{1} + \frac{Bx^2}{1.2} + \frac{B^{\frac{1}{2}}x^3}{1.2.3} + \frac{B^2x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \\ + 1 - \frac{B^{\frac{1}{2}}x}{1} + \frac{Bx^2}{1.2} - \frac{B^{\frac{1}{2}}x^3}{1.2.3} + \frac{B^2x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= e^{B^{\frac{1}{2}}x} + e^{-B^{\frac{1}{2}}x}.$$

989. La même méthode s'applique sans difficulté aux équations des ordres supérieurs; soit par exemple l'équation

$$y_{a^n x} + P_x y_{a^{n-1} x} + Q_x y_{a^{n-2} x} \ldots\ldots + T_x y_{ax} + U_x y_x = V_x,$$

dans laquelle les valeurs

$$y_{a^n x}, \quad y_{a^{n-1} x}, \quad y_{a^{n-2} x}, \ldots\ldots y_{ax}, \quad y_x$$

répondent à celles-ci

$$a^n x, \quad a^{n-1} x, \quad a^{n-2} x, \ldots\ldots\ldots\ldots ax.$$

En faisant $x = u_z$, on aura $ax = u_{z+1}$, d'où on tirera $u_{z+1} = a u_z$ et $u_z = C a^z$, en intégrant. On peut en prendre $C = 1$, et il viendra en conséquence $x = a^z$; avec cette expression de x, on transformera les fonctions P_x, Q_x, ... T_x, U_x et V_x, en fonctions de z, on écrira ensuite y_{z+n}, y_{z+n-1}, etc. au lieu de $y_{a^n x}$, $y_{a^{n-1} x}$, etc. et par ce moyen, l'équation proposée sera ramenée à celle du n°. 973.

En supposant que les coefficiens P, Q, ... T, U, soient constans, la transformée sera seulement

$$y_{z+n} + P y_{z+n-1} + Q y_{z+n-2} \ldots + T y_{z+1} + U y_z = V_z;$$

son intégration ne dépendra que de celle de l'équation

$$y_{z+n} + P y_{z+n-1} + Q y_{z+n-2} \ldots + T y_{z+1} + U y_z = 0,$$

à laquelle on satisfait en prenant $y_z = m^z$, m étant l'une des racines de

$$m^n + P m^{n-1} + Q m^{n-2} \ldots + T m + U = 0 \text{ (n°. 974)},$$

et qui donne

$$y_z = C' m'^z + C'' m''^z + C''' m'''^z + \text{etc.}$$

Pour revenir de cette expression de y_z, à celle de y_x, il suffit de mettre, au lieu de z, sa valeur en x; or par l'équation $x = a^z$, on a $z = \frac{lx}{la}$, et en observant que $m'^z = e^{z\, lm'}$ (*Int.* n°. 32), il en résulte $m'^z = e^{\frac{lm'}{la} lx} = x^{\frac{lm'}{la}}$, d'où l'on conclut

$$y_x = C' x^{\frac{lm'}{la}} + C'' x^{\frac{lm''}{la}} + C''' x^{\frac{lm'''}{la}} + \text{etc.}$$

Telle est l'intégrale complète de l'équation

$$y_{a^n x} + P y_{a^{n-1} x} + Q y_{a^{n-2} x} \ldots + T y_{ax} + U y_x = 0,$$

donnée par M. Paoli, dans ses Opuscules. Il y est parvenu en faisant $y_x = \alpha x^\mu$, substitution d'où il résulte

$$y_{ax} = \alpha a^\mu x^\mu, \quad y_{a^2x} = \alpha a^{2\mu} x^\mu, \ldots y_{a^nx} = \alpha a^{n\mu} x^\mu,$$

et qui change par conséquent la proposée en

$$a^{n\mu} + P a^{(n-1)\mu} + Q a^{(n-2)\mu} \ldots + T a^\mu + U = 0;$$

le coefficient α demeure arbitraire, et si l'on pose $a^\mu = m$, on aura, pour déterminer m, la même équation que ci-dessus : quant à μ, il viendra $\mu = \frac{1m}{1a}$, ce qui rentre dans l'intégrale précédente. Il y auroit à faire sur cette équation des remarques analogues à celles du n°. 976 ; elles ont été développées par M. Paoli, mais nous ne saurions nous y arrêter, non plus que sur l'intégration de l'équation

$$y_{a^nx} + P y_{a^{n-1}x} + Q y_{a^{n-2}x} \ldots + T y_{ax} + U y_x = V_x,$$

qui se réduit d'ailleurs à déterminer C', C'', etc. dans la valeur de y_x, suivant la méthode du n°. 975.

990. C'est aux méthodes que nous venons d'exposer que se ramène en général la détermination, d'après des conditions données, des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles, et dont nous avons traité quelques cas particuliers dans les n°s. 796 et 797. Voici à peu près comme Monge a présenté cette recherche.

Soit $Z = M\varphi(U) + N\psi(V)$ l'intégrale d'une équation différentielle partielle, Z désignant une fonction des trois variables x, y, z et M, N, U, V, des fonctions de x, y seulement. Supposons que les fonctions arbitraires indiquées par les caractéristiques φ et ψ, doivent se déterminer par ces conditions :

1°. qu'en faisant $y = f(x)$ on ait $z = F(x)$,

2°. qu'en faisant $y = f_1(x)$ on ait $z = F_1(x)$;

si l'on représente par M', N', U', V', Z', ce que deviennent les fonctions M, N, U, V, Z, dans la première hypothèse, et par M'_1, N'_1, U'_1, V'_1, Z'_1, leurs valeurs dans la seconde, on aura ces deux équations

$$Z' = M'\varphi(U') + N'\psi(V')$$
$$Z'_1 = M'_1\varphi(U'_1) + N'_1\psi(V'_1);$$

faisant dans la première $V'=v$, on déduira de celle-ci une valeur de x en v, au moyen de laquelle on changera les fonctions M', N', U' et Z', en fonctions de v, et en les désignant dans ce nouvel état par M'', N'', U'', Z'', on aura

$$Z''=M''\varphi(U'')+N''\psi(v);$$

posant ensuite $V'_{,}=v$, on obtiendra de la même manière un résultat de la forme

$$Z''_{,}=M''_{,}\varphi(U''_{,})+N''_{,}\psi(v):$$

éliminant $\psi(v)$, entre cette équation et la précédente, il viendra l'équation

$$\frac{Z''_{,}}{N''_{,}}-\frac{Z''}{N''}=\frac{M''_{,}}{N''_{,}}\varphi(U''_{,})-\frac{M''}{N''}\varphi(U''),$$

que l'on convertira en une équation aux différences, en prenant $U''=u$, $U''_{,}=u_{,}$, $\varphi(U'')=t$ et $\varphi(U''_{,})=t_{,}$. On déduira de là une relation entre $u_{,}$ et u, ou l'expression de Δu en u, et on tirera aussi de l'équation $U''=u$ une valeur de v en u, pour la substituer dans M'', N'', Z'', $M''_{,}$, $N''_{,}$, $Z''_{,}$; on formera par ce moyen une équation aux différences entre la fonction t et la variable indépendante u. L'exemple suivant éclaircira ce procédé.

Soit l'équation $\quad z=\varphi(ax-y)+\psi(bx-y)$,
dans laquelle on se propose de déterminer les fonctions arbitraires φ et ψ par ces conditions :

1°. qu'en faisant $\quad y=Ax, \quad z=Bx^m$,
2°. $\quad y=Cx, \quad z=Dx^n$.

Par la substitution de ces valeurs l'équation proposée devient successivement

$$Bx^m=\varphi((a-A)x)+\psi((b-A)x)$$
$$Dx^n=\varphi((a-C)x)+\psi((b-C)x);$$

posant $(b-A)x=v$, dans la première de celles-ci, et $(b-C)x=v$, dans la seconde, on trouve

$$x=\frac{v}{b-A}, \qquad x=\frac{v}{b-C},$$

et

et on les change par ce moyen en

$$\frac{Bv^m}{(b-A)^m}=\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right)+\psi(v)$$

$$\frac{Dv^n}{(b-C)^n}=\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right)+\psi(v);$$

on en déduit ensuite

$$\frac{Dv^n}{(b-C)^n}-\frac{Bv^m}{(b-A)^m}=\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right)-\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right),$$

et faisant

$$\frac{a-A}{b-A}v=u, \quad \frac{a-C}{b-C}v=u_1;$$

on obtient premièrement l'équation

$$\frac{(b-C)u_1}{a-C}=\frac{(b-A)u}{a-A},$$

puis on transforme l'équation contenant la fonction φ, en cette autre

$$\frac{D(b-A)^n u^n}{(a-A)^n(b-C)^n}-\frac{Bu^m}{(a-A)^m}=t_1-t.$$

Cette dernière équation s'intégreroit facilement par le procédé du n°. 988, mais on en peut encore tirer plus simplement la valeur de t, en substituant Δt à t_1-t, d'où il résulte

$$t=\frac{D(b-A)^n}{(a-A)^n(b-C)^n}\Sigma u^n-\frac{B}{(a-A)^m}\Sigma u^m,$$

en observant que les intégrales Σu^n et Σu^m, doivent être prises conformément à la relation qu'établit entre la variable indépendante u et sa différence, l'équation

$$\frac{(b-C)u_1}{a-C}-\frac{(b-A)u}{a-A}=0,$$

qui revient à

$$\frac{b-C}{a-C}\Delta u=\left(\frac{b-A}{a-A}-\frac{b-C}{a-C}\right)u.$$

Monge remarque que si l'on a en général $\Delta u=Ku$, K désignant un rapport constant, il vient

$$\Delta.u^m=(u+Ku)^m-u^m=u^m\{(1+K)^m-1\};$$

et il en conclut par conséquent

$$u^m = \frac{\Delta . u^m}{(1+K)^m - 1}, \qquad \Sigma u^m = \frac{u^m}{(1+K)^m - 1}:$$

avec le secours de ces formules, on obtient

$$t = \frac{D(b-A)^n}{(a-A)^n(b-C)^n} \frac{u^n}{(1+K)^n - 1} - \frac{B}{(a-A)^m} \frac{u^m}{(1+K)^m - 1} + const.$$

en faisant pour abréger

$$\frac{(b-A)(a-C)-(a-A)(b-C)}{(a-A)(b-C)} = \frac{(C-A)(a-b)}{(a-A)(b-C)} = K.$$

Il résulte de là $1+K = \frac{(a-C)(b-A)}{(a-A)(b-C)}$, et

$$\varphi(u) = \frac{D(b-A)^n u^n}{(a-C)^n(b-A)^n - (a-A)^n(b-C)^n} - \frac{B(b-C)^m u^m}{(a-C)^m(b-A)^m - (a-A)^m(b-C)^m} + const.$$

en remettant $\varphi(u)$, au lieu de t; on a donc ainsi la composition de la fonction arbitraire φ.

Pour arriver à $\psi(u)$, on peut se servir indistinctement de l'une des équations

$$\frac{B u^m}{(b-A)^m} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A} u\right) + \psi(u)$$

$$\frac{D u^n}{(b-C)^n} = \varphi\left(\frac{a-C}{b-C} u\right) + \psi(u),$$

et on trouvera

$$\psi(u) = \frac{B(a-C)^m u^m}{(a-C)^m(b-A)^m - (a-A)^m(b-C)^m} - \frac{D(a-A)^n u^n}{(a-C)^n(b-A)^n - (a-A)^n(b-C)^n} - const.$$

on aura donc enfin

$$z = \frac{B(b-C)^m(ax-y)^m - B(a-C)^m(bx-y)^m}{(a-A)^m(b-C)^m - (b-A)^m(a-C)^m}$$
$$+ \frac{D(a-A)^n(bx-y)^n - D(b-A)^n(ax-y)^n}{(a-A)^n(b-C)^n - (b-A)^n(a-C)^n},$$

en écrivant au lieu de u dans la valeur de $\varphi(u)$, la quantité $ax-y$, et dans celle de $\psi(u)$, la quantité $bx-y$.

Il est bon de remarquer que la valeur précédente de z devient $\frac{0}{0}$ quand $b=a$, parce qu'alors l'équation

$$z = \varphi(ax-y) + \psi(bx-y),$$

qui répond à l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (a+b)\frac{d^2 z}{dxdy} + ab\frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

cesse d'en être l'intégrale complète, et qu'on a

$$z = \varphi(ax-y) + x\psi(ax-y);$$

les deux fonctions arbitraires renfermant dans ce cas la même quantité se déterminent suivant le procédé des nos. 334 et suivans.

On voit facilement par ce qui précède que la détermination des fonctions arbitraires dans toute équation de la forme

$$z = \varphi(U) + \psi(V)$$

dépendra d'une équation aux différences de la forme

$$\Delta t = W,$$

dans laquelle W est une quantité donnée en u, le rapport de cette variable à sa différence étant aussi donné.

991. Prenons pour second exemple l'équation

$$z^p = x^s\varphi(ax-y) + y^s\psi(bx-y),$$

et pour conditions, qu'en faisant,

1°. $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$

2°. $y = Cx$ $z = Dx^n$.

On tire de ces suppositions

$$B^p x^{pm} = x^s\varphi((a-A)x) + A^s x^s\psi((b-A)x)$$
$$D^p x^{pn} = x^s\varphi((a-C)x) + C^s x^s\psi((b-C)x),$$

d'où, en posant $(b-A)x = v$, $(b-C)x = v$, il suit

$$\frac{B^p v^{pm-s}}{(b-A)^{pm-s}} = \varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right) + A^s\psi(v)$$
$$\frac{D^p v^{pn-s}}{(b-C)^{pn-s}} = \varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right) + C^s\psi(v);$$

et l'élimination de $\psi(v)$, entre ces équations, conduit à

$$\frac{A^s D^p v^{pn-s}}{(b-C)^{pn-s}} - \frac{C^s B^p v^{pm-s}}{(b-A)^{pm-s}} = A^s\varphi\left(\frac{a-C}{b-C}v\right) - C^s\varphi\left(\frac{a-A}{b-A}v\right).$$

Faisons maintenant

$$\frac{a-A}{b-A}v = u, \quad \frac{a-C}{b-C}v = u_1;$$

nous aurons

$$\frac{A^2D^p(b-A)^{pn-2}u^{pn-2}}{(a-A)^{pn-2}(b-C)^{pn-2}}-\frac{C^2B^pu^{pm-2}}{(a-A)^{pm-2}}=A^2\varphi(u_1)-C^2\varphi(u);$$

ce qui revient à

$$\frac{D^p(b-A)^{pn-2}u^{pn-2}}{(a-A)^{pn-2}(b-C)^{pn-2}}-\frac{C^2B^pu^{pm-2}}{A^2(a-A)^{pm-2}}=\left(1-\frac{C^2}{A^2}\right)\varphi(u)+\Delta\varphi(u);$$

la relation entre u et u_1 sera d'ailleurs exprimée par

$$\frac{b-C}{a-C}u_1=\frac{b-A}{a-A}u,\text{ d'où }\Delta u=\frac{(a-b)(C-A)}{(a-A)(b-C)}u.$$

Si l'on prend $t=\varphi(u)$ et $t_1=\varphi(u_1)$, on aura évidemment, pour déterminer t, une équation aux différences, de la forme

$$t_1-Gt=Eu^{pn-2}-Fu^{pm-2},$$

dans laquelle G, E, F, désignent des coefficiens constans; et le rapport de la variable indépendante u à sa différence sera donné par une équation de la forme $\Delta u=Ku$, en sorte que si l'on regarde u comme une fonction indéterminée de la variable z dont la différence est égale à l'unité, on aura l'équation $u_{z+1}=(K+1)u_z$.

Il est très-facile d'appliquer le procédé du n°. 988 à l'intégration de l'équation $t_1-Gt=Eu^{pn-2}-Fu^{pm-2}$, que par ce procédé on transformera d'abord en

$$t_{z+1}-Gt_z=EC'(K+1)^{(pn-2)z}-FC'(K+1)^{(pm-2)z},$$

C' étant une constante arbitraire; mais au lieu de poursuivre ce calcul, nous allons faire connoître un artifice d'analyse fort élégant, employé par Monge.

Nous partirons avec lui des équations

$$Eu^{\alpha}+Fu^{\beta}=G\varphi(u)+\Delta\varphi(u),\qquad \Delta u=Ku,$$

en faisant pour abréger

$$1-\frac{C^2}{A^2}=G,\quad \frac{D^p(b-A)^{pn-2}}{(a-A)^{pn-2}(b-C)^{pn-2}}=F,\quad -\frac{C^2B^p}{A^2(a-A)^{pm-2}}=E$$
$$pn-2=\beta,\qquad pm-2=\alpha;$$

et en observant que l'équation $\Delta u=Ku$ conduit à

$$\Delta . u^n=((1+K)^n-1)u^n\ \text{(n°. précéd.)},$$

puis à $u^n = \frac{\Delta . u^n}{(1+K)^n - 1}$, nous reconnoîtrons la possibilité d'introduire des différences dans le premier membre de l'équation à intégrer, de manière à donner à ce membre une forme semblable à celle du second. Il suffira pour cela de partager les coefficiens E et F en deux parties e et e', f et f', ce qui donnera un résultat

$$eu^a + e'u^a + fu^c + f'u^c = G\varphi(u) + \Delta\varphi(u),$$

qu'on pourra transformer en

$$eu^a + \frac{e'}{(1+K)^a - 1}\Delta . u^a + fu^c + \frac{f'}{(1+K)^c - 1}\Delta . u^c = G\varphi(u) + \Delta\varphi(u);$$

et si l'on fait

$$e = \frac{e'G}{(1+K)^a - 1}, \quad f = \frac{f'G}{(1+K)^c - 1},$$

il viendra

$$\frac{e'}{(1+K)^a - 1}\{Gu^a + \Delta . u^a\} + \frac{f'}{(1+K)^c - 1}\{Gu^c + \Delta . u^c\}$$
$$= G\varphi(u) + \Delta\varphi(u):$$

on aura pour déterminer les coefficiens e, e', f, f', ces équations :

$$e + e' = E; \quad f + f' = F, \quad e = \frac{e'G}{(1+K)^a - 1}, \quad f = \frac{f'G}{(1+K)^c - 1},$$

desquelles on tirera

$$e = \frac{FG}{G + (1+K)^a - 1}, \qquad e' = \frac{E((1+K)^a - 1)}{G + (1+K)^a - 1}$$
$$f = \frac{FG}{G + (1+K)^c - 1}, \qquad f' = \frac{F((1+K)^c - 1)}{G + (1+K)^c - 1};$$

cela fait, on obtiendra

$$\frac{E}{G + (1+K)^a - 1}\{Gu^a + \Delta . u^a\} + \frac{F}{G + (1+K)^c - 1}\{Gu^c + \Delta . u^c\}$$
$$= G\varphi(u) + \Delta\varphi(u),$$

équation à laquelle il est aisé de voir qu'on satisfait, en prenant

$$\varphi(u) = \frac{Eu^a}{G + (1+K)^a - 1} + \frac{Fu^c}{G + (1+K)^c - 1} + const.$$

En substituant pour E, F, G et K, leurs valeurs, et laissant toujours α et β, on obtiendra

$$\varphi(u) = \left.\begin{array}{l} \dfrac{C^{\beta}B^{p}(b-C)^{\alpha}u^{\alpha}}{C^{\beta}(a-A)^{\alpha}(b-C)^{\alpha}-A^{\beta}(b-A)^{\alpha}(a-C)^{\alpha}} \\ -\dfrac{A^{\alpha}D^{p}(b-A)^{\gamma}u^{\gamma}}{C^{\alpha}(a-A)^{\gamma}(b-C)^{\gamma}-A^{\alpha}(a-C)^{\gamma}(b-A)^{\gamma}} \end{array}\right\} + const.$$

avec cette expression on trouvera, pour celle de l'autre fonction arbitraire,

$$\psi(u) = \left.\begin{array}{l} \dfrac{D^{p}(a-A)^{\gamma}u^{\gamma}}{C^{\alpha}(a-A)^{\gamma}(b-C)^{\gamma}-A^{\alpha}(b-A)^{\gamma}(a-C)^{\gamma}} \\ -\dfrac{B^{p}(a-C)^{\alpha}u^{\alpha}}{C^{\beta}(a-A)^{\alpha}(b-C)^{\alpha}-A^{\beta}(b-A)^{\alpha}(a-C)^{\alpha}} \end{array}\right\} + const.$$

et l'on aura enfin

$$z^{p} = \frac{C^{\beta}B^{p}(b-C)^{pm-\alpha}x^{\alpha}(ax-y)^{pm-\alpha}-B^{p}(a-C)^{pm-\alpha}y^{\beta}(bx-y)^{pm-\alpha}}{C^{\beta}(a-A)^{pm-\alpha}(b-C)^{pm-\alpha}-A^{\beta}(b-A)^{pm-\alpha}(a-C)^{pm-\alpha}}$$
$$+\frac{D^{p}(a-A)^{pn-\beta}y^{\beta}(bx-y)^{pn-\beta}-A^{\alpha}D^{p}(b-A)^{pn-\beta}x^{\alpha}(ax-y)^{pn-\beta}}{C^{\alpha}(a-A)^{pn-\beta}(b-C)^{pn-\beta}-A^{\alpha}(a-C)^{pn-\beta}(b-A)^{pn-\beta}}.$$

Cette équation, en satisfaisant aux deux conditions imposées, conserve bien évidemment la forme $z^{p}=x^{\alpha}\varphi(ax-y)+y^{\beta}\psi(bx-y)$, déterminée par l'équation différentielle partielle qui lui correspond; mais elle deviendroit illusoire si l'on avoit $a=b$, parce qu'elle cesseroit alors d'être une intégrale complète.

992. Monge parcourt successivement plusieurs formes d'équations; il s'occupe du cas où l'une des fonctions arbitraires entre dans la composition de l'autre, et prend pour exemple général l'équation $z=\varphi(U+\psi(V))$,

qui peut s'écrire ainsi,

$$\varphi_{\prime}(z)=U+\psi(V),$$

$\varphi_{\prime}$ désignant une fonction inverse de φ, et se traite alors d'une manière analogue à celle du n°. 990.

Il en est de même de l'équation

$$z=(\varphi(ax-y))(\psi(bx-y)),$$

qui, lorsqu'on passe aux logarithmes, devient

$$lz = l\varphi(ax-y) + l\psi(bx-y),$$

ou simplement

$$lz = \varphi(ax-y) + (bx-y),$$

en changeant de fonctions arbitraires.

993. Le calcul se complique beaucoup à mesure que le nombre des fonctions arbitraires augmente, et présente de nouvelles difficultés, ainsi qu'on en jugera par ce que nous allons dire, d'après Monge, sur l'équation

$$Z = M\varphi(T) + N\psi(U) + P\pi(V).$$

Soient les conditions suivantes:

1°. quand $y = f(x)$, $z = F(x)$,
2°. $y = f_1(x)$, $z = F_1(x)$,
3°. $y = f_2(x)$, $z = F_2(x)$;

supposons qu'en faisant dans l'équation proposée les substitutions qu'elles indiquent, on ait

$$Z' = M'\varphi(T') + N'\psi(U') + P'\pi(V')$$
$$Z'_1 = M'_1\varphi(T'_1) + N'_1\psi(U'_1) + P'_1\pi(V'_1)$$
$$Z'_2 = M'_2\varphi(T'_2) + N'_2\psi(U'_2) + P'_2\pi(V'_2);$$

on fera successivement $V' = v$, $V'_1 = v$, $V'_2 = v$, on tirera de chacune de ces dernières équations des valeurs de x, que l'on substituera successivement dans la première, la seconde et la troisième des précédentes, et désignant les résultats par

$$Z'' = M''\varphi(T'') + N''\psi(U'') + P''\pi(v),$$
$$Z''_1 = M''_1\varphi(T''_1) + N''_1\psi(U''_1) + P''_1\pi(v),$$
$$Z''_2 = M''_2\varphi(T''_2) + N''_2\psi(U''_2) + P''_2\pi(v),$$

on pourra éliminer la fonction $\pi(v)$: il viendra

$$P''Z''_1 - P''_1Z'' = P''M''_1\varphi(T''_1) - P''_1M''\varphi(T'') + P''N''_1\psi(U''_1) - P''_1N''\psi(U''),$$
$$P''Z''_2 - P''_2Z'' = P''M''_2\varphi(T''_2) - P''_2M''\varphi(T'') + P''N''_2\psi(U''_2) - P''_2N''\psi(U''),$$

équations que, pour abréger, nous représenterons par

$$A_1 = B_1\varphi(T''_1) - B\varphi(T'') + C_1\psi(U''_1) - C\psi(U''),$$
$$A'_2 = B'_2\varphi(T''_2) - B'\varphi(T'') + C'_2\psi(U''_2) - C'\psi(U'').$$

Soit maintenant

$$T'' = t, \quad T''_1 = t_1, \quad T''_2 = t'_1, \quad U'' = u, \quad U''_1 = u_1, \quad U''_2 = u'_1;$$

il faut bien observer qu'en général les quantités t'_1 et u'_1 ne doivent pas être regardées comme des valeurs de t et de u, consécutives à t_1 et à u_1, parce qu'elles ne résultent pas nécessairement de la loi de variation établie par le passage de u à u_1 et de t à t_1, en sorte que si l'on prend $t_1 - t = \Delta t$, $u_1 - u = \Delta u$, il faudra faire $t'_1 - t = \Delta' t$, $u'_1 - u = \Delta' u$, Δ' désignant une autre différentiation que Δ. L'élimination de v entre les équations qui déterminent t, t_1, t'_1, u, u_1, u'_1, donnera les diverses relations que les variables t et u ont entr'elles et avec leurs différences; posant ensuite

$$\varphi(T'') = r, \quad \psi(U'') = s,$$

on obtiendra deux nouvelles équations de la forme

$$\alpha = \beta_1 r_1 - \beta r + \gamma_1 s_1 - \gamma s$$
$$\alpha' = \beta'_1 r'_1 - \beta' r + \gamma'_1 s'_1 - \gamma' s,$$

qui revient à celle-ci

$$\alpha = (\beta_1 - \beta) r + \beta_1 \Delta r + (\gamma_1 - \gamma) s + \gamma_1 \Delta' s$$
$$\alpha' = (\beta'_1 - \beta') r + \beta'_1 \Delta' r + (\gamma'_1 - \gamma') s + \gamma'_1 \Delta' s.$$

Nous voici donc amenés à un nouveau genre d'équations, dans lesquelles les différences des variables sont relatives à diverses hypothèses, et par conséquent représentées par des caractéristiques différentes. Nous ne connoissons jusqu'à présent aucun travail étendu sur ces équations, qui paroissent devoir présenter encore plus de difficultés que les équations ordinaires aux différences.

Nous n'avons considéré que le cas où les fonctions arbitraires ne sont qu'au premier degré dans l'équation proposée; en variant les circonstances que cette dernière peut présenter, on tomberoit sur de nouvelles recherches de plus en plus épineuses; c'est ainsi que Condorcet a montré que quand les fonctions arbitraires entrent d'une manière transcendante dans l'équation proposée, leur détermination dépend d'une équation contenant à la fois des différences et des coefficiens différentiels. L'étendue qu'a déjà acquise l'ouvrage que nous présentons au public, l'importance des matières qui nous restent encore à traiter, ne nous permettent pas d'entrer dans l'examen de ces diverses questions, qui n'ont offert jusqu'ici que des résultats très-peu satisfaisans, parce qu'ils sont très-particuliers; nous croyons avoir rempli notre tâche en faisant seulement connoître leur

leur origine, leur but, et en les indiquant aux recherches des jeunes gens qui se proposent de cultiver l'Analyse pour en étendre le domaine et en applanir les difficultés.

994. Lorsqu'on a un nombre m d'équations entre $m+1$ variables et leurs différences, on peut appliquer à ces équations les divers procédés dont on a fait usage dans les mêmes circonstances à l'égard des équations différentielles (nos. 652 et suiv.). Pour donner d'abord un exemple de l'élimination, nous prendrons les équations

$$y_x+P_x y_{x-1}=Q_x z_x+R_x z_{x-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$y_x+P'_x y_{x-1}=Q'_x z_x+R'_x z_{x-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2);$$

en chassant premièrement z_{x-1}, comme une inconnue algébrique, il vient

$$(R'_x-R_x)y_x+(R'_xP_x-R_xP'_x)y_{x-1}=(R'_xQ_x-R_xQ'_x)z_x;$$

écrivant ensuite dans ce résultat $x-1$, au lieu de x, on obtient cette nouvelle équation

$$(R'_{x-1}-R_{x-1})y_{x-1}+(R'_{x-1}P_{x-1}-R_{x-1}P'_{x-1})y_{x-2}$$
$$=(R'_{x-1}Q'_{x-1}-R_{x-1}Q'_{x-1})z_{x-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

dont la combinaison avec les équations (1) et (2) servira à chasser en même temps z_x et z_{x-1}. Si l'on multiplie l'équation (1) par α, l'équation (2) par α', et qu'on ajoute les produits avec l'équation (3), on aura, après avoir égalé à zéro les quantités qui multiplient z_x et z_{x-1}, ou posé les équations

$$\alpha Q_x+\alpha' Q'_x=0$$
$$\alpha R_x+\alpha' R'_x+R'_{x-1}Q'_{x-1}-R_{x-1}Q'_{x-1}=0,$$

l'équation finale

$$(\alpha+\alpha')y_x+(\alpha P_x+\alpha' P'_x+R'_{x-1}-R_{x-1})y_{x-1}$$
$$+(R'_{x-1}P_{x-1}-R_{x-1}P'_{x-1})y_{x-2}=0,$$

qui sera encore du premier degré, mais qui montera au second ordre.

Il est facile de généraliser cette méthode, si l'on observe qu'elle se déduit de celle du n°. 78, en remplaçant les différentiations indiquées dans ce n°. par les substitutions successives de $x-1$, $x-2$, etc. au lieu de x.

995. Laplace s'est occupé en particulier d'un genre d'équations qu'il nomme *rentrantes* en elles-mêmes, et dont les plus simples

sont de la forme

$$\overset{1}{y}_x = A\overset{2}{y}_{x-1}$$
$$\overset{2}{y}_x = A\overset{3}{y}_{x-1}$$
$$\overset{3}{y}_x = A\overset{4}{y}_{x-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{y}_x = A\overset{1}{y}_{x-1}$$

$\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x, \ldots\ldots \overset{n}{y}_x$ désignant des fonctions de la variable x, telles que chacune étant exprimée par celle qui vient après, la dernière l'est nécessairement par la première. On rend évidente la composition de ces équations en imaginant que les fonctions $\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x, \ldots\ldots \overset{n}{y}_x$, soient disposées autour de la circonférence d'un cercle, de manière que la dernière $\overset{n}{y}_x$ se trouve contigue à la première $\overset{1}{y}_x$; d'après cet arrangement les équations rentrantes en elles-mêmes expriment les relations de chacune de ces fonctions avec un certain nombre de celles qui les précèdent. Si la loi doit être telle que chaque fonction soit, par exemple, égale au double de celle qui la suit, rapporté à l'indice $x-1$, plus au triple de celle qui suit cette dernière, rapporté à l'indice $x-2$, les équations rentrantes qui expriment cette condition seront

$$\overset{1}{y}_x = 2\overset{2}{y}_{x-1} + 3\overset{3}{y}_{x-2}$$
$$\overset{2}{y}_x = 2\overset{3}{y}_{x-1} + 3\overset{4}{y}_{x-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{n}{y}_x = 2\overset{1}{y}_{x-1} + 3\overset{2}{y}_{x-2}.$$

Il est évident que l'on auroit toujours les mêmes équations en commençant par celle que l'on voudroit des fonctions cherchées.

Pour intégrer les équations rentrantes, il faut commencer par en déduire une équation finale entre la variable indépendante x et l'une des fonctions cherchées; la forme des équations proposées donne

lieu à des simplifications dans le procédé, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de Laplace, cité dans la table et dont nous avons tiré ce qui précède.

996. La méthode du n°. 656, par laquelle nous avons intégré conjointement plusieurs équations différentielles, s'applique aussi aux équations contenant des différences; c'est ce que nous allons montrer sur deux équations du premier ordre, auxquelles nous donnerons la forme

$$M_x y_x + N_x z_x + P_x \Delta y_x + Q_x \Delta z_x = V_x$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = V'_x \text{ (n°. 970)},$$

pour les rendre plus analogues aux équations différentielles. Nous multiplierons la seconde par un facteur θ, et l'ajoutant à la première, il viendra

$$(M_x+\theta M'_x)y_x+(N_x+\theta N'_x)z_x+(P_x+\theta P'_x)\Delta y_x+(Q_x+\theta Q'_x)\Delta z_x=V_x+\theta V'_x;$$

si l'on met cette équation sous la forme

$$(M_x+\theta M'_x)\left\{y_x+\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x\right\}+(P_x+\theta P'_x)\left\{\Delta y+\frac{(Q_x+\theta Q'_x)}{P_x+\theta P'_x}\Delta z_x\right\}=V_x+\theta V'_x,$$

elle se changera évidemment en une équation à deux variables, toutes les fois qu'on aura

$$\Delta y_x+\frac{Q_x+\theta Q'_x}{P_x+\theta P'_x}\Delta z_x=\Delta.\left\{y_x+\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x\right\};$$

car en faisant alors $y_x+\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}z_x=y'_x$, il viendra l'équation

$$(M_x+\theta M'_x)y'_x+(P_x+\theta P'_x)\Delta y'_x=V_x+\theta V'_x;$$

qui rentre dans celle qu'on a traitée, n°. 972.

Les conditions à remplir dans cette circonstance sont exprimées par les équations

$$\frac{Q_x+\theta Q'_x}{P_x+\theta P'_x}=\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x},\qquad \Delta.\frac{N_x+\theta N'_x}{M_x+\theta M'_x}=0.$$

La première donne θ, et l'autre est purement une équation de condition, qui sera satisfaite, en faisant θ constant, lorsque les

coefficiens M, N, ... M', N', ... seront constans; dans ce cas, θ sera déterminé par l'équation du second degré

$$(Q+\theta Q')(M+\theta M')=(N+\theta N')(P+\theta P').$$

Lorsqu'on aura les deux valeurs de cette quantité, on en déduira deux valeurs de y'_x, qui conduiront à deux équations de la forme

$$y_x+\frac{N+\theta N'}{M+\theta M'}z_x=W_x$$
$$y_x+\frac{N+\theta N'}{M+\theta M'}z_x=W'_x,$$

à l'aide desquelles on déterminera séparément y_x et z_x.

Nous observerons que dans le cas qui nous occupe, on peut aussi, par une méthode analogue à celle du n°. 653, ramener les équations

$$M_x y_x+N_x z_x+P_x\Delta y_x+Q_x\Delta z_x=V_x$$
$$M'_x y_x+N'_x z_x+P'_x\Delta y_x+Q'_x\Delta z_x=V'_x$$

à celles-ci

$$M_x y_x+N_x z_x+P_x\Delta y_x+Q_x\Delta z_x=0$$
$$M'_x y_x+N'_x z_x+P'_x\Delta y_x+Q'_x\Delta z_x=0,$$

qui n'en diffèrent que par l'absence des termes V_x et V'_x. En effet, si y'_x et y''_x, z'_x et z''_x, sont des valeurs particulières qui satisfassent à ces équations, on aura, pour les valeurs complètes,

$$y_x=C'y'_x+C''y''_x,\qquad z_x=C'z'_x+C''z''_x;$$

si maintenant on prend les différences, en faisant varier les quantités C', C'', et que l'on substitue dans les premières équations proposées, elles deviendront

$$\left.\begin{array}{l} C'\{M_x y'_x+N_x z'_x+P_x\Delta y'_x+Q_x\Delta z'_x\} \\ +\ C''\{M_x y''_x+N_x z''_x+P_x\Delta y''_x+Q_x\Delta z''_x\} \\ +\Delta C'(P_x y'_{x+1}+Q_x z'_{x+1})+\Delta C''(P_x y''_{x+1}+Q_x z''_{x+1}) \end{array}\right\}=V_x$$

$$\left.\begin{array}{l} C'\{M'_x y'_x+N'_x z'_x+P'_x\Delta y'_x+Q'_x\Delta z'_x\} \\ +\ C''\{M'_x y''_x+N'_x z''_x+P'_x\Delta y''_x+Q'_x\Delta z''_x\} \\ +\Delta C'(P'_x y'_{x+1}+Q'_x z'_{x+1})+\Delta C''(P'_x y''_{x+1}+Q'_x z''_{x+1}) \end{array}\right\}=V'_x;$$

les deux premières lignes du premier membre de chacune de ces équations sont nulles en vertu de

$$M_x\,y_x + N_x\,z_x + P_x\,\Delta y_x + Q_x\,\Delta z_x = 0$$
$$M'_x y_x + N'_x z_x + P'_x \Delta y_x + Q'_x \Delta z_x = 0\,;$$

il ne reste donc que les équations

$$\Delta C'(P_x y'_{x+1} + Q_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P_x y''_{x+1} + Q_x z''_{x+1}) = V_x$$
$$\Delta C'(P'_x y'_{x+1} + Q'_x z'_{x+1}) + \Delta C''(P'_x y''_{x+1} + Q'_x z''_{x+1}) = V'_x,$$

qui serviront à déterminer $\Delta C'$ et $\Delta C''$.

Ces indications suffisent pour pousser aussi loin qu'elles peuvent aller les méthodes que nous venons de rappeler, en s'aidant d'ailleurs de leur application aux équations différentielles dans les n^{os}. cités.

997. Pour ne laisser inconnue aucune des méthodes que l'on peut employer avec succès à l'intégration des équations du premier degré aux différences; nous montrerons, d'après M. Paoli, l'usage que l'on peut faire à cet égard de la méthode du facteur.

Soit l'équation

$$y_{x+n} + P_x y_{x+n-1} + Q_x y_{x+n-2} \dots + U_x y_x = V_x\,;$$

en la multipliant par un facteur quelconque μ_x, et supposant que son intégrale première soit alors

$$\mu_x(\alpha_x y_{x+n-1} + P'_x y_{x+n-2} + Q'_x y_{x+n-3} \dots + T'_x y_x) = \Sigma V_x \mu_x,$$

on prendra la différence de cette dernière équation, qui sera

$$\begin{aligned} &\mu_{x+1}(\alpha_{x+1} y_{x+n} + P'_{x+1} y_{x+n-1} + Q'_{x+1} y_{x+n-2} \dots + T'_{x+1} y_{x+1}) \\ &-\mu_x\;(\alpha_x\;y_{x+n-1} + P'_x\;y_{x+n-2} + Q'_x\;y_{x+n-3} \dots + T'_x\;y_x\;) \\ &= V_x \mu_x\,; \end{aligned}$$

et on la comparera avec l'équation proposée multipliée par μ_x, ce qui donnera

$$\begin{aligned} &\alpha_{x+1}\mu_{x+1} = \mu_x \\ &\mu_{x+1} P'_{x+1} - \mu_x \alpha_x = \mu_x P_x \\ &\mu_{x+1} Q'_{x+1} - \mu_x P'_x = \mu_x Q_x \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mu_{x+1} T'_{x+1} - \mu_x S'_x = \mu_x T_x \\ &-\mu T'_x = \mu_x U_x. \end{aligned}$$

Si l'on prend ces équations dans un ordre inverse, on en tirera

$$T'_x = -U_x$$

$$S'_x = \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} T'_{x+1} - T_x$$

$$R'_x = \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} S'_{x+1} - S_x$$

....

$$P'_x = \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} Q'_{x+1} - Q_x$$

$$\alpha_{x+1} = \frac{\mu_x}{\mu_{x+1}},$$

d'où l'on conclura

$$T'_x = -U_x$$

$$S'_x = -\frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} U_{x+1} - T_x$$

$$R'_x = -\frac{\mu_{x+2}}{\mu_x} U_{x+2} - \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} T_{x+1} - S_x$$

....

$$P'_x = -\frac{\mu_{x+n-2}}{\mu_x} U_{x+n-2} - \frac{\mu_{x+n-3}}{\mu_x} T_{x+n-3} \ldots\ldots - Q_x$$

$$\alpha_x = -\frac{\mu_{x+n-1}}{\mu_x} U_{x+n-1} - \frac{\mu_{x+n-2}}{\mu_x} T_{x+n-2} \ldots\ldots - \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} Q_{x+1} - P_x;$$

déduisant de cette dernière la valeur de α_{x+1}, pour la mettre dans l'équation $\alpha_{x+1}\mu_{x+1} = \mu_x$, on aura

$$\mu_{x+n} U_{x+n} + \mu_{x+n-1} T_{x+n-1} \ldots\ldots\ldots + \mu_{x+2} Q_{x+2} + \mu_{x+1} P_{x+1} + \mu_x = 0.$$

Il est visible que cette équation répond à celle du n°. 979, car si l'on fait $\frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x}$, il s'ensuivra

$$\frac{\mu_{x+2}}{\mu_x} = \frac{\mu_{x+2}}{\mu_{x+1}} \cdot \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x p_{x+1}}, \quad \frac{\mu_{x+3}}{\mu_x} = \frac{\mu_{x+3}}{\mu_{x+2}} \cdot \frac{\mu_{x+2}}{\mu_{x+1}} \cdot \frac{\mu_{x+1}}{\mu_x} = \frac{1}{p_x p_{x+1} p_{x+2}}, \text{ etc;}$$

ce qui donnera $\frac{\mu_{x+n}}{\mu_x} = \frac{1}{[p_{x+n-1}]^{n}}$, et conduira par conséquent à

$$\frac{U_{x+n}}{[p_{x+n-1}]^{n}} + \frac{T_{x+n-1}}{[p_{x+n-2}]^{n-1}} \ldots\ldots + \frac{Q_{x+2}}{[p_{x+1}]^{2}} + \frac{P_{x+1}}{[p_x]^{1}} + 1 = 0,$$

ou à

$$[p_{x+n-1}]^{n}+P_{x+1}[p_{x+n-1}]^{n-1}+Q_{x+2}[p_{x+n-1}]^{n-2}\ldots\ldots+T_{x+n-1}[p_{x+n-1}]^{1}+U_{x+n}=0.$$

Nous ne nous arrêterons point ici sur les propriétés de cette équation, nous nous bornerons à observer que lorsqu'on aura trouvé n valeurs particulières qui y satisfassent, on pourra former un pareil nombre d'équations semblables à

$$\mu_x(\alpha_x y_{x+n-1}+P'_x y_{x+n-2}+Q'_x y_{x+n-3}\ldots\ldots+T'_x y_x)=\Sigma V_x \mu_x,$$

au moyen desquelles on obtiendra l'expression y_x, en éliminant les $n-1$ quantités y_{x+1}, $y_{x+2}\ldots\ldots y_{x+n-1}$.

Si on n'avoit que $n-m$ valeurs de μ_x, on ne pourroit chasser que $n-m-1$ de ces quantités, et on rameneroit par conséquent l'équation proposée à une autre contenant $y_x, y_{x+1}, \ldots\ldots y_{x+m}$, c'est-à-dire, de l'ordre m.

998. Les quantités arbitraires, introduites par l'intégration des équations aux différences à deux variables, ne sont pas nécessairement constantes comme celles qui complètent les intégrales des équations différentielles; mais pour donner aux résultats toute la généralité dont ils sont susceptibles, on doit regarder ces arbitraires comme variables. En effet, l'équation $\Delta y=0$, n'exprime pas absolument que la fonction y soit constante, mais seulement qu'elle ne change point de valeur lorsque la variable indépendante x devient $x+\Delta x$. Si, par exemple, Δx est constant et égal à h, on pourra prendre pour y toutes les fonctions de x, qui conservent la même valeur quand on y met $x+h$, au lieu de x. Or il est facile de voir que parmi les fonctions circulaires il s'en trouve un nombre infini qui jouissent de cette propriété: telles sont les fonctions

De la nature des arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différences, et de la construction de ces quantités.

de $\sin\frac{\pi x}{h}$, $\cos\frac{\pi x}{h}$, lorsque π désigne la circonférence, car la substitution de $x+h$, au lieu de x, dans ces quantités, donne

$$\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{h}\right)=\sin\frac{\pi x}{h}, \qquad \cos\left(\pi+\frac{\pi x}{h}\right)=\cos\pi,$$

on peut donc, dans cette hypothèse, prendre

$y=\varphi\left(\sin\frac{\pi x}{h}, \cos\frac{\pi x}{h}\right)$, pour l'intégrale de $\Delta y=0$, au lieu

de $y=C$, en considérant d'ailleurs la fonction φ comme entièrement arbitraire et susceptible par conséquent de toutes les formes possibles.

Il est évident que la fonction qui complète l'intégrale de l'équation $\Delta y=0$, prise dans l'hypothèse de $\Delta x=h$, compléteroit aussi toute autre équation aux différences du premier ordre prise dans la même hypothèse; il faut donc substituer dans l'intégrale de l'équation quelconque du premier ordre (n°. 972), au lieu de C, la quantité $\varphi(\sin\pi x, \cos\pi x)$, puisqu'on y suppose Δx, ou $h=1$.

999. C'est Euler, qui le premier, fit cette remarque importante, en cherchant le terme général des suites récurrentes (n°. 983), par l'intégration d'une équation différentielle d'un ordre indéfini; la marche qu'il a suivie dans cette occasion est trop élégante pour n'en pas donner une idée. Il se propose d'abord *de trouver le terme général de la série dans laquelle chaque terme est égal à celui qui le précède*, ce qui lui donne l'équation $y_{x+1}=y_x$, et en observant que

$$y_{x+1}=y_x+\frac{1}{1}\frac{dy_x}{dx}+\frac{1}{1.2}\frac{d^2y_x}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3}+\text{etc.}$$

il la change en cette autre

$$0=\frac{dy_x}{dx}+\frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y_x}{dx^3}+\text{etc.}$$

équation différentielle du premier degré, mais d'un ordre indéfini, et à laquelle on satisfait en prenant $y_x=e^{mx}$, pourvu que m soit déterminée par l'équation

$$\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\text{etc.}=0,$$

qui revient à $e^m-1=0$. Cette dernière donne d'abord $m=0$, et par conséquent $y=C$; mais ce résultat n'est pas l'intégrale complète qui doit nécessairement renfermer un nombre de constantes arbitraires égal à l'exposant de l'ordre de la proposée, et par conséquent infini; pour y parvenir il faut donner successivement à m toutes les valeurs qui peuvent satisfaire à l'équation $e^m-1=0$; or en passant aux logarithmes, on a

$$m=l1=0\pm i\pi\sqrt{-1}\ \text{(n°. 182)},$$

expression

expression dans laquelle i représente tous les nombres entiers possibles, y compris o. Si l'on réunit, comme dans le n°. 648, chaque couple de valeurs semblables, on en déduira, pour l'intégrale complète demandée deux termes de la forme

$$c\cos i\pi x + c_{,}\sin i\pi x,$$

c et $c_{,}$ désignant de nouvelles constantes arbitraires; il suit de là que l'expression de y_x sera de la forme

$$y_x = \begin{cases} c'\cos\pi x + c''\cos 2\pi x + c'''\cos 3\pi x \ldots\ldots\ldots \\ + c'_{,}\sin\pi x + c''_{,}\sin 2\pi x + c'''_{,}\sin 3\pi x \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ce qui revient évidemment à une fonction arbitraire, des quantités $\sin\pi x$, $\cos\pi x$ (Int. n°s. 42, 43). Euler traite successivement de la même manière les progressions par différences (ou *arithmétiques*), les progressions par quotiens (ou *géométriques*), les séries récurrentes, et parvient à des résultats analogues au précédent, mais nous ne saurions le suivre dans ces détails.

1000. Lorsque la différence de la variable indépendante x n'est pas constante, le procédé donné n°. 988, appliqué à l'équation $\Delta y_x = 0$, conduit à la composition de la quantité qui doit entrer dans la fonction arbitraire; car ayant changé cette équation en $\Delta y_z = 0$; son intégrale doit être $y_z = \psi(\sin\pi z,\ \cos\pi z)$, et il n'y a plus qu'à substituer au lieu de z sa valeur en x.

Ayant trouvé pour le cas où $\Delta x = x' - mx$, dans le n°. 988;

$$z = \frac{1}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\},$$

il en résulte que la constante C' doit être remplacée par

$$\psi\left\{\sin\frac{\pi}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\},\quad \cos\frac{\pi}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\}\right\},$$

et que par conséquent l'expression complète de y_x, ou de $\varphi(mx)$, qui satisfait à l'équation $\varphi(x') = \varphi(mx) + Q$, est

$$\varphi(mx) = \psi\left\{\sin\frac{\pi}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\},\quad \cos\frac{\pi}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\}\right\}$$
$$+ \frac{Q}{lq}\left\{ll\frac{mx}{\frac{q}{m^{q-1}}} - lb\right\}.$$

Dans l'équation $\varphi(x^z)=\varphi(2x)+2$, du même numéro, on a obtenu $2^z=x$, ce qui donne $z=\frac{lx}{l2}$; la fonction arbitraire doit donc être $\psi\left(\sin\frac{\pi lx}{l2},\ \cos\frac{\pi lx}{l2}\right)$, et l'on doit avoir par conséquent

$$\varphi(x)=\left\{\psi\left(\sin\frac{\pi lx}{l2},\ \cos\frac{\pi lx}{l2}\right)\right\}^z+\left\{\psi\left(\sin\frac{\pi lx}{l2},\ \cos\frac{\pi lx}{l2}\right)\right\}^{-z}.$$

Les mêmes considérations s'appliquent à un ordre quelconque; l'équation du n°. 989 nous servira d'exemple. En y supposant les coefficiens constans, elle se réduit à

$$y_{a^n x}+Py_{a^{n-1}x}+Qy_{a^{n-1}x}\dots\dots+Ty_{ax}+Uy_x=V_x$$

et se ramène à

$$y_{z+n}+Py_{z+n-1}+Qy_{z+n-2}\dots\dots+Ty_{z+1}+Uy_z=V_z,$$

la différence de la variable z étant égale à l'unité lorsqu'on prend $z=\frac{lx}{la}$: par ce moyen l'intégrale

$$y_z=C'm'^z+C''m''^z+C'''m'''^z+\dots\dots$$

qui, pour être complète, doit s'écrire ainsi

$$\left.\begin{array}{l} y_z=m'^z\varphi'(\sin\pi z,\ \cos\pi z)+m''^z\varphi''(\sin\pi z,\ \cos\pi z) \\ \qquad\qquad +m'''^z\varphi'''(\sin\pi z,\ \cos\pi z)+\dots\dots\dots \end{array}\right\},$$

φ', φ'', φ''', ... désignant des fonctions arbitraires indépendantes les unes des autres, devient

$$y_x=x^{\frac{lm'}{la}}\varphi'\left(\sin\frac{\pi lx}{la},\ \cos\frac{\pi lx}{la}\right)+x^{\frac{lm''}{la}}\varphi''\left(\sin\frac{\pi lx}{la},\ \cos\frac{\pi lx}{la}\right)$$
$$+x^{\frac{lm'''}{la}}\varphi'''\left(\sin\frac{\pi lx}{la},\ \cos\frac{\pi lx}{la}\right)\dots$$

en y substituant, au lieu de z, sa valeur en x.

1001. La détermination des fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations aux différences, ne peut s'opérer en assujettissant ces intégrales à satisfaire à un nombre limité de valeurs données, car il est visible que toute fonction arbitraire comprend implicitement un nombre infini de valeurs arbitraires. Soit pour exemple l'équation $y_x=X\varphi(\sin\pi x,\ \cos\pi x)$, de laquelle on doive tirer un certain nombre de valeurs $y_0=a$, $y_1=a'$, $y_2=a''$, etc. Si ces valeurs répondent à $x=0$, $x=1$, $x=2$, etc. on ne pourra

satisfaire en général qu'à la première des conditions imposées; car dès qu'on aura assigné pour $\varphi(\sin\pi x, \cos\pi x)$, une première valeur déterminée, de laquelle il résulte $y_0 = a$, cette valeur devant se retrouver la même pour les indices $x=1$, $x=2$, $x=3$, etc. il s'ensuit que les valeurs de y_x, relatives à ces indices, sont aussi déterminées. Il faut donc que les quantités données a', a'', etc. correspondent à des indices intermédiaires.

Si au lieu d'un nombre limité de valeurs isolées, qui ne peuvent déterminer qu'un pareil nombre de valeurs de la fonction arbitraire, indépendantes les unes des autres, on suppose que dans l'intervalle compris entre $x=0$ et $x=1$, l'expression de y_x doive fournir les mêmes valeurs qu'une équation donnée $y_x = \mathrm{f}(x)$, la question sera déterminée. En effet, s'il s'agissoit de trouver la valeur de y, qui correspond à un indice égal à un nombre entier quelconque m, plus une fraction, soit commensurable, soit incommensurable, que nous désignerons par n, on calculeroit la valeur de y_n, d'après l'équation $y_x = \mathrm{f}(x)$; comparant le résultat avec celui que donne alors l'équation $y_x = X\varphi(\sin\pi x, \cos\pi x)$, on auroit pour ce cas la valeur de $\varphi(\sin\pi n, \cos\pi n)$, qui doit être la même que celle de $\varphi(\sin\pi(m+n), \cos\pi(m+n))$, et l'équation $y_x = X\varphi(\sin\pi x, \cos\pi x)$, devenant par là

$$y_{m+n} = X_{m+n}\varphi(\sin\pi n, \cos\pi n),$$

seroit entièrement déterminée.

La seule condition à laquelle soit assujettie l'équation donnée $y_x = \mathrm{f}(x)$, c'est qu'on en tire pour y_0 et y_1 les mêmes valeurs que de l'équation $y_x = X\varphi(\sin\pi x, \cos\pi x)$.

1002. Les considérations géométriques jettent un grand jour sur la théorie analytique que nous venons d'exposer. Cherchons d'abord comment on peut représenter, par le cours d'une ligne, les circonstances de l'équation $\Delta y = 0$: soit AR, *fig.* 2, une droite indéfinie parallèle à l'axe des x, menée à une distance quelconque de cet axe, et divisée en parties AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc. égales à Δx; toutes les courbes telles que FIG. 2.

$ABA'B'A''B''A'''S$, $ACA'C'A''C''A'''T$, $ADA'D'A''D''A'''U$, etc. passant par les points A, A', A'', A''', et composées, entre ces points, de parties égales et semblables, satisferont à l'équation $\Delta y = 0$. Cela est d'abord évident pour les points A', A'', A''', etc. et l'on voit

ensuite que, prenant $AP=x$, $AP'=x+\Delta x$, les arcs AL et $A'L'$, AM et $A'M'$, AN et $A'N'$, etc. étant égaux et semblables, les ordonnées LP et $L'P'$, MP et $M'P'$, NP et $N'P'$, etc. seront aussi respectivement égales, et l'on aura par conséquent dans chaque courbe $\Delta y=0$.

Si l'on suppose, par exemple, que la courbe AS ait pour équation $y=\varphi\left(\sin\frac{\pi x}{\Delta x},\ \cos\frac{\pi x}{\Delta x}\right)$, elle remplira évidemment les conditions exigées au commencement de cet article et toutes les ordonnées PM, PN, etc. élevées sur la même abscisse, seront nécessairement des fonctions de PL, ou de $\sin\frac{\pi x}{\Delta x}$ et de $\cos\frac{\pi x}{\Delta x}$, résultat qui s'accorde avec celui que nous avons tiré des considérations analytiques.

La condition $\Delta y=0$, n'entraînant point la continuité dans les résultats, les courbes AS, AT, AU, etc. ne seront point assujetties à cette loi. Le polygone $EFE'F'E''\ldots V$, composé de parties semblables EFE', $E'F'E''$, etc. donne également $\Delta y=0$; il en seroit de même d'une suite d'arcs égaux et semblables d'une courbe quelconque assemblés d'une manière discontigue, comme le sont les arcs GH, $G'H'$, $G''H''$, etc.

1003. La construction des équations aux différences s'accorde parfaitement avec la détermination analytique des fonctions arbitraires. En effet, soit $\Delta y=F(x,y)$, une équation quelconque de ce genre et du premier ordre; ayant choisi arbitrairement, ou déterminé, suivant les conditions de la question, le premier point B, de la

FIG. 3. courbe cherchée, *fig.* 3, comme l'équation n'apprend rien sur tous les points correspondans à la portion d'abscisse $AA'=\Delta x$, et qu'elle donne seulement l'ordonnée $A'B'=y_1$, on pourra faire passer par les points B et B' une portion d'une courbe quelconque; cela fait, pour obtenir la portion correspondante à l'abscisse $A'A''$, on prendra en arrière d'un point quelconque P' de cette abscisse, une distance $PP'=AA'=\Delta x$, et élevant l'ordonnée PM, on menera MD' parallèle à AR; tirant ensuite de l'équation $\Delta y=F(x,y)$ la valeur de Δy pour l'abscisse AP', cette valeur donnera la droite $D'M'$, qui jointe à $P'D'=PM$, fera connoître le point M'. On trouvera de même tous les points de l'arc $B'B''$: cet arc employé à son tour comme l'arc BB', donnera ceux du troisième arc $B''B'''$, et ainsi de suite.

Il est évident que l'on pourroit, par le même procédé, continuer la courbe en arrière du point A, et que dans tous les cas elle satisfera à l'équation proposée, puisque les différences $\Delta y = D'M'$ auront des valeurs conclues de cette équation : nous laissons au lecteur à faire l'application de ce procédé aux équations du second ordre et des ordres supérieurs.

1004. Nous avons supposé plus haut que la différence de l'abscisse x étoit constante ; si le contraire avoit lieu, on n'en construiroit pas moins les équations aux différences. Dans ce cas, les équations proposées peuvent être mises sous la forme

$$\Delta x = f(x), \qquad \Delta y = F(x, y);$$

la première se construira d'après le n°. précédent, en regardant x comme fonction d'une nouvelle variable u dont la différence soit constante. Ayant obtenu par son moyen la grandeur de Δx, correspondante à une valeur quelconque de u, on se servira de ce résultat pour construire par la seconde équation, le Δy correspondant.

En regardant les trois variables u, x, y, comme les coordonnées des points de l'espace, les équations proposées représenteront une courbe à double courbure. La première donnera la projection sur le plan des u et x, et la seconde la projection sur le plan des x et y : si l'on éliminoit x, on parviendroit à l'équation de la projection sur le plan des u et y.

1005. La correspondance qu'on a dû remarquer entre les équations différentielles et les équations aux différences, a lieu par rapport à la liaison de ces dernières avec leurs intégrales, et repose sur des considérations analogues à celles que nous avons exposées dans le n°. 577, à l'égard des équations différentielles. Ces considérations ont été mises dans tout leur jour par Biot, Professeur de Mathématiques à l'Ecole centrale du Département de l'Oise, dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Institut, et duquel nous avons tiré ce qui suit.

De la multiplicité des intégrales dont les équations aux différences sont susceptibles.

Si l'on a une équation quelconque $F(a, x, y) = 0$, entre les deux variables x, y et la quantité a supposée constante, que l'on passe à l'équation consécutive $F(a, x_{,}, y_{,}) = 0$, et que l'on élimine a entre cette dernière et la précédente, le résultat sera une équation aux diffé-

rences, ayant pour intégrale complète $F(a, x, y) = 0$; mais l'équation aux différences, que nous désignerons par $Z = 0$, resteroit encore la même quand la quantité a seroit variable, pourvu que le changement de cette quantité n'influât pas sur l'équation $F(a, x_1, y_1) = 0$. Pour examiner cette circonstance, dans laquelle il faut regarder y comme une fonction de x et de a, nous écrirons l'équation primitive proposée ainsi : $F\{x, a, y_{x,a}\} = 0 \ldots (V)$.
et lorsqu'on fera varier x et a en même temps, on aura

$$F\{x_1, a_1, y^{x1}{}_{,a1}\} = 0.$$

Cela posé, il est visible que l'équation $Z = 0$ seroit encore satisfaite par l'équation $F\{x, a, y_{x,a}\} = 0$, dans l'hypothèse de a variable, si l'on avoit $y_{x1,a1} = y_{x1,a}$, ce qui arriveroit nécessairement si les équations

$$F\{x_1, a, y_{x1,a}\} = 0, \quad F\{x_1, a_1, y_{x1,a1}\} = 0,$$

pouvoient s'accorder lorsqu'on changera dans la seconde $y_{x1,a1}$ en $y_{x1,a}$: dans ce cas, les équations

$$F\{x_1, a, y_{x1,a}\} = 0, \quad F\{x_1, a_1, y_{x1,a}\} = 0 \ldots (W);$$

auront lieu en même temps; et en éliminant $y_{x1,a}$, elles conduiront à une équation entre x, x_1, a, a_1, qui exprimera la loi suivant laquelle doit varier a.

Ce résultat n'est pas entièrement semblable à celui que nous avons indiqué dans le n°. 577. Dans ce numéro, la relation entre a et x est exprimée par une équation primitive, en sorte que la valeur de a qu'on en tire n'est que particulière, et l'équation $F\{x, a, y_{x,a}\} = 0$, perdroit sa généralité par la substitution de cette valeur; dans le cas actuel au contraire, la relation entre x et a étant exprimée par une nouvelle équation aux différences, conduit à une valeur de a, complétée par une quantité arbitraire, à l'aide de laquelle l'équation $F\{x, a, y_{x,a}\} = 0$, conserve toute son étendue, et offre par conséquent encore une intégrale complète de l'équation aux différences $Z = 0$, au lieu d'une solution particulière qu'auroit eue dans les mêmes circonstances une équation différentielle.

1006. Pour approfondir davantage la liaison qui existe entre les diverses intégrales dont nous venons de montrer l'existence, il faut se rappeler que, considérée analytiquement, une équation aux différences donne le terme général d'une série, et que, sous le point de vue

géométrique elle est le lieu d'une suite de points correspondans à des abscisses déterminées suivant une certaine loi. Quand la constante a reçoit une valeur particulière, l'équation $F\{x, a, y_{x,a}\}=0\ldots(V)$ devient une *intégrale particulière* de $Z=0$, d'après le sens que nous avons attaché à cette expression dans le n°. 576; les équations $F\{x, a_1, y_{x,a_1}\}=0\ldots(V_1)$, $F\{x, a_2, y_{x,a_2}\}=0\ldots(V_2)$, etc. appartiennent donc à des lignes représentant les diverses intégrales particulières qui naissent des valeurs a_1, a_2, etc. attribuées à la constante a, et il est évident que l'équation $F\{x_1, a_1, y_{x_1,a_1}\}=0$, répond dans la première au point consécutif à celui que désignent les coordonnées x et y_{x,a_1}. En établissant donc l'identité de y_{x_1,a_1} et de $y_{x_1,a}$, et considérant les équations

$$F\{x_1, a, y_{x_1,a}\}=0, \quad F\{x_1, a_1, y_{x_1,a}\}=0\ldots(W),$$

comme ayant lieu simultanément, on exprime que les lignes données par les équations (V) et (V_1) se coupent au point dont l'abscisse est x_1 et l'ordonnée $y_{x_1,a}=y_{x_1,a_1}$, ou que la série dont le terme général est déterminé par la première équation, coïncide dans son deuxième terme, avec celle dont le terme général dépend de la seconde équation.

Maintenant si, dans les équations (W), la quantité a reçoit des valeurs successives conformément à la relation qu'elles assignent entre cette quantité et les autres variables, on aura ces nouvelles équations

$$F\{x_2, a_1, y_{x_2,a_1}\}=0, \quad F\{x_2, a_2, y_{x_2,a_1}\}=0\ldots(W_1),$$

d'où il résultera encore $y_{x_2,a_2}=y_{x_2,a_1}$, et qui par conséquent établiront l'intersection de la courbe désignée par (V_2) avec celle que représente (V_1), au point dont les coordonnées sont x_2, $y_{x_2,a_2}=y_{x_2,a_1}$. En continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra une suite de résulats compris dans les équations

$$F\{x_n, a_{(n-1)}, y_{x(n),a(n-1)}\}=0, \quad F\{x_n, a_n, y_{x(n),a(n-1)}\}=0\ldots(W_n),$$

qui supposent que $y_{x(n),a(n)}=y_{x(n),a(n-1)}$, et établissent par conséquent au point dont les coordonnées sont x_n, $y_{x(n),a(n)}=y_{x(n),a(n-1)}$, une intersection entre les courbes désignées par (V_{n-1}) et (V_n).

Les coordonnées des divers points d'intersection que nous venons de faire remarquer, étant comprises dans la suite

$$\begin{array}{llll} x, & x_1 & x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \\ y_{x,a}, & y_{x_1,a}=y_{x_1,a_1}, & y_{x_2,a_1}=y_{a_2,a_2}\ldots y_{x(n),a(n-1)}=y_{x(n),a(n)}, \end{array}$$

vérifient l'équation $Z=0$, car $y_{x1,a1}$ se trouve dans la seconde ligne consécutif à $y_{x,a}$ et antécédent à $y_{x1,a1}$, et ainsi des autres. Il suit de là que *le système des équations* (W) *exprime la loi suivant laquelle il faut faire varier* a, *pour que les diverses intégrales particulières résultantes de cette variation se coupent successivement dans des points qui vérifient l'équation aux différences* $Z=0$.

Si donc l'on détermine au moyen de ces équations, la valeur de a en x, et qu'on la substitue dans $F(x, a, y_{x,a})=0$, on aura l'équation commune à tous ces points, d'où dépend le terme général des valeurs de $y_{x,a}$, formées d'après la série précédente.

Il faut remarquer que cette série n'emporte pas nécessairement l'équation $y_{x1,a}=y_{x1,a1}$, et celles qui en dérivent, et que par conséquent elle vérifie bien l'équation aux différences premières $Z=0$, mais non pas la différence de celle-ci, ou l'équation aux différences secondes.

Si l'équation $F(x, a, y_{x,a})=0$, que pour abréger, nous représenterons par $V=0$, contient des radicaux, ou si, lorsqu'elle en est dégagée, la constante a y monte au-delà du premier degré, les équations (W) conduiront à une nouvelle intégrale que nous nommerons *intégrale indirecte*, mais elles n'en donneront pas d'autres que $V=0$, si a ne passe pas la première puissance. Eclaircissons ceci par quelques exemples.

1007. Soit l'équation $y_{x,a}=ax-a^2\ldots(V)$. Si l'on en prend la différence dans l'hypothèse de $\Delta x=x$, on aura $\Delta y=ax$, d'où on tirera $a=\frac{\Delta y}{x}$ et par conséquent

$$y=\frac{\Delta y}{x}-\frac{\Delta y^2}{x^2}\ldots.(Z),$$

les équations (W) deviendront alors

$$y_{x1,a}=ax_1-a^2, \quad y_{x1,a}=a_1x_1-a_1^2\ldots.(W),$$

et donneront par conséquent la suivante

$$ax_1-a^2=a_1x_1-a_1^2, \text{ ou } (a_1-a)x_1-(a_1^2-a_1)=0 \quad (U),$$

qui se décompose dans les deux facteurs

$$a_1-a=0, \quad x_1-(a_1+a)=0.$$

Le premier, d'où il résulte $a=$ *const.* nous ramène à l'équation primitive

primitive (V), et le second étant intégré par le procédé du n°. 988, après avoir mis $2x$ au lieu de $x_{,}$, conduit à

$$a=\frac{2x}{3}+b(-1)^{\frac{lx}{l2}};$$

substituant cette valeur de a dans l'équation (V), on la changera en

$$y_{x,\,b}=\frac{2x^2}{9}-\frac{bx}{3}(-1)^{\frac{lx}{l2}}-b^2(-1)^{\frac{2lx}{l2}}.$$

Pour construire cette nouvelle intégrale, il faut d'abord déterminer les arbitraires a et b, de manière qu'au premier point, que l'on suppose donné, on ait $y_{x,\,b}=y_{x,\,a}$. En désignant donc par α et β les coordonnées de ce point, on aura

$$\beta=a\alpha-a^2,\quad \beta=\frac{2\alpha^2}{9}-\frac{\alpha b}{3}(-1)^{\frac{l\alpha}{l2}}-b^2{}^{\frac{2l\alpha}{l2}},$$

d'où l'on tirera deux valeurs pour a et autant pour b, qui fourniront en tout quatre séries satisfaisant à l'équation (Z).

Il est visible que les deux valeurs de b seront de la forme

$$b'(-1)^{-\frac{l\alpha}{l2}},\quad b''(-1)^{-\frac{l\alpha}{l2}},$$

et que par conséquent l'on aura ces deux équations

$$y_{x,\,b'}=\frac{2x^2}{9}-\frac{b'x}{3}(-1)^{\frac{lx-l\alpha}{l2}}-b'^2(-1)^{\frac{2(lx-l\alpha)}{l2}}$$

$$y_{x,\,b''}=\frac{2x^2}{9}-\frac{b''x}{3}(-1)^{\frac{lx-l\alpha}{l2}}-b''^2(-1)^{\frac{2(lx-l\alpha)}{l2}}.$$

Soit maintenant AX, *fig.* 4, l'axe des abscisses sur lequel on ait pris $AP=\alpha$: les valeurs $AP_{,,}$, $AP_{,,}$, $AP_{,}$, et AP', AP'', AP''',... les unes antécédentes à AP et les autres suivantes, seront déterminées par l'intégrale de l'équation $x'=2x$, qui donne $x=2^n\alpha$; d'où l'on voit qu'à chacune de ces abscisses, la quantité $\frac{(lx-l\alpha)}{l2}$ est égale à un nombre entier, que $(-1)^{\frac{lx-l\alpha}{l2}}=+1$ ou -1, selon que n est un nombre pair ou impair, et qu'enfin $(-1)^{\frac{2(lx-l\alpha)}{l2}}=1$. Cela posé, FIG. 4.

on construira la parabole CQ donnée par l'équation $y' = \frac{2x^2}{9} - b'^2$, et la droite AR, représentant l'équation $y'' = +b'x$; on obtiendra les ordonnées de rang impair, savoir :

$$\ldots\ldots P_{\prime\prime\prime}M_{\prime\prime\prime}, \quad P_{\prime}M_{\prime}, \quad P'M', \quad P'''M''', \ldots$$

en ajoutant l'ordonnée de la ligne droite AR, à celle de la parabole, et les ordonnées de rang pair, savoir :

$$\ldots P_{\prime\prime}M_{\prime\prime}, \quad P''M'' \ldots$$

en retranchant l'ordonnée de la ligne droite. Cela fait, toutes les droites $M_{\prime\prime\prime}M_{\prime\prime}$, $M_{\prime\prime}M_{\prime}$, etc. qui joignent deux points consécutifs de la nouvelle intégrale, seront comprises dans l'équation $y = ax - x^2$, ce qui vérifie la conclusion du n°. précédent.

Une semblable construction appliquée à l'équation formée par la seconde valeur de b, donne une troisième intégrale dont les points successifs sont désignés par les lettres

$$\ldots m_{\prime\prime\prime}, \quad m_{\prime\prime}, \quad m_{\prime}, \quad m', \quad m'', \quad m''' \ldots$$

Ces points, ainsi que ceux de l'intégrale précédente, sont joints par des droites afin d'en rendre l'ensemble plus évident.

Il convient de remarquer que les deux intégrales indirectes se réduiroient à une seule, si l'on avoit $\beta = \frac{1}{4}\alpha^2$.

1008. La méthode précédente suppose que l'équation aux différences passe le premier degré et qu'elle ne puisse se décomposer en facteurs rationnels. Si l'on avoit, par exemple, $\Delta y^2 = c^2$, dans l'hypothèse de $\Delta x = 1$, cette équation donnant $\Delta y = +c$, $\Delta y = -c$, a deux intégrales distinctes

$$y_{x,a} = cx + a, \quad y_{x,a} = -cx + a'.$$

En faisant varier les constantes de ces équations on n'obtiendroit point de nouvelles intégrales, quoiqu'il soit évident que les intégrales particulières que fournit la première, puissent coïncider avec celles qui résultent de la seconde, de manière à satisfaire à l'équation aux différences comme le montrent les séries

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \text{etc.}$$
$$y_{x,a}, \quad y_{x1,a} = y_{x1,a1'}, \quad y_{x2,a1} = y_{x2,a2'}, \quad \text{etc.}$$

formées d'après celles du n°. 1006.

Il est facile d'appercevoir pourquoi ce cas diffère de celui que

nous avons considéré en premier lieu. Les deux intégrales de l'équation $\Delta y^2=c^2$, considérées séparément, ne fournissent que des droites parallèles qui ne sauroient se rencontrer; de plus ces intégrales n'étant point liées entr'elles par une irrationalité commune, et se trouvant exprimées par deux équations distinctes, on ne sauroit, par une même opération, faire varier à la fois, les arbitraires a et a' de manière que les droites données par l'une coupent celles qui résultent de l'autre; mais cette difficulté disparoît lorsqu'on a recours à l'équation aux différences.

En effet, les diverses intégrales complètes que peut avoir une équation aux différences, ne sauroient s'accorder indéfiniment dans les différences de tous les ordres, sans quoi elles seroient identiques; lorsqu'on fait $y_{x_1,a}=y_{x_1,a_1}$, il en résulte bien $y_{x_2,a}=y_{x_2,a_1}$, mais non pas $y_{x_3,a}=y_{x_3,a_1}$, ainsi qu'il le faudroit pour que les différences secondes fussent communes aux deux équations. Nous concluons de là que les diverses intégrales d'une même équation du premier ordre, doivent, en général, répondre à diverses équations du second ordre; et Monge a montré le premier que l'on obtenoit ces dernières en différentiant l'équation du premier ordre, parce que le résultat se décompose en plusieurs facteurs rationnels. C'est l'application du procédé exposé dans le n°. 673, qui l'a conduit à cette remarque.

Si l'on prend la différence de l'équation $\Delta y^2=c^2$, on aura l'équation

$$2\Delta y\Delta^2 y+\Delta^2 y^2=0,$$

qui se décompose dans les facteurs

$$\Delta^2 y=0, \quad 2\Delta y+\Delta^2 y=0,$$

le premier donne $\Delta y=A$, A étant une constante, et par une nouvelle intégration mène à $y=Ax+a$. La constante A n'est pas arbitraire, puisque l'équation $\Delta y=A$ doit nécessairement s'accorder avec la proposée $\Delta y^2=c^2$; on a donc $A=\pm c$ et $y=\pm cx+a$: telle est l'intégrale qui se présente la première. Le second facteur $2\Delta y+\Delta^2 y=0$ s'intègre facilement et conduit d'abord à $2y+\Delta y=b$, ce dernier résultat donne, par le n°. 972,

$$y=(-1)^x\Sigma\frac{b}{(-1)^{x+1}}=(-1)^x\{B-\frac{b}{2}(-1)^{-x-1}\}$$
$$=b+B(-1)^x$$

en réduisant et changeant l'arbitraire b en $2b$. Tirant ensuite de cette expression la valeur de Δy pour la comparer à l'équation $\Delta y^2 = c^2$, afin de déterminer l'une des arbitraires, on trouvera $\Delta y = -2B(-1)^x$, d'où on déduira $B = \pm\frac{c}{2}$; on aura donc pour l'équation proposée $\Delta y^2 = c^2$ les quatre intégrales suivantes,

$$y_{x,a} = cx + a \ldots\ldots (1), \quad y_{x,a} = -cx + a \ldots (2)$$

$$y = -\frac{c}{2}(-1)^x + b \qquad y = +\frac{c}{2}(-1)^x + b.$$

Voilà ce que Monge avoit trouvé, et Biot a fait voir ensuite que, si, au lieu de prendre simplement $B = \pm\frac{c}{2}$, on supposoit $B = \pm\frac{c}{2}(-1)^\alpha$, en désignant par α l'abscisse qui répond à l'origine, que l'on fît varier x de manière que $x-\alpha$ fût toujours un nombre entier, c'est-à-dire, que $(-1)^{2(x-\alpha)} = +1$, les deux intégrales indirectes devenant

$$y_{x,b} = \frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + b \ldots (3); \quad y_{x,b} = -\frac{c}{2}(-1)^{x-\alpha} + b \ldots (4)$$

donneroient pour les abscisses

$$\alpha, \quad \alpha+1, \quad \alpha+2, \quad \alpha+3, \text{ etc.}$$

des ordonnées communes aux droites qui résultent des intégrales directes, lorsqu'on détermine les arbitraires a et b par la condition que la valeur de $y_{x,a}$ de l'équation (1) soit égale à celle de $y_{x,b}$ de l'équation (4), quand $x = \alpha$, ou que dans la même hypothèse $y_{x,a}$, pris dans l'équation (2), soit égal à $y_{x,b}$, pris dans l'équation (3).

1009. Pour appliquer commodément le procédé de Monge à l'équation du n°. 1007,

$$y = \Delta y - \frac{\Delta y^2}{x^2},$$

dans laquelle $\Delta x = x$, Biot la change en

$$y = Px - P^2,$$

en faisant $P = \frac{\Delta y}{x}$; et prenant la différence, il obtient

$$\Delta y = P\Delta x + x\Delta P + \Delta P\Delta x - 2P\Delta P - \Delta P^2,$$

ce qui se réduit à

$$\Delta P(-2x+2P+\Delta P)=0,$$

en mettant pour Δy sa valeur Px, et en observant que $\Delta x=x$.

Le premier facteur $\Delta P=0$, étant intégré donne $P=\frac{\Delta y}{x}=a$ ou $\Delta y=ax$, valeur qui substituée dans l'équation proposée aux différences, conduit immédiatement à l'intégrale directe $y=ax-a^2$.

Le second facteur $2P+\Delta P=2x$, peut être écrit ainsi $P_1+P=2x$. En y appliquant le procédé du n°. 988, on a d'abord à intégrer l'équation $x_{z+1}=2x_z$, puisque $x_1=2x$, et on parvient à $x_z=2^z$; puis en opérant sur l'équation

$$P_{z+1}+P_z=2^{z+1},$$

on trouve

$$P_z=(-1)^z\Sigma\frac{2^{z+1}}{(-1)^{z+1}}=(-1)^z\Sigma(-2)^{z+1}=-(-1)^z\{C+\tfrac{2}{3}(-2)^{z+1}\};$$

mais de $P_z=\frac{\Delta y_z}{x_z}=\frac{\Delta y_z}{2^z}$, il résulte

$$\Delta y_z=-(-1)^z\{C.2^z-\tfrac{2}{3}(-4)^z\}=-C(-2)^z+\tfrac{2}{3}(4)^z,$$

d'où l'on déduit

$$y_z=-\Sigma\{C(-2)^z-\tfrac{2}{3}(4)^z\}=\tfrac{1}{3}C(-2)^z+\tfrac{2}{9}(4)^z+C':$$

remettant pour z sa valeur $\frac{lx}{l2}$ tirée de l'équation $x_z=2^z$, on aura

$$y_x=\frac{2}{9}x^2+\frac{Cx}{3}.(-1)^{\frac{lx}{l2}}+C'.$$

Cette équation contenant deux arbitraires, il s'en trouve une de surabondante qu'il faut déterminer, en substituant cette valeur de y_x dans l'équation aux différences, $y=\Delta y-\frac{\Delta y^2}{x^2}$, qui se réduit alors à $C'=-\frac{C^2}{9}(-1)^{\frac{2lx}{l2}}$, et l'on a par conséquent

$$y_x=\frac{2}{9}x^2+\frac{Cx}{3}(-1)^{\frac{lx}{l2}}-C^2(-1)^{\frac{2lx}{l2}},$$

résultat qui devient identique à celui du n°. 1007, en prenant $C = -b$.

1010. L'analogie des nouvelles intégrales que nous venons de trouver pour les équations aux différences, avec les solutions particulières des équations différentielles est frappante : les unes et les autres s'obtiennent, soit en faisant varier la constante arbitraire dans l'intégrale-complète, soit en différentiant de nouveau l'équation aux différences dans un cas et l'équation différentielle dans l'autre; mais malgré ces diverses conformités, les solutions particulières des équations différentielles ont, dans l'absence de la constante arbitraire, un caractère distinctif, auquel il faut bien faire attention pour éviter l'erreur dans laquelle Charles, Géomètre mort il y a quelques années, est tombé, et qui l'a conduit aux plus étranges paradoxes relativement au Calcul intégral. Il remarqua le premier, dans le tome X, *des Savans étrangers*, la pluralité d'intégrales dont pouvoit être susceptible une équation aux différences; mais il crut dans la suite (*Mém. de l'Acad.* année 1788) en pouvoir conclure les solutions particulières des équations différentielles correspondantes, en faisant seulement $\Delta x = 0$, pour répondre à la supposition de dx infiniment petit; « par ce moyen, dit-il, on obtiendra des so-» lutions particulières plus générales que celles qui sont connues » jusqu'à présent, et l'on en pourra déduire, comme un cas par-» ticulier, la solution particulière ordinaire, dans tout ceci on sup-» pose Δx constante ». Charles appuie cette assertion sur le raisonnement suivant l'équation aux différences : « l'équation aux diffé-» rences infiniment petites (c'est-à-dire, l'équation différentielle) » est la limite de l'équation aux différences finies correspondantes ; » donc la solution particulière de l'équation aux différences infi-» niment petites est ce que devient l'intégrale nouvelle de l'équation » aux différences finies, quand on fait dans cette intégrale $\Delta x = 0$ ».

Il est bien vrai qu'en faisant $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, dans une équation aux différences, on en tire l'équation différentielle qui en est la limite; parce que dans cette hypothèse on supprime tous les termes qui ne sont pas homogènes en Δx, Δy (n°. 65); mais on ne sauroit en conclure que les équations primitives correspondantes à

l'une et à l'autre de ces équations soient liées entr'elles de la même manière ; car si on tire les équations (W) du n°. 1006, $y_{x_1, a} = f(x_1, a)$ et $y_{x_1, a_1} = f(x_1, a_1)$, on aura $f(x_1, a_1) - f(x_1, a) = 0$, résultat qui prendra la forme $\Delta a f_{,}(x_1, a, \Delta a) = 0$ lorsqu'on le développera après y avoir changé a_1 en $a + \Delta a$; il donnera d'abord $\Delta a = 0$, ou $a = const.$ valeur qui ne conduit qu'à l'intégrale directe. Il reste à traiter l'équation $f_{,}(x + \Delta x, \ a, \ \Delta a) = 0$, laquelle demeure encore susceptible d'une véritable intégration, mais si on y fait Δx et Δa infiniment petits, elle se transforme en une équation primitive, et ne donne plus qu'une valeur particulière pour a. Lors donc que l'on veut passer de la nouvelle intégrale de l'équation aux différences à la solution particulière de l'équation différentielle, il faut faire disparoître la constante, sans néanmoins lui assigner aucune valeur particulière, ce qui ne se peut qu'en revenant aux différences et en effectuant ensuite sur le résultat le passage des différences aux différentielles.

En prenant une marche contraire, Charles obtenoit une équation primitive qui ne pouvoit pas satisfaire à l'équation différentielle, et pour parer à cet inconvénient, il introduisoit dans l'intégrale de l'équation aux différences un terme affecté des différences, qui devenoit une différentielle du premier ordre et détruisoit ainsi l'homogénéité qui fait la base du Calcul différentiel ; cette conséquence auroit suffi seule pour montrer l'erreur dans laquelle il étoit tombé ; mais il y en ajoutoit une autre qui n'étoit pas moins paradoxale. C'est que tous les polygones inscrits à une même courbe ne se confondent pas avec elle quand on suppose le nombre de leurs côtes infinies et qu'il y a un choix à faire entre ces polygones pour tomber sur celui dont la limite conduise à l'expression de l'inclinaison de la tangente.

De l'intégration des équations aux différences à trois et à un plus grand nombre de variables.

1011. Nous avons fait voir (n°. 894), que les fonctions de deux variables engendroient des séries formant des tables à double entrée ; un terme quelconque de ces séries peut être exprimé par ceux qui le précèdent, et de là naissent *les équations aux différences partielles.*

Soit $y_{x, t}$ une fonction quelconque des deux variables x et t ;

on en déduira par les variations de x et de t la table suivante à double entrée,

$y_{0,0}$,	$y_{1,0}$,	$y_{2,0}$,	$y_{3,0}$ ..... $y_{x,0}$,	$y_{x+1,0}$,	etc.
$y_{0,0}$,	$y_{1,1}$,	$y_{2,1}$,	$y_{3,1}$ ..... $y_{x,1}$,	$y_{x+1,1}$,	etc.
$y_{0,2}$,	$y_{1,2}$,	$y_{2,2}$,	$y_{3,2}$ ..... $y_{x,2}$,	$y_{x+1,2}$,	etc.
$y_{0,3}$,	$y_{1,3}$,	$y_{2,3}$,	$y_{3,3}$ ..... $y_{x,3}$,	$y_{x+1,3}$,	etc.
......	......	......	......	......	......
$y_{0,t}$,	$y_{1,t}$,	$y_{2,t}$,	$y_{3,t}$ ..... $y_{x,t}$,	$y_{x+1,t}$,	etc.
$y_{0,t+1}$,	$y_{1,t+1}$,	$y_{2,t+1}$,	$y_{3,t+1}$ ..... $y_{x,t+1}$,	$y_{x+1,t+1}$,	etc.
etc.	etc.	etc.	etc. ...... etc.	etc.	etc.

Supposons que la loi de cette série soit exprimée par l'équation du premier degré

$$\begin{aligned} A y_{x,t} + B y_{x+1,t} + C y_{x+2,t} \ldots\ldots\ldots + N y_{x+n,t} \\ + B' y_{x,t+1} + C' y_{x+1,t+1} \ldots\ldots + N' y_{x+n-1,t+1} \\ + C'' y_{x,t+2} \ldots\ldots\ldots + N'' y_{x+n-2,t+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + N^{(n)} y_{x,t+n}, \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficiens A, B, B', C, C', C'',... N, N'', etc. sont constans, elle sera formée sur le modèle de celles que nous avons nommées récurrentes (n°. 983), et nous l'en distinguerons en l'appelant, avec Lagrange, *séries récurrentes doubles*.

1012. Occupons-nous d'abord du cas où l'équation proposée n'ayant que quatre termes, est de la forme

$$A y_{x,t} + B y_{x+1,t} + B' y_{x,t+1} + C' y_{x+1,t+1} = 0;$$

faisons $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, α et β étant des constantes indéterminées, nous aurons

$$y_{x+1,t} = a\alpha^{x+1}\beta^t, \quad y_{x,t+1} = a\alpha^x\beta^{t+1}, \quad y_{x+1,t+1} = a\alpha^{x+1}\beta^{t+1};$$

en substituant les valeurs dans l'équation proposée, nous obtiendrons

$$A + B\alpha + B'\beta + C'\alpha\beta = 0.$$

Cette équation donne la valeur de l'une des deux indéterminées α et β, par le moyen de l'autre; on en tire $\beta = -\dfrac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}$, d'où l'on conclut $y_{x,t} = a\alpha^x\left(-\dfrac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t$,

expression

expression dans laquelle la quantité α demeure entièrement arbitraire, aussi bien que a, mais qui n'est pas la plus générale de celles qui satisfont à l'équation proposée.

Si l'on réduit en série descendante, ordonnée suivant les puissances de α, la quantité $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t$, en sorte qu'on ait

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t = T\alpha^{\mu t} + T'\alpha^{\mu t-1} + T''\alpha^{\mu t-2} + T'''\alpha^{\mu t-3} + \text{etc.}$$

les coefficiens T, T', T'', etc. contenant avec les lettres A, B, B', C', la variable t, l'expression de $y_{x,t}$ prendra alors la forme

$$y_{x,t} = Ta\alpha^{x+\mu t} + T'a\alpha^{x+\mu t-1} + T''a\alpha^{x+\mu t-2} + T'''a\alpha^{x+\mu t-3} + \text{etc.}$$

changeant successivement les constantes a et α, en b et β, en c et γ, etc. on auroit aussi

$$y_{x,t} = Tb\beta^{x+\mu t} + T'b\beta^{x+\mu t-1} + T''b\beta^{x+\mu t-2} + T'''b\beta^{x+\mu t-3} + \text{etc.}$$
$$y_{x,t} = Tc\gamma^{x+\mu t} + T'c\gamma^{x+\mu t-1} + T''c\gamma^{x+\mu t-2} + T'''c\gamma^{x+\mu t-3} + \text{etc.}$$
etc.

ces diverses valeurs satisfaisant en particulier à l'équation proposée, qui n'est que du premier degré, leur somme y satisfera pareillement, et l'on pourra prendre

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & T\,(a\alpha^{x+\mu t} + b\beta^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \text{etc.}) \\ & + T'\,(a\alpha^{x+\mu t-1} + b\beta^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \text{etc.}) \\ & + T''\,(a\alpha^{x+\mu t-2} + b\beta^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \text{etc.}) \\ & + T'''\,(a\alpha^{x+\mu t-3} + b\beta^{x+\mu t-3} + c\gamma^{x+\mu t-3} + \text{etc.}) \end{aligned}$$
etc.

Chacune des lignes de cette expression, qui contient un nombre indéfini de constantes arbitraires, peut être remplacée par une fonction arbitraire de l'exposant variable dont ses termes sont affectés, et l'on obtient alors

$$y_{x,t} = T\varphi(x+\mu t) + T'\varphi(x+\mu t-1) + T''\varphi(x+\mu t-2) + \text{etc.}$$

en désignant par φ cette fonction arbitraire.

Pour se convaincre de la possibilité de substituer une fonction arbitraire à la place des séries

$$a\alpha^{x+\mu t} + b\beta^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \text{etc.}$$
$$a\alpha^{x+\mu t-1} + b\beta^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \text{etc.}$$
$$a\alpha^{x+\mu t-2} + b\beta^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \text{etc.}$$
etc.

il suffit d'observer que l'expression de $y_{x,t}$ ne satisfait à l'équation proposée, indépendamment de toute valeur particulière des quantités α, β, γ, etc. que parce que les termes où ces quantités se trouvent affectées des mêmes exposans, après la substitution des valeurs de $y_{x,t}$, $y_{x,t+1}$, $y_{x+1,t}$, $y_{x+1,t+1}$, se détruisent mutuellement d'après la forme des coefficiens T, T', T'', etc. car il est visible que ces conditions seront également remplies par la fonction φ, puisque les termes affectés des mêmes exposans dans le premier cas se trouveront multipliés par une même fonction dans le second, et se détruiront de même indépendamment de la forme de cette fonction.

Quand on a $t=0$, l'expression de $y_{x,t}$ devient d'abord

$$y_{x,0}=T\varphi(x)+T'\varphi(x-1)+T''\varphi(x-2)+T'''\varphi(x-3)+\text{ etc.}$$

et se réduit à $y_{x,0}=\varphi(x)$, parce que dans ce cas

$$T=1,\ T'=0,\ T''=0,\ T'''=0,\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit que $\varphi(x)$ n'est autre que la valeur de $y_{x,t}$, lorsqu'on y fait $t=0$, que l'on doit avoir en général $\varphi(x+\mu t)=y_{x+\mu t,0}$, et que par conséquent

$$y_{x,t}=Ty_{x+\mu t,0}+T'y_{x+\mu t-1,0}+T''y_{x+\mu t-2,0}+\text{ etc.}$$

Les quantités $y_{x+\mu t,0}$, $y_{x+\mu t-1,0}$, $y_{x+\mu t-2,0}$, ne sont autre chose que les termes pris à partir de l'indice $x+\mu t$, et en revenant vers l'indice 0, dans la première ligne horizontale de la série à double entrée, correspondante à l'équation proposée. Il suit de là que la détermination de la fonction arbitraire suppose que l'on connoisse tous les termes qui forment cette première ligne, et qu'il faut même pouvoir la continuer en arrière, c'est-à-dire, l'étendre aux indices négatifs -1, -2, -3, etc. La valeur de $y_{x,t}$ se trouvera formée ainsi d'un nombre infini de termes; mais elle n'en contiendroit qu'un nombre fini, si tous ceux qui répondent aux indices négatifs devenoient nuls, comme cela arrive dans quelques séries, et l'on auroit seulement

$$y_{x,t}=Ty_{x+\mu t,0}+T'y_{x+\mu t-1,0}+T''y_{x+\mu t-2,0}\ldots\ldots+T^{(x+\mu t)}y_{0,0}.$$

La même expression se termineroit encore si l'on avoit $B'=0$, ou $C'=0$; car dans l'un et l'autre cas, le développement de la quantité $-\left(\dfrac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t$ n'aura qu'un nombre $t+1$ de termes, tant que t sera un nombre entier positif.

1013. Prenons pour exemple la série récurrente double

1,	1,	1,	1,	1,	1
0,	1,	2,	3,	4,	5
0,	0,	1,	3,	6,	10
0,	0,	0,	1,	4,	10
0,	0,	0,	0,	1,	5
0,	0,	0,	0,	0,	1
etc.					

dont chaque terme se forme en prenant la somme de celui qui le précède dans la ligne horizontale où il se trouve placé, et de celui qui précède ce dernier dans la colonne verticale : le terme 10, par exemple, placé à la troisième ligne dans la sixième colonne, est égal à 6 qui le précède plus à 4 qui se trouve au-dessus de 6. Cette propriété donne évidemment l'équation

$$y_{x+1,\,t+1}=y_{x,\,t+1}+y_{x,\,t}:$$

en la rapportant à l'équation dont nous nous sommes occupés dans le n°. précédent, nous aurons

$$C'=1, \quad B'=-1, \quad B=0, \quad A=-1;$$

la quantité $\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^t$ devenant $\frac{1}{(\alpha-1)^t}$, nous donnera la série

$$\alpha^{-t}+\frac{t}{1}\alpha^{-t-1}+\frac{t(t+2)}{1.2}\alpha^{-t-2}+\frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}\alpha^{-t-3}+\text{etc.}$$

et comparant cette série avec la série correspondante du n°. cité, il en résultera

$$\mu=-1, \quad T=1, \quad T'=\frac{t}{1}, \quad T''=\frac{t(t+1)}{1.2}, \text{ etc.}$$

à l'aide de ces valeurs, la formule générale de ce n°. se change en

$$y_{x,\,t}=y_{x-t,\,0}+\frac{t}{1}y_{x-t-1,\,0}+\frac{t(t+1)}{1.2}y_{x-t-2,\,0}+\text{etc.}$$

Faisons à présent $x=0$, pour avoir

$$y_{0,\,t}=y_{-t,\,0}+\frac{t}{1}y_{-t-1,\,0}+\frac{t(t+1)}{1.2}y_{-t-2,\,0}+\text{etc.}$$

et en observant que tous les termes de la première colonne verticale

de la série proposée sont nuls, à l'exception du premier, nous en conclurons que l'expression de $y_{o,t}$ doit être nulle pour toutes les valeurs entières et positives de t, condition de laquelle il résulte

$$y_{-1,o}=0, \quad y_{-2,o}=0, \ldots y_{-s,o}=0,$$

s désignant un nombre entier positif. La série qui exprime $y_{x,t}$ devient donc finie pour le cas qui nous occupe, et nous aurons seulement

$$y_{x,t}=y_{x-t,o}+\frac{t}{1}y_{x-t-1,o}+\frac{t(t+1)}{1.2}y_{x-t-2,o}\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{t(t+1)\ldots\ldots(x-1)}{1.2\ldots\ldots\ldots(x-t)}y_{o,t},$$

mais comme tous les termes de la première ligne de la série proposée sont égaux à l'unité, nous pourrons écrire

$$y_{x,t}=1+\frac{t}{1}+\frac{t(t+1)}{1.2}\ldots+\frac{t(t+1)\ldots(x-1)}{1.2\ldots(x-t)}$$

et, en sommant le second membre,

$$y_{x,t}=\frac{(t+1)(t+2)(t+3)\ldots x}{1.2.3\ldots(x-t)}.$$

Nous ferons remarquer que la série proposée renferme le *triangle arithmétique* de Pascal, dans lequel chaque colonne verticale donne les coefficiens numériques des termes de la puissance du binome ayant pour exposant le nombre qui marque le rang de la colonne, diminué de l'unité.

1014. Discutons en particulier les cas où l'on a $C'=0$, ou bien $B'=0$, et dans lesquels l'expression de $y_{x,t}$ s'arrête (n°. 1012).

1°. Lorsque $C'=0$, l'équation proposée qui devient

$$Ay_{x,t}+By_{x+1,t}+B'y_{x,t+1}=0$$

n'est plus que du premier ordre ; et si pour abréger, on fait $-\frac{B}{B'}=p$, $\frac{A}{B}=q$, on trouvera

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{B'}\right)^t=p^t\alpha^t\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)^t;$$

développant et comparant à la série générale, on obtiendra

$$\mu=2, \quad T=p^t, \quad T'=\frac{t}{1}p^tq, \quad T''=\frac{t(t-1)}{1.2}p^tq^2, \text{ etc.}$$

d'où on déduira

$$y_{x,t}=p^t\left(y_{x+t,0}+\frac{t}{1}qy_{x+t-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}q^2y_{x+t-2,0}+\text{etc.}\right).$$

Cette expression, évidemment finie lorsque t est un nombre entier positif, ne contient que des termes de la forme $y_{s,0}$, s désignant un nombre entier positif.

2°. Lorsque $B'=0$, l'équation proposée réduite à

$$Ay_{x,t}+By_{x+1,t}+C'y_{x+1,t+1}=0$$

est encore du second ordre; faisant $-\frac{B}{C'}=p$, $\frac{A}{B}=q$, nous aurons

$$\left(-\frac{A+B\alpha}{C'\alpha}\right)^t=p^t\left(1+\frac{q}{\alpha}\right)^t;$$

tirant de là les valeurs des lettres μ, T, T', T'', etc. nous arriverons à

$$y_{x,t}=p^t\left(y_{x,0}+\frac{t}{1}qy_{x-1,0}+\frac{t(t-1)}{1.2}q^2y_{x-2,0}+\text{etc.}\right),$$

expression qui demeure finie tant que t est un nombre entier positif, mais qui renferme un nombre limité de termes de la forme $y_{-s,0}$, lorsque $t>x$; il ne suffit donc pas dans ce cas, comme pour le précédent, de connoître tous les termes de la première ligne de la proposée, correspondans à des indices positifs, il faut encore pouvoir prolonger cette ligne en arrière pour obtenir ceux qui répondent aux indices négatifs; savoir, $y_{-1,0}$, $y_{-2,0}\ldots\ldots y_{-(t-x),0}$.

Si pourtant on ne connoissoit pas immédiatement ces derniers termes, on pourroit les déduire de ceux de la première colonne verticale ainsi qu'il suit: on prendroit $x=0$, et donnant successivement à t les valeurs 1, 2, 3, etc. on auroit

$$y_{0,1}=p(y_{0,0}+qy_{-1,0}),$$
$$y_{0,2}=p^2(y_{0,0}+2qy_{-1,0}+q^2y_{-2,0});$$
$$y_{0,3}=p^3(y_{0,0}+3qy_{-1,0}+3q^2y_{-2,0}+q^3y_{-3,0}),$$

....

etc,

$$y_{0,s}=p^s\left(y_{0,0}+\frac{s}{1}qy_{-1,0}+\frac{s(s-1)}{1.2}q^2y_{-2,0}+\text{etc.}\right),$$

d'où on tireroit

$$q\,y_{-1,0} = \frac{1}{p}\,y_{0,1} - \quad y_{0,0}$$
$$q^2 y_{-2,0} = \frac{1}{p^2}\,y_{0,2} - \frac{2}{p}\,y_{0,1} \; + y_{0,0}$$
$$q^3 y_{-3,0} = \frac{1}{p^3}\,y_{0,3} - \frac{3}{p^2}\,y_{0,2} + \frac{3}{p}\,y_{0,1} - y_{0,0}$$
....
$$q^s y_{-s,0} = \frac{1}{p^s}\,y_{0,s} - \frac{s}{1p^{s-1}}\,y_{0,s-1} + \frac{s(s-1)}{1.2p^{s-2}}\,y_{0,s-2} - \text{etc.}$$

L'analogie de ces expressions avec les formules des différences successives (n°. 860) est frappante ; et si on représente par

$$Y,\; Y_1,\; Y_2,\; Y_3,\; \ldots\; Y_x.$$

les termes de la série

$$y_{0,0},\; \frac{1}{q}y_{1,0},\; \frac{1}{q^2}y_{2,0},\; \frac{1}{q^3}y_{3,0}\ \text{etc.}\ \frac{1}{q^x}y_{x,0},$$

et par

$$Y,\; Y',\; Y'',\; Y''',\ \text{etc.}$$

ceux de la série

$$y_{0,0};\; \frac{1}{p}y_{0,1},\; \frac{1}{p^2}y_{0,2},\; \frac{1}{p^3}y_{0,3},\ \text{etc.}$$

on aura par ce qui précède

$$Y_{-1} = Y' - Y \qquad = \Delta Y$$
$$Y_{-2} = Y'' - 2Y' + Y \qquad = \Delta^2 Y$$
$$Y_{-3} = Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y \quad = \Delta^3 Y,$$
etc.

d'où l'on conclura

$$y_{x,t} = (pq)^t \{ Y_x + \frac{t}{1} Y_{x-1} + \frac{t(t-1)}{1.2} Y_{x-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} Y_{x-3} + \text{etc.} \},$$

en observant de remplacer dans la série du second membre, les termes affectés d'indices négatifs, par des différences dont l'exposant soit égal à cet indice, c'est-à-dire, de substituer $\Delta^t Y$ à Y_{-t}.

1015. La méthode du n°. 1012 peut s'appliquer aux équations de tous les ordres, comprises dans la formule générale du n°. 1011. En y faisant, comme pour celles du second ordre dont nous nous sommes occupés, $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, elle devient

$$\left.\begin{array}{r} A + B\alpha + C\alpha^2 \ldots\ldots + N\alpha^n \\ + B'\beta + C'\alpha\beta \ldots\ldots + N'\alpha^{n-1}\beta \\ + C''\beta^2 \ldots\ldots + N''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + N^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0 \ldots (1);$$

mais cette dernière ne pouvant donner en général la valeur de β en α que par une série infinie, ne fournira non plus, pour exprimer $y_{x,t}$, qu'une série infinie. Il s'offre, à la vérité, un assez grand nombre de cas particuliers, dans lesquels on peut exprimer d'une manière rationnelle et sans dénominateur complexe les quantités α et β par le moyen d'une nouvelle indéterminée ω : l'équation

$$\left.\begin{array}{r} A + B\alpha + C\alpha^2 \\ + B'\beta + C'\alpha\beta \\ + C''\beta^2 \end{array}\right\} = 0,$$

dérivée de l'équation complète du second ordre

$$\left.\begin{array}{r} Ay_{x,t} + By_{x+1,t} + Cy_{x+2,t} \\ + B'y_{x,t+1} + C'y_{x+1,t+1} \\ + C''y_{x,t+2} \end{array}\right\},$$

est dans un de ces cas ; mais au lieu de nous y arrêter, nous allons exposer la méthode qui convient à tous les cas en général.

Cette méthode est fondée sur ce que l'expression de y ne contient que β^t, et que t étant $> n$, il est toujours possible, au moyen de l'équation (1), d'exprimer β^t par α et par les puissances de β inférieures à β^n. En effet, puisque l'on aura $t = mn + p$, n désignant un nombre entier quelconque, et p un nombre entier moindre que n, on pourra donc écrire $\beta^t = (\beta^n)^m . \beta^p$; on prendra la valeur de β^n dans l'équation (1), pour l'élever à la puissance de m et la multiplier ensuite par β^p, puis, toujours avec le secours de l'équation (1), on éliminera successivement du résultat toutes les puissances de β, égales ou supérieures à β^n. On conçoit facilement

que le résultat de cette opération doit être de la forme

$$\begin{aligned}\beta^t = T \quad &+ T'\alpha \quad + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 \ldots\ldots + T^{(t)}\alpha^t \\ &+ T_1\beta + T'_1\alpha\beta + T''_1\alpha^2\beta \ldots\ldots + T_1^{(t-1)}\alpha^{t-1}\beta \\ &+ T_2\beta^2 + T'_2\alpha\beta^2 + \ldots\ldots + T_2^{(t-2)}\alpha^{t-2}\beta^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ T_{n-1}\beta^{n-1} \ldots\ldots\ldots + T_{n-1}^{(t-n+1)}\alpha^{t-n+1}\beta^{n-1},\end{aligned}$$

les coefficiens T, $T' \ldots . T_1$, T'_1, etc. étant des fonctions rationnelles de t, et des coefficiens A, B, etc. de l'équation (1).

On obtiendra d'abord une valeur particulière de $y_{x,t}$, en multipliant cette expression de β^t par $a\alpha^x$, et changeant les constantes arbitraires a et α, ainsi qu'on l'a fait dans le n°. 1012, on formera une suite de valeurs particulières de $y_{x,t}$, dont la somme satisfera encore à l'équation proposée, parce qu'elle est du premier degré; enfin, les considérations du n°. cité, étant applicables au cas actuel, permettront de changer en

$$T\mathrm{f}(x), \quad T'\mathrm{f}(x+1), \quad T''\mathrm{f}(x+2), \text{ etc.}$$

les termes de la première ligne,

$$T\alpha^x, \qquad T'\alpha^{x+1}, \qquad T''\alpha^{x+2}, \text{ etc.}$$

en $\quad T_1\mathrm{f}_1(x), \quad T'_1\mathrm{f}_1(x+1), \quad T''_1\mathrm{f}_1(x+2)$, etc.

les termes de la seconde ligne,

$$T_1\alpha^x\beta, \qquad T'_1\alpha^{x+1}\beta, \qquad T''_1\alpha^{x+2}\beta, \text{ etc.}$$

etc.

en désignant par $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{f}_1(x)$, $\mathrm{f}_2(x)$, etc. des fonctions arbitraires de x, indépendantes les unes des autres. Le nombre de ces fonctions sera évidemment égal à n, car la dernière ligne

$$T_{(n-1)}\alpha^x\beta^{n-1} \ldots . + T_{n-1}^{(t-n+1)}\alpha^{x+t-n+1}\beta^{n-1},$$

fournira les termes

$$T_{(n-1)}\mathrm{f}_{n-1}(x) \ldots . + T_{n-1}^{(t-n+1)}\mathrm{f}_{n-1}(x+t-n+1);$$

et

et l'on aura

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & Tf(x) + T'f(x+1) + T''f(x+2) + T'''f(x+3) \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + T^{(t)}f(x+t) \\ & + T_{1}f_{1}(x) + T'_{1}f_{1}(x+1) + T''_{1}f_{1}(x+2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots + T_{1}^{(t-1)}f_{1}(x+t-1) \\ & + T_{2}f_{2}(x) + T'_{2}f_{2}(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots + T_{2}^{(t-2)}f(x+t-2) \\ & + T_{(n-1)}f_{n-1}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + T_{(n-1)}^{(t-n-1)}f_{n-1}(x+t-n+1). \end{aligned}$$

La détermination de ces fonctions arbitraires s'opère au moyen des n premiers rangs horizontaux de la table du n°. 1011, c'est-à-dire, en supposant que l'on connoisse les valeurs de

$$y_{x,0}, \quad y_{x,1}, \quad y_{x,2} \ldots y_{x,n-1},$$

quelle que soit celle de x; car il est visible que l'expression de β^t devant se réduire successivement à 1, β, β^2, β^3, etc. il en résulte que dans ces hypothèses, lorsqu'on y fait $t=0$, $=1$, $=2$, etc.

$$\begin{array}{llll} T=1, & T'=0, & T''=0, & T'''=0, \text{ etc.} \\ T_{1}=1, & T'_{1}=0, & T''_{1}=0, & T'''_{1}=0, \text{ etc.} \\ T_{2}=1, & T'_{2}=0, & T''_{2}=0, & T'''_{2}=0, \text{ etc.} \\ \text{etc.} \end{array}$$

et que l'expression générale de $y_{x,t}$ donne par conséquent

$$y_{x,0}=f(x), \quad y_{x,1}=f_{1}(x), \quad y_{x,2}=f_{2}(x), \text{ etc.}$$

d'où l'on conclura

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & T y_{x,0} + T' y_{x+1,0} + T'' y_{x+2,0} + T''' y_{x+3,0} \ldots + T^{(t)} y_{x+t,0} \\ & + T_{1} y_{x,1} + T'_{1} y_{x+1,1} + T''_{1} y_{x+2,1} \ldots + T_{1}^{(t-1)} y_{x+t-1,1} \\ & + T_{2} y_{x,2} + T'_{2} y_{x+1,2} \ldots + T_{2}^{(t-2)} y_{x+t-2,2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + T_{n-1} y_{x,n-1} \ldots + T_{n-1}^{(t-n-1)} y_{x+t-n+1,n-1}. \end{aligned}$$

1016. On peut aussi parvenir à déterminer $y_{x,t}$ par la connoissance des m premiers rangs horizontaux et des $n-m$ premières colonnes verticales de la table du n°. 1011; c'est-à-dire, lorsque les valeurs de

$$y_{x,0}, \quad y_{x,1}, \quad y_{x,2} \ldots\ldots y_{x,m-1}$$

seront données aussi bien que celles de

$$y_{0,t}, \quad y_{1,t}; \quad y_{2,t} \ldots y_{n-m-1,t}.$$

En faisant toujours $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, ce qui conduit à l'équation (1), on peut tirer de cette dernière la valeur du produit $\alpha^{n-m}\beta^m$, au lieu de celle de β^n, pour la substituer dans l'expression $\alpha^x\beta^t$, décomposée en $(\alpha^{n-m}\beta^n)^r\alpha^q\beta^{r'}$, afin d'en éliminer tous les termes affectés du produit de $\alpha^{n-m}\beta^m$, ou des puissances de ce produit, et qu'il n'y reste plus par conséquent que des termes dans lesquels les exposans de α soient moindres que $n-m$, lorsque celui de β est égal à n, ou surpasse n, et des termes où l'exposant de α étant $n-m$, ou surpassant $n-m$, celui de β soit toujours moindre que n. Il est facile de voir quecette équation doit donner un résultat de la forme

$$\begin{aligned}
\alpha^x\beta^t = V \quad & + V'\alpha \quad + V''\alpha^2 \ldots\ldots\ldots + V^{(x+t)}\alpha^{x+t} \\
& + V_1\beta \quad + V'_1\alpha\beta' \quad + V''_1\alpha^2\beta \ldots\ldots\ldots + V_1^{(x+t-1)}\alpha^{x+t-1}\beta \\
& + V_2\beta^2 \quad + V'_2\alpha\beta^2 \quad + V''_2\alpha^2\beta^2 \ldots\ldots\ldots + V_2^{(x+t-2)}\alpha^{x+t-2}\beta^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_m\beta^m \quad + V'_m\alpha\beta^m \quad + V''_m\alpha^2\beta^m \ldots\ldots + V_m^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^m \\
& + V_{m+1}\beta^{m+1} + V'_{m+1}\alpha\beta^{m+1} + V''_{m+1}\alpha^2\beta^{m+1} \ldots + V_{m+1}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+1} \\
& + V_{m+2}\beta^{m+2} + V'_{m+2}\alpha\beta^{m+2} + V''_{m+2}\alpha^2\beta^{m+2} \ldots + V_{m+2}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_{x+t}\beta^{x+t} \quad + V'_{x+t}\alpha\beta^{x+t} + V''_{x+t}\alpha^2\beta^{x+t} \ldots\ldots + V_{x+t}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{x+t},
\end{aligned}$$

dans laquelle les lettres V, V', etc. V_1, V'_1, etc. désignent des fonctions rationnelles de t et des coefficiens de l'équation (1).

Il suit de la théorie des fonctions symétriques des racines des équations, que les différens termes de l'expression précédente sont absolument irréductibles, parce que le terme $\alpha^{n-m}\beta^m$ ne s'y trouvant plus, toutes les autres puissances et produits des lettres α et β renferment nécessairement des quantités irrationnelles distinctes et irréductibles entr'elles. Si donc on subtitue, dans l'équation proposée aux différences, la valeur de $y_{x,t}$, déduite de cette expression, il faudra que tous les termes affectés des mêmes puissances de α et de β

se détruisent séparément, ce qui arriveroit encore si l'on remplaçoit chaque produit de la forme $\alpha^r\beta^s$ par une fonction quelconque de r et de s. Au moyen de cette remarque, nous obtiendrons, pour la valeur complète de $y_{x,t}$, l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
y_{x,t} = {} & V\,\mathrm{f}(0,0) + V'\,\mathrm{f}(1,0) + V''\,\mathrm{f}(2,0) + V'''\,\mathrm{f}(3,0) \ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V^{(x+t)}\mathrm{f}(x+t,0) \\
& + V_1\mathrm{f}(0,1) + V'_1\mathrm{f}(1,1) + V''_1\mathrm{f}(2,1) + V'''_1\mathrm{f}(3,1) \ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_1^{(x+t-1)}\mathrm{f}(x+t-1,1); \\
& + V_2\mathrm{f}(0,2) + V'_2\mathrm{f}(1,2) + V''_2\mathrm{f}(2,2) + V'''_2\mathrm{f}(3,2) \ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots + V_2^{(x+t-2)}\mathrm{f}(x+t-2,2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + V_{(m)}\,\mathrm{f}(0,m) \quad + V'_m\ \mathrm{f}(1,m) \quad + V''_m\ \mathrm{f}(2,m) \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots + V_m^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m) \\
& + V_{m+1}\mathrm{f}(0,m+1) + V'_{m+1}\mathrm{f}(1,m+1) + V''_{m+1}\mathrm{f}(2,m+1) \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{m+1}^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m+1) \\
& + V_{m+2}\mathrm{f}(0,m+2) + V'_{m+2}\mathrm{f}(1,m+2) + V''_{m+2}\mathrm{f}(2,m+2) \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{m+2}^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,m+2) \\
& + V_{x+t}\mathrm{f}(0,x+t) + V'_{x+t}\mathrm{f}(1,x+t) + V''_{x+t}\mathrm{f}(2,x+t) \ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{x+t}^{(n-m-1)}\mathrm{f}(n-m-1,x+t).
\end{aligned}
$$

Il nous reste à déterminer la fonction f, ce que nous effectuerons en faisant successivement

$$t=0,\quad =1,\quad =2,\quad =3,\ \text{etc.}\ldots(m-1),$$

puis $\quad x=0,\quad =1,\quad =2,\quad =3,\ \text{etc.}\ldots(n-m-1),$

indices qui répondent aux valeurs données de $y_{x,t}$; nous connoîtrons pour chacune de ces hypothèses les coefficiens V, V', etc. en examinant ce que devient alors le produit $\alpha^x\beta^t$. Lorsque $t=0$, ce produit se réduisant à α^x, il ne doit rester dans son développement que le seul terme $V^{(x)}\alpha^x$; l'on doit donc avoir $V^{(x)}=1$, et tous les autres coefficiens deviennent nécessairement nuls dans cette hypothèse.

Kk 2

Quand $x=1$, il vient $V'_t \alpha\beta'$, ce qui donne $V'_t=1$, et les autres coefficiens nuls.

En général lorsque $x=n-m-1$, on a

$$V_t^{(n-m-1)} \alpha^{n-m-1}\beta', \quad V_t^{(n-m-1)}=1,$$

et tous les autres coefficiens nuls.

En établissant les mêmes hypothèses, et leurs conséquences, dans l'expression générale de $y_{x,t}$, on reconnoît que

$$y_{x,0}=f(x,0), \quad y_{x,1}=f(x,1), \ldots y_{x,m-1}=f(x,m-1),$$

quel que soit x, et ensuite que

$$y_{0,t}=f(0,t), \quad y_{1,t}=f(1,t), \ldots y_{n-m-1,t}=f(n-m-1,t),$$

quel que soit t.

On aura par ce moyen

$$\begin{aligned}
y_{x,t}= & V\, y_{0,0}+V'\, y_{1,0}+V''\, y_{2,0}+V'''\, y_{3,0} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots +V^{(x+t)} y_{x+t,0} \\
& +V_1 y_{0,1}+V'_1 y_{1,1}+V''_1 y_{2,1}+V'''_1 y_{3,1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots +V_1^{(x+t-1)}\, y_{x+t-1,1} \\
& +V_2 y_{0,2}+V'_2 y_{1,2}+V''_2 y_{2,2}+V'''_2 y_{3,2} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots +V_2^{(x+t-2)}\, y_{x+t-2,2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +V_m\, y_{0,m} +V'_m\, y_{1,m} +V''_m\, y_{2,m} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots +V_m^{(n-m-1)}\, y_{n-m-1,m} \\
& +V_{m+1} y_{0,m+1}+V'_{m+1} y_{1,m+1}+V''_{m+1} y_{2,m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots +V_{m+1}^{(n-m-1)}\, y_{n-m-1,m+1} \\
& +V_{m+2} y_{0,m+2}+V'_{m+2} y_{1,m+2}+V''_{m+2} y_{2,m+2} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots +V_{m+2}^{(n-m-1)}\, y_{n-m-1,m+2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +V_{x+t}\, y_{0,x+t} +V'_{x+t} y_{1,x+t} +V''_{x+t} y_{2,x+t} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots +V_{x+t}^{(n-m-1)}\, y_{n-m-1,x+t}.
\end{aligned}$$

1017. Le moyen que nous avons indiqué dans le n°. 1015, pour obtenir l'expression de β', peut suffire pour chaque cas particulier; mais cependant il ne sera pas inutile d'en exposer un autre d'après lequel on puisse construire des formules générales; pour cela prenons

$$\beta^t = A + A_1\beta + A_2\beta^2 \ldots + A_{n-1}\beta^{n-1} \quad (2),$$

A, $A_1, \ldots A_{n-1}$, désignant des polynomes en α, le premier du degré t, le second du degré $t-1$, ainsi de suite, jusqu'à A_{n-1}, dans lequel α ne doit monter qu'au premier degré. Représentons par β', β'', β''', etc. les diverses racines de l'équation (1), nous aurons ces équations

$$\beta'^t = A + A_1\beta' + A_2\beta'^2 + A_3\beta'^3 \ldots + A_{n-1}\beta'^{n-1}$$
$$\beta''^t = A + A_1\beta'' + A_2\beta''^2 + A_3\beta''^3 \ldots + A_{n-1}\beta''^{n-1}$$

etc.

dont le nombre sera suffisant pour déterminer les polynomes A, A_1, A_2, etc. il ne restera plus qu'à mettre pour β', β'', etc. leurs expressions en α; mais l'équation (2) devant être identique, indépendamment d'aucune valeur particulière de α, il suffira d'y substituer pour β une expression en série ascendante suivant les puissances de α; et par conséquent on n'aura qu'à chercher par de pareilles séries les valeurs des racines β', β'', etc. pour les substituer dans les valeurs de A, A_1, A_2, etc. en observant de les pousser jusqu'à la puissance t de α dans le premier polynome A, à la puissance $t-1$ dans A_1, et ainsi de suite, jusqu'à A_{n-1}, où l'on pourra s'arrêter à la première puissance de α.

Il n'est besoin de déterminer par cette méthode que le premier terme de chacun des polynomes A, A_1, A_2, etc. parce qu'on peut trouver la relation que les autres ont entr'eux à l'aide de la différentiation relative à α, comme dans le n°. 98. L'équation (2) donne successivement

$$t\,l\beta = l\{A + A_1\beta + A_2\beta^2 \ldots + A_{n-1}\beta^{n-1}\}$$

$$\frac{t\,d\beta}{\beta} = \frac{dA + \beta dA_1 + \beta^2 dA_2 + \text{etc.} + (A_1 + 2A_2\beta + 3A_3\beta^2 + \text{etc.})\,d\beta}{A + A_1\beta + A_2\beta^2 + \text{etc.}};$$

on éliminera de cette dernière $d\beta$, à l'aide de la différentielle immédiate de l'équation (1); on fera disparoître les dénominateurs du résultat que l'on ordonnera par rapport aux puissances de β et de α, et dont on chassera, au moyen de l'équation (1), les puissances de β, dont l'exposant est égal à n, ou surpasse ce nombre: égalant ensuite à zéro les coefficiens de chaque puissance de β, on aura $n-1$, équations différentielles du premier ordre entre α et les polynomes A, A_1, A_2, etc. Ces polynomes étant mis sous la forme

$$A = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 \ldots\ldots + T^{(t)}\alpha^t$$
$$A_1 = T_1 + T'_1\alpha + T''_1\alpha^2 \ldots\ldots + T_1^{(t-1)}\alpha^{t-1}$$
$$A_2 = T_2 + T'_2\alpha \ldots\ldots + T_2^{(t-2)}\alpha^{t-2}$$

etc.

on en prendra les différentielles par rapport à α, et substituant dans les équations différentielles dont on vient de parler, la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de α, fera connoître les relations qu'ont entr'eux les coefficiens T, T', T'', ... T_1, T'_1, etc.

Il ne sera pas difficile de trouver, d'après ces indications, des méthodes applicables à la détermination des coefficiens V, V', V'', ... V_1, V'_1, etc. du n°. 1016. Si l'on prend la différentielle du logarithme de chaque membre de l'équation $\alpha^x\beta^t = V +$ etc. de ce n°., que l'on chasse $d\beta$ du résultat, au moyen de l'équation (1) différentiée, enfin qu'on élimine le produit $\alpha^{n-m}\beta^m$ et ses multiples, on obtiendra une dernière équation, dont chaque terme, égalé séparément à zéro, fera connoître les relations des coefficiens V, V', V'', ... V_1, V'_1, etc.

1018. Nous allons parcourir les diverses remarques que Lagrange a faites sur les méthodes que nous venons d'exposer et dont il a enrichi l'analyse. Il est d'abord évident que l'on peut obtenir pour $y_{x,t}$ autant d'expressions différentes qu'il y a de termes, dans la dernière colonne de l'équation proposée aux différences, en éliminant successivement du développement de $\alpha^x\beta^t$, chacun des produits en α et β, qui affectent la dernière colonne de l'équation (1).

Lorsque l'équation (1) peut se décomposer en facteurs rationnels,

on considère séparément ces divers facteurs, pour arriver à l'expression de $y_{x,t}$ qu'ils donnent chacun en particulier, expressions qui sont autant de valeurs particulières de $y_{x,t}$, et dont la somme fournit la valeur complète cherchée.

Pour éclaircir ce fait analytique, supposons que l'équation (1) soit le produit de deux facteurs rationnels, l'un du degré p, l'autre du degré q; nous allons montrer qu'en désignant par

$$\left.\begin{array}{l} A_1+B_1\alpha+C_1\alpha^2\ldots\ldots \\ \quad +B'_1\beta+C'_1\alpha\beta\ldots\ldots \\ \qquad +C''_1\beta^2\ldots\ldots \end{array}\right\}=0, \quad \left.\begin{array}{l} A_2+B_2\alpha+C_2\alpha^2\ldots\ldots \\ \quad +B'_2\beta+C'_2\alpha\beta\ldots\ldots \\ \qquad +C''_2\beta^2\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

ces facteurs, l'équation proposée aux différences sera satisfaite séparément par les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} A_1y_{x,t}+B_1\,y_{x+1,t}+C_1\,y_{x+2,t}\ldots\ldots+K_1y_{x+p,t} \\ \quad +B'_1y_{x,t+1}+C'y_{x+1,t+1}\ldots\ldots+K'_1y_{x+p-1,t+1} \\ \qquad +C''_1y_{x,t+2}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{etc.} \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2y_{x,t}+B_2\,y_{x+1,t}+C_2y_{x+2,t}\ldots\ldots+G_2\,y_{x+q,t} \\ \quad +B'_2y_{x,t+1}+C'_2y_{x+1,t+1}\ldots\ldots+G'_2y_{x+q-1,t+1} \\ \qquad +C''_2y_{x,t+2}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=0,$$

l'une de l'ordre p et l'autre de l'ordre q; et que par conséquent si l'on représente par $y'_{x,t}$, la valeur complète tirée de la première, et par $y''_{x,t}$ celle que donne la seconde, on aura $y_{x,t}=y'_{x,t}+y''_{x,t}$. Cette dernière expression sera complète, car elle renfermera $p+q$ fonctions arbitraires : savoir, p provenant de la valeur de $y'_{x,t}$, et q de la valeur de $y''_{x,t}$.

Pour parvenir à la proposition précédente, nous allons chercher quelle doit être l'équation de l'ordre p qui satisfait à l'équation proposée. En représentant la première par

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}y_{x,t}+\mathrm{b}\,y_{x+1,t}+\mathrm{c}\,y_{x+2,t}\ldots\ldots+\mathrm{k}\,y_{x+p,t} \\ \quad +\mathrm{b}'y_{x,t+1}+\mathrm{c}'y_{x+1,t+1}\ldots\ldots+\mathrm{k}'y_{x+p-1,t+1} \\ \qquad +\mathrm{c}''y_{x,t+2}\ldots\ldots+\mathrm{k}''y_{x+p-2,t+2} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +\mathrm{k}^{(p)}y_{x,t+p} \end{array}\right\}=0,$$

et faisant successivement varier x et t, pour obtenir les consécutives, nous en déduirons

$$1^\circ \ldots \left.\begin{array}{lll} \mathrm{a}y_{x+1,t} + \mathrm{b}y_{x+2,t} & + \mathrm{c}y_{x+3,t} & + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'y_{x+1,t+1} & + \mathrm{c}'y_{x+2,t+1} & \\ & + \mathrm{c}''y_{x+1,t+2} & \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{a}y_{x,t+1} + \mathrm{b}y_{x+1,t+1} & + \mathrm{c}y_{x+2,t+1} & + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'y_{x,t+2} & + \mathrm{c}'y_{x+1,t+2} & \\ & + \mathrm{c}''y_{x,t+3} & \end{array}\right\} = 0$$

$$2^\circ \ldots \left.\begin{array}{ll} \mathrm{a}y_{x+2,t} + \mathrm{b}y_{x+3,t} & + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'y_{x+2,t+1} & \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{a}y_{x+1,t+1} + \mathrm{b}y_{x+2,t+1} & + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'y_{x+1,t+2} & \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{a}y_{x,t+2} + \mathrm{b}y_{x+1,t+2} & + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'y_{x,t+3} & \end{array}\right\} = 0$$

etc.

maintenant si nous multiplions respectivement chacune de ces équations par les coefficiens indéterminés P, Q, Q', R, R', R'', etc. que nous ajoutions les résultats, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}Py_{x,t} + (\mathrm{b}P + \mathrm{a}Q)y_{x+1,t} + (\mathrm{c}P + \mathrm{b}Q + \mathrm{a}R)y_{x+2,t} + \text{etc.} \\ \quad + (\mathrm{b}'P + \mathrm{a}Q')y_{x,t+1} + (\mathrm{c}'P + \mathrm{b}'Q + \mathrm{b}Q' + \mathrm{a}R')y_{x+1,t+1} \\ \quad + (\mathrm{c}''P + \mathrm{b}'Q' + \mathrm{a}R'')y_{x,t+2} \end{array}\right\} = 0,$$

comparant ce résultat avec la proposée, nous aurons

$$\mathrm{a}P = A, \quad \begin{array}{l} \mathrm{b}P + \mathrm{a}Q = B, \\ \mathrm{b}'P + \mathrm{a}Q' = B', \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathrm{c}P + \mathrm{b}Q + \mathrm{a}R = C, \text{ etc.} \\ \mathrm{c}'P + \mathrm{b}'Q + \mathrm{b}Q' + \mathrm{a}R' = C' \\ \mathrm{c}''P + \mathrm{b}'Q' + \mathrm{a}R'' = C'', \end{array}$$

équations qui sont précisément celles que l'on obtiendroit en multipliant l'un par l'autre les facteurs

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a} + \mathrm{b}\alpha + \mathrm{c}\alpha^2 + \text{etc.} \\ \quad + \mathrm{b}'\beta + \mathrm{c}'\alpha\beta \\ \quad\quad + \mathrm{c}''\beta^2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} P + Q\alpha + R\alpha^2 + \text{etc.} \\ \quad + Q'\beta + R'\alpha\beta \\ \quad\quad + R''\beta^2 \end{array}$$

et en comparant le produit avec l'équation (1).

Il est facile de poursuivre le calcul que nous venons d'indiquer et même de le débarrasser de toute induction, et de voir en même tems qu'on en peut faire un semblable sur les équations aux différences contenant deux variables et aussi sur les équations différentielles. Il en résulte bien évidemment que l'équation aux différences, correspondante à chacun des facteurs de l'équation (1), satisfait à la proposée.

Lors donc qu'on aura décomposé l'équation (1) en deux facteurs, l'un du degré p, l'autre du degré q, et qu'on sera parvenu aux expressions complètes de $y'_{x,t}$ et de $y''_{x,t}$, on en déterminera les fonctions arbitraires en supposant données les valeurs

$$y'_{x,0},\ y'_{x,1},\ \text{etc.}\qquad y'_{0,t},\ y'_{1,t},\ \text{etc.}$$
$$y''_{x,0},\ y''_{x,1},\ \text{etc.}\qquad y'_{0,t},\ y''_{1,t},\ \text{etc.}$$

Pour passer ensuite de ces valeurs à celles de

$$y_{x,0}\ y_{x,1},\ \text{etc.}\ldots y_{0,t},\ y_{1,t},\ \text{etc.}$$

il ne s'agira plus que de combiner les équations aux différences en $y'_{x,t}, y''_{x,t}$, avec l'équation $y_{x,t}=y'_{x,t}+y''_{x,t}$, afin d'en tirer par l'élimination, les expressions des fonctions $y'_{x,t}$ et $y''_{x,t}$, au moyen de la fonction $y_{x,t}$ et de ses différences ou de ses valeurs consécutives.

1019. Si l'équation (1) se décomposoit en facteurs qui fussent des puissances parfaites d'autres facteurs, l'expression $y_{x,t}$, obtenue d'après les remarques précédentes, ne seroit plus complète. Si l'on avoit, par exemple, $\Pi^m=0$, ce qui donneroit m facteurs égaux à $\Pi=0$, on ne déduiroit de chacun d'eux que la même équation aux différences, et par conséquent que la même intégrale; mais il faut observer que l'équation aux différences, correspondante à $\Pi^m=0$, admet, outre la solution $y_{x,t}=\alpha^x\beta^t$, les suivantes,

$$y_{x,t}=x\alpha^{x-1}\beta^t,\qquad y_{x,t}=x(x-1)\alpha^{x-2}\beta^t,\ldots\text{etc.}$$

ou celles-ci

$$y_{x,t}=x\alpha^{x-1}\beta^t,\qquad y_{x,t}=xt\alpha^{x-1}\beta^{t-1},\ldots\text{etc.}$$

ou enfin celles-ci

$$y_{x,t}=t\alpha^x\beta^{t-1},\qquad y_{x,t}=t(t-1)\alpha^x\beta^{t-2},\ \text{etc.}$$

qui se tirent de la première en prenant, jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement, ses différentielles, soit par rapport à α, soit par rapport à β, et en faisant même succéder ces différentiations les unes aux autres dans tel ordre qu'on voudra. Ceci est fondé sur des raisonnemens analogues à ceux du n°. 648, d'après lesquels on substitue, au lieu des valeurs de α ou de β qui sont égales, d'autres valeurs très-peu différentes entr'elles.

Connoissant un nombre m de valeurs particulières de $y_{x,t}$, on en aura une plus générale en prenant la somme des produits de ces valeurs par des constantes arbitraires différentes; et il viendra

$$y_{x,t}=a\alpha^x\beta^t+a'x\alpha^{x-1}\beta^t+a''x(x-1)\alpha^{x-2}\beta^t+\text{etc.}$$

mais pour arriver à l'expression complète, il faudra substituer aux produits

$$a\alpha^x\beta^t,\quad a'\alpha^{x-1}\beta^t,\quad a''\alpha^{x-2}\beta^t,\ \text{etc.}$$

des fonctions

$$y'_{x,t},\quad y''_{x-1,t},\quad y'''_{x-2,t},\ \text{etc.}$$

on aura ainsi

$$y_{x,t}=y'_{x,t}+xy''_{x-1,t}+x(x-1)y'''_{x-2,t}+\text{etc.}$$

en observant que les fonctions $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, $y'''_{x,t}$, etc. doivent satisfaire à l'équation aux différences, correspondante à $\Pi=0$. Les fonctions arbitraires qui entreront dans la composition de celles-ci seront les mêmes; mais en passant dans les valeurs de $y_{x,t}$, elles prendront chacune un indice particulier. Pour les déterminer on se conduira comme dans le n°. 1016; on les exprimera d'abord au moyen des premières valeurs

$$y'_{x,0},\quad y'_{x,1},\ \text{etc.}\qquad y'_{0,t},\quad y'_{1,t},\ \text{etc.}$$
$$y''_{x,0},\quad y''_{x,1},\ \text{etc.}\qquad y''_{0,t},\quad y''_{1,t},\ \text{etc.}$$
etc.

et l'on introduira ensuite les valeurs

$$y_{x,0},\quad y_{x,1},\ \text{etc.}\qquad y_{0,t},\quad y_{1,t},\ \text{etc.}$$

en éliminant les premières, à l'aide de la relation qui existe entre les fonctions $y_{x,t}$, $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, etc. et des équations en $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, etc. déduites de $\Pi=0$.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur cette matière qui devient très-compliquée ; ce que nous avons dit suffit pour mettre sur la voie les lecteurs intelligens qui auront présentes à l'esprit les diverses remarques semées dans cet ouvrage. Nous passerons aussi sous silence, par cette raison, la théorie des équations entre plusieurs fonctions, que l'on peut traiter à peu près comme les équations différentielles du n°. 656, ou comme les équations aux différences du n°. 996.

1020. On parvient à des résultats analogues pour les équations aux différences, contenant quatre ou un plus grand nombre de variables, qui répondent aux séries récurrentes *triples*, *quadruples*, etc. Pour se former l'idée d'une série récurrente triple, par exemple, il suffit de concevoir une fonction qui varie de trois manières différentes, ou qui renferme trois variables indépendantes ; une semblable série se disposeroit naturellement dans les cases d'un parallélépipède, formeroit alors une *table à triple entrée*, et si on en désignoit le terme général par $y_{x,t,u}$, l'une des arrêtes contigues à un même angle du parallélépipède, seroit la bande des x, l'autre celle des t, et la troisième celle des u.

Nous nous bornerons à traiter l'équation

$$\left.\begin{array}{l} Ay_{x,t,u}+B\,y_{x+1,t,u}+C\,y_{x+1,t+1,u}+Dy_{x+1,t+1,u+1} \\ \quad +B'y_{x,t+1,u}+C'y_{x+1,t,u+1} \\ \quad +B''y_{x,t,u+1}+C''y_{x,t+1,u+1} \end{array}\right\}=0,$$

contenant une fonction dépendante de trois variables, et que l'on doit regarder comme étant du troisième ordre, à cause du terme $Dy_{x+1,t+1,u+1}$. En y faisant $y_{x,t,u}=a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, et divisant par $a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, après la substitution, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} A+B\,\alpha+C\,\alpha\beta+D\alpha\beta\gamma \\ \quad +B'\beta+C'\alpha\gamma \\ \quad +B''\gamma+C''\beta\gamma \end{array}\right\}=0\ldots(1),$$

d'où on tirera $\gamma=-\dfrac{A+B\alpha+B'\beta+C\alpha\beta}{B''+C'\alpha+C''\beta+D\alpha\beta}$,

et l'on aura par conséquent dans l'expression

$$y_{x,t,u}=a\,\alpha^x\beta^t\left(-\frac{A+B\,\alpha+B'\beta+C\,\alpha\,\beta}{B''+C'\alpha+C''\beta+D\,\alpha\,\beta}\right)^u,$$

pour la fontion cherchée, une valeur contenant trois arbitraires a, α et β; mais cette valeur n'est encore que particulière, et si on donne à celle de γ la forme

$$\gamma = -\frac{C + \frac{B'}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{A}{\alpha\beta}}{D + \frac{C''}{\alpha} + \frac{C'}{\beta} + \frac{B''}{\alpha\beta}},$$

en divisant par $\alpha\beta$, son numérateur ainsi que son dénominateur, et qu'ensuite on en développe la puissance u, en série ordonnée par rapport aux puissances des quantités $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\gamma^u = V & + V'\frac{1}{\alpha} + V''\frac{1}{\alpha^2} + V'''\frac{1}{\alpha^3} + \text{etc.}\\ & + V_1\frac{1}{\beta} + V'_1\frac{1}{\alpha\beta} + V''_1\frac{1}{\alpha^2\beta} + \text{etc.}\\ & + V_2\frac{1}{\beta^2} + V'_2\frac{1}{\alpha\beta^2} + \text{etc.}\\ & + V_3\frac{1}{\beta^3} + \text{etc.}\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Il n'entrera dans les coefficiens $V, V' \ldots V_1$, etc. que les constantes A, B, etc. et l'exposant variable u. Par la substitution de cette série le produit $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ ne contiendra plus que des termes de la forme $V_s^{(r)}\frac{1}{\alpha^r\beta^s}$; et par un raisonnement semblable à celui du n°. 1016; on se convaincra que ces termes peuvent être remplacés par d'autres de la forme $V_s^{(r)} f(r,s)$, f désignant une fonction arbitraire, ce qui donnera

$$\begin{aligned}y_{x,t,u} = V f(x,t) & + V' f(x-1,t) + V'' f(x-2,t) + V''' f(x-3,t) + \text{etc.}\\ & + V_1 f(x,t-1) + V'_1 f(x-1,t-1) + V''_1 f(x-2,t-1) + \text{etc.}\\ & + V_2 f(x,t-2) + V'_2 f(x-1,t-2) + \text{etc.}\\ & + V_3 f(x,t-2) + \text{etc.}\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette expression peut se traduire en une autre qui ne dépende que des valeurs de

$$\begin{array}{llll} y_{x,t,0}, & y_{x-1,t,0}, & y_{x-2,t,0}, & \text{etc.} \\ y_{x,t-1,0}, & y_{x-1,t-1,0}, & y_{x-2,t-1,0}, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

contenues dans une table à double entrée, qui résulte des seules variations de x et de t, et qui formeroit une des faces de la table parallélépipède ou à triple entrée. En effet, lorsque $u=0$, on a $\gamma''=1$, d'où on conclut $V=1$, et tous les autres coefficiens sont nuls, il vient donc $y_{x,t,0}=f(x,t)$; puis suivant à cet égard la marche tracée dans les n°s. 1012, 15 et 16, on obtient

$$\begin{aligned} y_{x,t,u}=&Vy_{x,t,0}+V'y_{x-1,t,0}+V''y_{x-2,t,0}+V'''y_{x-3,t,0}+\text{etc.} \\ &+V_1y_{x,t-1,0}+V'_1y_{x-1,t-1,0}+V''_1y_{x-2,t-1,0}+\text{etc.} \\ &+V_2y_{x,t-2,0}+V'_2y_{x-1,t-2,0}+\text{etc.} \\ &+V_3y_{x,t-3,0}+\text{etc.} \\ &+\text{etc.} \end{aligned}$$

résultat parfaitement analogue à celui du n°. 1012, et ayant aussi l'inconvénient d'être indéfini, à moins que trois des quatre quantités B'', C', C'', D, ne s'évanouissent, ou que les valeurs de $y_{x,t,0}$, relatives aux indices négatifs ne soient toutes nulles. On pare à cet inconvénient par le moyen d'une méthode absolument semblable à celle du n°. 1015, et sur laquelle nous ne saurions nous arrêter.

1021. La méthode que nous venons d'exposer suppose que les coefficiens A, B, C, etc. de l'équation aux différences soient constans; Laplace, qui le premier s'est occupé de ce genre d'équations, a donné un procédé un peu moins simple, mais aussi à l'aide duquel on peut intégrer une classe assez étendue d'équations à coefficiens variables. Il a fait remarquer en premier lieu que l'équation

$$y_{x,t}=U_{x,t}y_{x-1,t-1}+U'_{x,t}y_{x-2,t-2}+U''_{x,t}y_{x-3,t-3}\ldots+V_{x,t},$$

dans laquelle les deux variables indépendantes décroissent de la même manière, peut se changer en une autre, où l'on n'a plus à considérer que la seule variable x. En effet, si l'on prend $t=x-K$, K étant une

constante, et que l'on mette cette valeur dans les coefficiens $U_{x,t}$, $U'_{x,t}$, $U''_{x,t}$, etc. $V_{x,t}$, que l'on représentera ensuite par X_x, X'_x, X''_x, et W_x, et que l'on change $y_{x,t}$ en u_x, on aura

$$u_x = X_x u_{x-1} + X'_x u_{x-2} + X''_x u_{x-3} \ldots + W_x;$$

l'intégrale de cette nouvelle équation donnera l'expression de $y_{x,t}$, lorsqu'on y substituera $x-t$ au lieu de K, et il faudra regarder les arbitraires comme des fonctions de $x-t$.

1022. Lorsque les deux variables ne décroissent pas de la même manière, les fonctions arbitraires paroissent devoir être affectées du signe d'intégration Σ. Si l'on a, par exemple,

$$y_{x,t} = y_{x-1,t} + y_{x-1,t-1},$$

et que l'on fasse d'abord $y_{x,1} = \mathrm{f}(x)$, il en résulte $y_{x-1,1} = \mathrm{f}(x-1)$; prenant ensuite $t=2$, l'équation proposée devient $y_{x,2} = y_{x-1,2} + y_{x-1,1}$, donne $y_{x,2} - y_{x-1,2} = y_{x-1,1}$, d'où l'on conclut $\Delta_x y_{x-1,2} = \mathrm{f}(x-1)$, par conséquent $\Delta_x y_{x,2} = \mathrm{f}(x)$ et $y_{x,2} = \Sigma\mathrm{f}(x)$: passant à $t=3$, on aura

$$y_{x,3} = y_{x-1,3} + y_{x-1,2}, \text{ ou } y_{x,3} - y_{x-1,3} = \Sigma\mathrm{f}(x-1),$$

augmentant l'indice x de l'unité, il viendra

$$\Delta_x y_{x,3} = \Sigma\mathrm{f}(x) \text{ et } y_{x,3} = \Sigma^2\mathrm{f}(x).$$

Si l'on continue ainsi, on obtiendra $y_{x,t} = \Sigma^{t}\mathrm{f}(x)$, formule peu commode, quoiqu'il soit possible d'exprimer le second membre par une suite de termes affectés d'un seul signe d'intégration (n°. 928).

1023. Considérons à présent l'équation

$$y_{x,t} = A_x y_{x-1,t} + A'_x y_{x-2,t} + A''_x y_{x-3,t} + \text{etc.}$$
$$+ B_x y_{x,t-1} + B'_x y_{x-1,t-1} + B''_x y_{x-2,t-1} + \text{etc.}$$

qui n'est que du premier ordre par rapport à la variable t, et commençons par nous occuper du cas particulier

$$y_{x,t} = A_x y_{x-1,t} + B_x y_{x,t-1} + C_x.$$

Cette équation suppose que x et t surpassent l'unité. Si nous faisons successivement $x=2$, $x=3$, nous en tirerons

$$y_{2,t} = A_2 y_{1,t} + B_2 y_{2,t-1} + C_2 \ldots (a)$$
$$y_{3,t} = A_3 y_{2,t} + B_3 y_{3,t-1} + C_3 \ldots (b),$$

et de ces dernières nous déduirons une résultante dans laquelle l'indice

relatif à x ne sera que 1 ou 3, en éliminant les termes $y_{2,t-1}$ et $y_{2,t}$. Pour nous procurer un nombre suffisant d'équations, nous changerons t en $t-1$ dans (b), qui deviendra

$$y_{3,t-1}=A_3 y_{2,t-1}+B_3 y_{3,t-2}+C_3 \ldots \ldots (b');$$

chassons maintenant des trois équations (a), (b), (b'), les quantités $y_{2,t}$, $y_{2,t-1}$, comme des inconnues distinctes; pour cela, multiplions respectivement par α et β les équations (a) et (b'), que nous ajouternos avec (b) et nous aurons,

$$\left.\begin{array}{l} y_{3,t}=(B_3-\beta)y_{3,t-1}+\beta B_3 y_{3,t-2} \qquad +\alpha C_2+C_3+\beta C_3 \\ \quad +(A_3-\alpha)y_{2,t} \;\; +(\alpha B_2+\beta A_3)y_{2,t-1}+\alpha A_2 y_{1,t} \end{array}\right\} = 0,$$

égalant à zéro les coefficiens de $y_{2,t}$ et de $y_{2,t-1}$, nous obtiendrons

$$A_3-\alpha=0 \text{ ou } \alpha=A_3, \quad \alpha B_2+\beta A_3=0 \text{ ou } \beta=-B_2,$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{array}{r} y_{3,t}-(B_2+B_3)y_{3,t-1}+B_2 B_3 y_{3,t-2}-A_3 C_2-(1-B_2)C_3 \\ -A_2 A_3 y_{1,t} \end{array}\right\} = 0 (3).$$

Si on désigne par $\varphi(t)$ la fonction $y_{1,t}$, évidemment arbitraire, cette équation pourra être traitée comme ne renfermant plus que la seule variable t, puisque les indices relatifs à x sont les mêmes dans tous les termes, ou que tous ces termes seroient placés sur une même ligne horizontale, dans la table à double entrée, qui représenteroit la série proposée.

Prenant $x=4$, l'équation proposée donne

$$y_{4,t} \;=A_4 y_{3,t} \;+B_4 y_{4,t-1}+C_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c);$$

en diminuant l'indice t de 1 et 2 successivement, on aura

$$y_{4,t-1}=A_4 y_{3,t-1}+B_4 y_{4,t-2}+C_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c')$$
$$y_{4,t-2}=A_4 y_{3,t-2}+B_4 y_{4,t-3}+C_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c'');$$

les équations c, c', c'', combinées avec l'équation (3), fourniront le moyen d'éliminer $y_{3,t}$, $y_{3,t-1}$, $y_{3,t-2}$, et d'arriver à une équation qui ne contienne plus que $y_{4,t}$, $y_{4,t-1}$, $y_{4,t-2}$, $y_{4,t-3}$, et la fonction arbitraire $y_{1,t}$. Cette équation sera

$$\begin{array}{l} y_{4,t}-(B_2+B_3+B_4)y_{4,t-1}+(B_2 B_3+B_2 B_4+B_3 B_4)y_{4,t-2}-B_2 B_3 B_4 y_{4,t-3} \\ \quad -A_4 D_4-C_4(1-B_2-B_3+B_2 B_3)=0, \ldots\ldots (4), \end{array}$$

en faisant pour abréger

$$A_3C_2+(1-B_2)C_3+A_2A_3y_{1,t}=D_4$$

Passons encore à $x=5$, nous trouverons successivement

$$\begin{aligned}
y_{5,t} &= A_5y_{4,t} + B_5y_{5,t-1}+C_5 \quad \ldots\ldots (d)\\
y_{5,t-1} &= A_5y_{4,t-1}+B_5y_{5,t-2}+C_5 \quad \ldots\ldots (d')\\
y_{5,t-2} &= A_5y_{4,t-2}+B_5y_{5,t-3}+C_5 \quad \ldots\ldots (d'')\\
y_{5,t-3} &= A_5y_{4,t-3}+B_5y_{5,t-4}+C_5 \quad \ldots\ldots (d'''),
\end{aligned}$$

équations qui serviront à éliminer $y_{4,t}$, $y_{4,t-1}$, $y_{4,t-2}$, $y_{4,t-3}$ de l'équation (4), et conduiront à

$$\left.\begin{aligned}
&y_{5,t}-(B_2+B_3+B_4+B_5)y_{5,t-1}\\
&+(B_2B_3+B_2B_4+B_2B_5+B_3B_4+B_3B_5+B_4B_5)y_{5,t-2}\\
&-(B_2B_3B_4+B_2B_3B_5+B_2B_4B_5+B_3B_4B_5)y_{5,t-3}\\
&+B_2B_3B_4B_5y_{5,t-4}\\
&-A_5D_5-C_5(1-B_2-B_3-B_4+B_2B_3+B_2B_4+B_3B_4-B_2B_3B_4)
\end{aligned}\right\}=0\ (5),$$

en faisant

$$D_5=-A_4D_4-C_4(1-B_2-B_3+B_2B_3).$$

La composition de ces équations est facile à saisir; et si l'on représente le dernier résultat par

$$y_{x,t}-M_xy_{x,t-1}+N_xy_{x,t-2}-P_{x,t-3}\ldots\pm Ty_{x,t-x+1}\mp D_x=0\ (x),$$

les coefficiens M_x, N_x, $P_x\ldots D_x$, y seront formés d'après la loi déjà bien évidente de ceux que nous avons calculés précédemment. On peut aussi les déduire successivement les uns des autres, en éliminant

$$y_{x-1,t},\quad y_{x-1,t-1},\quad y_{x-1,t-2},\quad y_{x-1,t-3},\ldots \text{etc.}$$

entre l'équation

$$y_{x-1,t}-M_{x-1}y_{x-1,t-1}+N_{x-1}y_{x-1,t-2}+P_{x-1}y_{x-1,t-3}\ldots\pm D_{x-1}=0\ (x-1),$$

et les suivantes, dont le nombre doit être égal à $x-1$,

$$\begin{aligned}
y_{x,t} &= A_xy_{x-1,t} + B_xy_{x,t-1}+C_x\\
y_{x,t-1} &= A_xy_{x-1,t-1}+B_xy_{x,t-2}+C_x\\
y_{x,t-2} &= A_xy_{x-1,t-2}+B_xy_{x,t-3}+C_x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et

et en comparant la résultante avec l'équation (x) ; car on trouvera

$$M_x = M_{x-1} + B_x$$
$$N_x = N_{x-1} + B_x M_{x-1}$$
$$P_x = P_{x-1} + B_x N_{x-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$D_x = -A_x D_{x-1} - C_x(1 - M_{x-1} + N_{x-1} - P_{x-1} + \text{etc.}),$$

équations qui ne sont que du premier ordre, et qui ne renferment que la seule variable x.

La valeur de $y_{x,t}$, tirée de l'équation (x), contiendra un nombre x de constantes arbitraires, qui seront surabondantes, puisque la proposée n'étant que du premier ordre, ne doit avoir dans son intégrale que la fonction arbitraire $f(t)$, introduite pour $y_{1,t}$; il faudra donc déterminer ces arbitraires par la substitution de l'expression de $y_{x,t}$, dans la proposée et par la comparaison des termes semblables en x.

1024. L'équation générale du n°. précéd. donne d'abord

$$\begin{aligned}
y_{2,t} &= A_2 y_{2,t-1} + A'_2 y_{2,t-2} + A''_2 y_{2,t-3} \dots\dots\dots\dots \\
&\quad + B_2 y_{1,t} + B'_2 y_{1,t-1} + B''_2 y_{1,t-2} \dots\dots + N_2 \dots\dots \quad (2) \\
y_{3,t} &= A_3 y_{3,t-1} + A'_3 y_{3,t-2} + A''_3 y_{3,t-3} \dots\dots\dots\dots ; \dots \\
&\quad + B_3 y_{2,t} + B'_3 y_{2,t-1} + B''_3 y_{2,t-2} \dots\dots + N_3 \dots\dots \\
y_{3,t-1} &= A_3 y_{3,t-2} + A'_3 y_{3,t-3} + A''_3 y_{3,t-4} \dots\dots\dots\dots \\
&\quad + B_3 y_{2,t-1} + B'_3 y_{2,t-2} + B''_3 y_{2,t-3} \dots\dots + N_3 \dots\dots \\
y_{3,t-2} &= A_3 y_{3,t-3} + A'_3 y_{3,t-4} + A''_3 y_{3,t-5} \dots\dots\dots\dots \\
&\quad + B_3 y_{2,t-2} + B'_3 y_{2,t-3} + B''_3 y_{2,t-4} \dots\dots + N_3 \dots\dots
\end{aligned}$$

etc.

Si on multiplie respectivement la troisième, la quatrième, etc. de ces équations, par A_2, A'_2, etc. et qu'on les retranche de la seconde, en écrivant le résultat ainsi :

$$\begin{aligned}
&y_{3,t} - A_3 y_{3,t-1} - A'_3 y_{3,t-2} - A''_3 y_{3,t-3} \dots\dots \\
&\quad - A_2[y_{3,t-1} - A_3 y_{3,t-2} - A'_3 y_{3,t-3} \dots\dots] \\
&\qquad\qquad - A'_2[y_{3,t-2} - A_3 y_{3,t-3} \dots\dots] \\
&+ \text{etc.} \\
&= B_3[y_{2,t} - A_2 y_{2,t-1} - A'_2 y_{2,t-2} \dots\dots] \\
&\quad + B'_3[y_{2,t-1} - A_2 y_{2,t-2} \dots\dots] \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad + N_3[1 - A_2 - A'_2 \dots\dots\dots\dots].
\end{aligned}$$

on reconnoîtra sur le champ la possibilité d'éliminer les quantités

$$y_{2,t}-A_2 y_{2,t-1}-A'_2 y_{2,t-2}\ldots\ldots$$
$$y_{2,t-1}-A_2\, y_{2,t-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

au moyen de l'équation (2), qui les donnera successivement en $y_{1,t}$, $y_{1,t-1}$, $y_{1,t-2}$, etc. et de parvenir à un résultat de la forme

$$y_{3,t}-a_3 y_{3,t-1}-a'_3 y_{3,t-2}-a'' y_{3,t-3}\ldots\ldots=u_{3,t},$$

dans lequel on n'a plus à considérer que la seule variable t, et qui s'intègre par les méthodes des n°s 973, 979.

La même marche conduira à des équations semblables par rapport à $y_{4,t}$, $y_{5,t}$, ... $y_{x,t}$. Les coefficiens a_x, a'_x, etc. seront aisés à former par induction; il n'en sera pas ainsi de la fonction $u_{x,t}$; mais on y parvient en déduisant de l'équation

$$y_{x,t}=a_x y_{x,t-1}+a'_x y_{x,t-2}\ldots\ldots+u_{x,t}\ldots\ldots(x),$$

les suivantes

$$B_x y_{x-1,t} \;=B_x a_{x-1} y_{x-1,t-1} +B_x a'_{x-1} y_{x-1,t-2}\ldots+B_x u_{x-1,t}$$
$$B'_x y_{x-1,t-1}=B'_x a_{x-1} y_{x-1,t-2} +B'_x a'_{x-1} y_{x-1,t-3}\ldots+B'_x u_{x-1,t-1}$$

etc.

dont la somme faite membre à membre est

$$B_x y_{x-1,t}+B'_x y_{x-1,t-1}+\text{etc.}$$
$$=a_{x-1}[B_x y_{x-1,t-1}+B'_x y_{x-1,t-2}+\text{etc.}]$$
$$a'_{x-1}[B_x y_{x-1,t-2}+\text{etc.}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+B_x u_{x-1,t}+B' u_{x-1,t-1}+\text{etc.}$$

Si l'on y substitue pour les quantités

$$B_x y_{x-1,t} \;+B'_x y_{x-1,t-1}+\text{etc.}$$
$$B_x y_{x-1,t-1}+B' y_{x-1,t-2}+\text{etc.}$$
$$B_x y_{x-1,t-2}+\text{etc.}$$

leurs valeurs tirées de l'équation proposée, on la changera en

$$y_{x,t}-A_x y_{x,t-1}-A'_x y_{x,t-2}\ldots\ldots-N_x$$
$$=a_{x-1}[y_{x,t-1}-A_x y_{x,t-2}\ldots\ldots-N_x]$$
$$+a'_{x-1}[y_{x,t-2}-A_x y_{x,t-3}\ldots\ldots-N_x]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+B_x u_{x-1,t}+B'_x u_{x-1,t-1}+\text{etc.}$$

et en ordonnant les différens termes de cette dernière, par rapport aux valeurs successives de $y_{x,t}$, on aura

$$\begin{aligned}
y_{x,t} = & (a_{x-1} + A_x)y_{x,t-1} \\
& + (a'_{x-1} - a_{x-1}A_x + A'_x)y_{x,t-2} \\
& + (a''_{x-1} - a'_{x-1}A_x - a_{x-1}A'_x + A''_x)y_{x,t-3} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.} \\
& + (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.})N_x :
\end{aligned}$$

comparant avec l'équation (x), on en conclura

$$\begin{aligned}
a_x & = a_{x-1} + A_x \\
a'_x & = a'_{x-1} - a_{x-1}A_x + A'_x \\
a''_x & = a''_{x-1} - a'_{x-1}A_x - a_{x-1}A'_x + A''_x \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{x,t} & = B_x u_{x-1,t} + B'_x u_{x-1,t-1} + \text{etc.} \\
& + 1(1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - a''_{x-1} - \text{etc.})N_x.
\end{aligned}$$

Les coefficiens a_x, a'_x, a''_x, ne dépendent que de la seule variable x : il n'en est pas de même de la fonction $u_{x,t}$; mais cependant l'équation qui la renferme, se traite avec assez de facilité, en observant que quand on prend pour $y_{1,t}$ une fonction arbitraire de t, on a aussi $u_{1,t} = f(t)$, d'où l'on conclut

$$u_{2,t} = (1 - a_1 - a'_1 - \text{etc.})N_2 + B_2\, f(t) + B'_2\, f(t-1) + \text{etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
u_{x,t} & = C_x + b_x\, f(t) + b'_x\, f(t-1) + \text{etc.} \\
u_{x-1,t} & = C_{x-1} + b_{x-1} f(t) + b'_{x-1} f(t-1) + \text{etc.} \\
u_{x-1,t-1} & = C_{x-1} + b_{x-1} f(t-1) + b'_{x-1} f(t-2) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Lorsqu'on met les valeurs de $u_{x-1,t}$, $u_{x-1,t-1}$, etc. dans l'équation en $u_{x,t}$, obtenue précédemment, elle devient

$$\begin{aligned}
u_{x,t} = & (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.})N_x \\
& + (B_x + B'_x + \text{etc.})C_{x-1} \\
& + B_x b_{x-1} f(t) + (B_x b'_{x-1} + B'_x b_{x-1}) f(t-1) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

d'où, par la comparaison avec la valeur hypothétique de $u_{x,t}$, on tire

$$\begin{aligned}
b_x & = B_x b_{x-1} \\
b'_x & = B_x b'_{x-1} + B'_x b_{x-1} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_x & = (B_x + B'_x + \text{etc.})C_{x-1} + (1 - a_{x-1} - a'_{x-1} - \text{etc.})N_x.
\end{aligned}$$

L'intégration de ces équations, et l'addition des constantes donneront les valeurs complètes de b_x, b'_x, etc. C_x. Les constantes se détermineront en observant que lorsque $x=1$, on doit avoir $u_{x,t}=f(t)$, d'où il suit $C_1=0$, $b_1=1$, $b'_1=0$, $b''_1=0$, etc.

L'intégration de l'équation (x) introduira un nombre x de constantes arbitraires qui pourront être des fonctions de x; mais ces fonctions doivent, pour satisfaire à la proposée, cesser d'être arbitraires, puisque l'intégrale de cette dernière ne doit renfermer d'autre arbitraire que $f(t)$. On les déterminera par la substitution de l'expression générale de $y_{x,t}$ dans l'équation proposée.

1025. Pour appliquer cette méthode à un exemple particulier, occupons-nous de l'équation

$$y_{x,t}=2y_{x,t-1}+2y_{x-1,t-1},$$

qui, lorsqu'on y fait

$$y_{0,1}=0,\quad y_{1,1}=1,\quad y_{2,1}=0,\quad y_{3,1}=0,\ \text{etc.}$$

fournit cette série à double entrée

	1	2	3	4	5...x
1	1	0	0	0	0 etc.
2	2	2	0	0	0
3	4	8	4	0	0
4	8	24	24	8	0
5	16	64	96	64	16
6	32	160	320	320	160
7	64	384	960	1280	960
.	....				
t					

nous aurons dans cet exemple

$$A_x=2,\quad A'_x=0,\ \text{etc.}\quad B_x=0,\quad B'_x=2,\quad B''_x=0,\ \text{etc.}$$

et les équations du n°. précédent nous donneront

$$\left.\begin{array}{l} a_x=a_{x-1}+2 \\ a'_x=a'_{x-1}-2a_{x-1} \\ a''_x=a''_{x-1}-2a'_{x-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l} \Delta a_x=+2 \\ \Delta a'_x=-2a_x \\ \Delta a''_x=-2a'_x \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$u_x=2u_{x-1,t}$$

d'où nous conclurons

$$a_x=c+2\Sigma 1=c+2x=c+2[x]^1,$$

et seulement $a_{x-1}=2(x-1)$, en ne faisant commencer l'équation proposée que lorsque $x=1$. Nous aurons ensuite

$$a'_x=c'-4\Sigma[x]^{1}=c'-4\frac{[x]^{2}}{2},$$

et il faudra encore supprimer la constante c', pour que $N_{x-1}=0$, lorsque $x=1$; passant à

$$a''_x=c''+8\Sigma\frac{[x]^{2}}{2}=c''+8\frac{[x]^{3}}{2.3},$$

et supprimant c'', nous aurons cette suite de valeurs

$$a_x=2\frac{[x]^{1}}{1},\quad a'_x=-2^2\frac{[x]^{2}}{1.2},\quad a''_x=2^3\frac{[x]^{3}}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

dont la loi est évidente. Il ne nous reste plus que l'équation $u_{x,t}=2u_{x-1,t}$, dans laquelle on doit regarder t comme constant. Nous en tirerons $u_{x,t}=\gamma 2^x$, et comme $u_{x,t}$ doit s'évanouir quand $x=1$, il faut que $\gamma=0$.

Ces divers résultats nous conduisent à l'équation

$$\left.\begin{array}{r} y_{x,t}-2[0]^{-1}[x]^{1}y_{x,t-1}+2^2[0]^{-2}[x]^{2}y_{x,t-2}-2^3[0]^{-3}[x]^{3}y_{x,t-3} \\ +2^4[0]^{-4}[x]^{4}y_{x,t-4}-\text{etc.} \end{array}\right\}=0,$$

à laquelle on satisfait en prenant $y_{x,t}=\lambda^t$, la fonction λ étant donnée par l'équation

$$1-[0]^{-1}[x]^{1}\frac{2}{\lambda}+[0]^{-2}[x]^{2}\frac{2^2}{\lambda^2}-[0]^{-3}[x]^{3}\frac{2^3}{\lambda^3}+\text{etc.}=0,$$

qui n'est autre chose que $\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)^x=0$, et ne donnant par conséquent pour λ que la seule valeur $\lambda=2$, ne mène qu'à une expression particulière de $y_{x,t}$; c'est pourquoi nous ferons $y_{x,t}=\Pi_{x,t}2^t$. La substitution de cette valeur changera l'équation ci-dessus en

$$\left.\begin{array}{r} \Pi_{x,t}-[0]^{-1}[x]^{1}\Pi_{x,t-1}+[0]^{-2}[x]^{2}\Pi_{x,t-2}-[0]^{-3}[x]^{3}\Pi_{x,t-3} \\ +[0]^{-4}[x]^{4}\Pi_{x,t-4}+\text{etc.} \end{array}\right\}=0,$$

qui revient à $\Delta_t^x\Pi_{x,t}=0$ (n°. 860) ; mais on satisfait à cette

équation en prenant pour $\Pi_{x,t}$, une fonction qui, par rapport à t, soit rationnelle et entière et du degré $x-1$. On pourra donc (n°. 861), donner à la fonction $\Pi_{x,t}$ la forme

$$\Pi_{x,t}=C_x[0]^{-x+1}[t-1]^{x-1}+C'_x[0]^{-x+2}[t-2]^{x-2}+C''_x[0]^{-x+3}[t-3]^{x-3}+\text{etc.}$$

substituant ensuite dans l'expression de $y_{x,t}$, puis cette dernière dans l'équation proposée, en observant que

$$[0]^{-x+1}[t-1]^{x-1}=[0]^{-x+1}[t-2]^{x-1}+[0]^{-x+2}[t-2]^{x-2}$$
$$[0]^{-x+2}[t-1]^{x-2}=[0]^{-x+2}[t-2]^{x-2}+[0]^{-x+3}[t-2]^{x-3}$$
etc.

et faisant varier, par rapport à x, les arbitraires C_x, C'_x, etc. il viendra

$$C_x[0]^{-x+1}[t-2]^{x-1}+(C_x+C'_x)[0]^{-x+2}[t-2]^{x-2}+(C'_x+C''_x)[0]^{-x+3}[t-2]^{x-3}+\text{etc.}$$
$$=C_x[0]^{-x+1}[t-2]^{x-1}+(C'_x+C_{x-1})[0]^{-x+2}[t-2]^{x-2}+(C''_x+C'_{x-1})[0]^{-x+3}[t-2]^{x-3}+\text{etc.}$$

La comparaison des termes semblables donnera

$C_x=C_x$, $\quad C_x+C'_x=C'_x+C_{x-1}$, $\quad C'_x+C''_x=C''_x+C'_{x-1}$; etc.
ce qui se réduit à $C_x=C_{x-1}$, $\quad C'_x=C'_{x-1}$, etc.
d'où l'on doit conclure $C_x=c$, $\quad C'_x=c'$, etc.

c et c' désignant ici des constantes; pour déterminer ces dernières, on prendra dans la première ligne de la table de la page 276, les valeurs de $y_{1,1}$, $y_{2,1}$, etc.

Quand $x=1$, on a

$$[0]^{-x+1}[t-1]^{x-1}=1,\quad [0]^{-x+2}[t-1]^{x-2}=0,\quad [0]^{-x+3}[t-1]^{x-3}=0,\ \text{etc.}$$

d'où il résulte $y_{1,t}=c.2^{t}$, $y_{1,1}=2c$, et par conséquent $c=\frac{1}{2}$;

quand $x=2$, il vient $y_{2,t}=2^{t}([0]^{-1}[t-1]^{1}+c')$, expression d'où l'on tire $y_{2,1}=2c'$ et $c'=0$, puisque dans la table $y_{2,1}=0$. En poursuivant de cette manière, on trouvera successivement $c''=0$, $c'''=0$, et on obtiendra

$$y_{x,t}=2^{t-1}[0]^{-x+1}[t-1]^{x-1},$$

pour le terme général de la série comprise dans la table de la page 276.

La complication de la méthode que nous venons d'exposer, ne paroît être due qu'à celle du sujet ; cette méthode a d'ailleurs, sur celle du n°. 973, qui paroît beaucoup plus simple, l'avantage d'offrir un véritable procédé d'intégration, fondé sur la nature même des équations aux différences partielles, tandis que le succès de l'autre ne tient qu'à l'effet d'une substitution particulière aux équations du premier degré à coefficiens constans ; je regrette, pour cette raison, de ne pouvoir m'étendre davantage sur les diverses applications que Laplace a faites de sa méthode, et d'être obligé de renvoyer à son Mémoire ; mais pour terminer cette matière, je vais rapporter une méthode proposée par M. Paoli, dans laquelle se trouve comprise celle de Lagrange et qui s'applique à un genre d'équations dont l'ordre est indéterminé.

1026. Soit, proposé d'intégrer l'équation

$$y_{x,t}=A_x y_{x,t-1}+B_x y_{x,t-2}\ \ldots\ldots+X_x y_{x,t-x}\ldots\ldots\ldots$$
$$+A'_x y_{x-1,t}+B'_x y_{x-1,t-1}\ \ldots\ldots+X'_x y_{x-1,t-x}\ldots\ldots\ldots$$

dont l'ordre, relativement à la variable t, change à chaque valeur de x. Supposons que l'intégrale cherchée ait cette forme

$$y_{x,t}=ma^t[\alpha_x]^{x}+nb^t[\beta_x]^{x}+pc^t[\gamma_x]^{x}+\text{ etc.}$$

dans laquelle $[\alpha_x]^{x}=\alpha_x.\alpha_{x-1}.\alpha_{x-2}\ldots\ldots\alpha_1$, et ainsi des autres ; et les quantités $a, b, c. \ldots m, n, p. \ldots$ désignent des constantes. Tirant de cette expression les valeurs de $y_{x,t}$, $y_{x,t-1}$ etc. pour les substituer dans la proposée, nous aurons

$$ma^t[\alpha_x]^{x}\ +nb^t[\beta_x]^{x}+\ pc^t[\gamma_x]^{x}+\text{ etc.}$$
$$=mA_x a^{t-1}[\alpha_x]^{x}\ +mB_x a^{t-2}[\alpha_x]^{x}\ \ldots\ldots+mX_x a^{t-x}[\alpha_x]^{x}$$
$$+mA'_x a^t\ [\alpha_{x-1}]^{x-1}+mB'_x a^{t-1}[\alpha_{x-1}]^{x-1}\ \ldots\ldots+mX'_x a^{t-x}[\alpha_{x-1}]^{x-1}$$
$$+nA_x b^{t-1}[\beta_x]^{x}\ +nB_x b^{t-2}[\beta_x]^{x}\ \ldots\ldots+nX_x b^{t-x}[\beta_x]^{x}$$
$$+nA'_x b^t\ [\beta_{x-1}]^{x-1}+nB'_x b^{t-1}[\beta_{x-1}]^{x-1}\ \ldots\ldots+nX'_x b^{t-x}[\beta_{x-1}]^{x-1}$$
$$+pA_x c^{t-1}[\gamma_x]^{x}\ +pB_x c^{t-2}[\gamma_x]^{x}\ldots\ldots+pX_x c^{t-x}\ [\gamma_x]^{x}$$
$$+pA'_x c^t\ [\gamma_{x-1}]^{x-1}+pB'_x c^{t-1}[\gamma_{x-1}]^{x-1}\ \ldots\ldots+pX'_x c^{t-x}[\gamma_{x-1}]^{x-1}$$

etc.

ayant introduit un nombre suffisant de fonctions indéterminées α_x, β_x, γ_x, etc. dans l'équation proposée, nous y pourrons satisfaire en posant

$$ma^t\overset{x}{[\alpha_x]}=mA_xa^{t-1}\overset{x}{[\alpha_x]}+mB_xa^{t-2}\overset{x}{[\alpha_x]}\;.\;.\;.\;.\;.\;+mX_xa^{t-x}\overset{x}{[\alpha_x]}$$
$$+mA'_xa^t\overset{x-1}{[\alpha_{x-1}]}+mB'_xa^{t-1}\overset{x-1}{[\alpha_{x-1}]}\;.\;.\;.\;.\;+mX'_xa^{t-x}\overset{x-1}{[\alpha_{x-1}]}$$

$$nb^t\overset{x}{[\beta_x]}=nA_xb^{t-1}\overset{x}{[\beta_x]}+nB_xb^{t-2}\overset{x}{[\beta_x]}\;.\;.\;.\;.\;.\;+nX_xb^{t-x}\overset{x}{[\beta_x]}$$
$$+nA'_xb^t\overset{x-1}{[\beta_{x-1}]}+nB'_xb^{t-1}\overset{x-1}{[\beta_{x-1}]}\;.\;.\;.\;.\;+nX'_xb^{t-x}\overset{x-1}{[\beta_{x-1}]}$$

$$pc^t\overset{x}{[\gamma_x]}=pA_xc^{t-1}\overset{x}{[\gamma_x]}+pB_xc^{t-2}\overset{x}{[\gamma_x]}\;.\;.\;.\;.\;.\;+pX_xc^{t-x}\overset{x}{\gamma_x]}$$
$$+pA'_xc^t\overset{x-1}{[\gamma_{x-1}]}+pB'_xc^{t-1}\overset{x-1}{[\gamma_{x-1}]}\;.\;.\;.\;.\;+pX'_xc^{t-x}\overset{x-1}{[\gamma_{x-1}]}$$

etc.

Les quantités m, n, p, etc. disparoissent de ces équations, par la seule division et demeurent par conséquent arbitraires; on peut aussi chasser les fonctions $\overset{x-1}{[\alpha_{x-1}]}$, $\overset{x-1}{[\beta_{x-1}]}$, $\overset{x-1}{[\gamma_{x-1}]}$, etc. puisque $\overset{x}{[\alpha_x]}=\alpha_x\overset{x-1}{[\alpha_{x-1}]}$, $\overset{x}{[\beta_x]}=\beta_x\overset{x-1}{[\beta_{x-1}]}$, $\overset{x}{[\gamma_x]}=\gamma_x\overset{x-1}{[\gamma_{x-}]}$ . . . . : Les équations simplifiées par ces réductions donneront respectivement

$$\alpha_x=\frac{A'_x+B'_xa^{-1}\;.\;.\;.\;.\;+X'_xa^{-x}}{1-A_xa^{-1}-B_xa^{-2}\;.\;.\;.\;.\;+X_xa^{-x}}$$
$$\beta_x=\frac{A'_x+B'_xb^{-1}\;.\;.\;.\;.\;.\;+X'_xb^{-x}}{1-A_xb^{-1}-B_xb^{-2}\;.\;.\;.\;.\;-X_xb^{-x}}$$
$$\gamma_x=\frac{A'_x+B'_xc^{-1}\;.\;.\;.\;.\;+X'_xc^{-x}}{1-A_xc^{-1}-B_xc^{-2}\;.\;.\;.\;.\;-X_xc^{-x}}$$
etc.

d'où on déduira les valeurs de $\overset{x}{[\alpha_x]}$, $\overset{x}{[\beta_x]}$, $\overset{x}{[\gamma_x]}$, etc. mais pour faire usage de celles-ci, il faudra les réduire en séries descendantes, suivant les puissances de a, b, c, etc. et si l'on a

$$\overset{x}{[\alpha_x]}=A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{ etc.}$$
$$\overset{x}{[\beta_x]}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+\text{ etc.}$$
$$\overset{x}{[\gamma_x]}=A+A'c^{-1}+A''c^{-2}+A'''c^{-3}+\text{ etc.}$$
etc.

on

on en conclura

$$y_{x,t} = A(ma^t + nb^t + pc^t + \text{etc.}) + A'(ma^{t-1} + nb^{t-1} + pc^{t-1} + \text{etc.}) + A''(ma^{t-2} + nb^{t-2} + pc^{t-2} + \text{etc.}):$$

en raisonnant ici comme dans le n°. 1012, on transformera cette expression dans la suivante

$$y_{x,t} = A\varphi(t) + A'\varphi(t-1) + A''\varphi(t-2) + \text{etc.}$$

qui sera l'intégrale complète de l'équation proposée aux différences.

La méthode ci-dessus se réduit visiblement à faire $y_{x,t} = a^t[\overset{x}{\alpha_x}]$, à tirer de la substitution dans l'équation proposée la valeur de α_x; et à convertir ensuite $[\overset{x}{\alpha_x}]$ en une série de la forme

$$A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{etc.}$$

d'où l'on déduit sur le champ

$$y_{x,t} = A\varphi(t) + A'\varphi(t-1) + A''\varphi(t-2) + A'''\varphi(t-3) + \text{etc.}$$

1027. Prenons pour premier exemple l'équation

$$y_{x,t} = xy_{x,t-1} + y_{x-1,t-x+1},$$

qui engendre la série

	1	2	3	4	5	6.....x
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	3	0	0	0	0
4	1	7	1	0	0	0
5	1	15	6	0	0	0
6	1	31	25	0	0	0
7	1	63	90	1	0	0
8	1	127	301	10	0	0
.	....					
t						

lorsqu'on fait $y_{1,t} = 1$, $y_{x,0} = 0$, $y_{x,-1} = 0$, etc. Chaque terme de cette série est égal à celui qui le précède dans la colonne verticale où il est placé, multiplié par x et augmenté de celui qui, dans la colonne précédente, s'en trouve éloigné de $x-1$ rangs horizontaux :

pour le troisième terme de la septième ligne, par exemple, on a $x=3$, $t=7$, et $t-x+1=5$, et par là on trouve $y_{3,7}=3\times 25+15=90$.

Faisant, comme le prescrit la règle ci-dessus, $y_{x,t}=a^t[\overset{x}{\alpha_x}]$, l'équation proposée se change en $\alpha_x = xa^{-1}\alpha_x + a^{-x+1}$ et donne $\alpha_x = \frac{a^{-x+1}}{1-xa^{-1}}$, d'où l'on conclut

$$[\overset{x}{\alpha_x}] = \frac{a^{-x+1}.a^{-x+2}.a^{-x+3}\ldots\ldots a^0}{(1-xa^{-1})(1-(x-1)a^{-1})(1-(x-2)a^{-1})\ldots(1-a^{-1})}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}x(x-1)}}{(1-a^{-1})(1-2a^{-1})(1-3a^{-1})\ldots\ldots(1-xa^{-1})}.$$

Soit

$$\frac{1}{(1-a^{-1})(1-2a^{-1})(1-3a^{-1})\ldots\ldots(1-xa^{-1})} = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{etc.}$$

on aura premièrement $A=1$, puis il s'agira de mettre le dénominateur du premier membre sous la forme

$$1 + Pa^{-1} + Qa^{-2} + Ra^{-3} + \text{etc.}$$

pour parvenir au développement de ce membre; or il est visible que

$$P = -1-2-3\ \ldots -x$$
$$Q = 1.2+1.3.\ \ldots\ldots +2.3+\text{etc.}$$
$$R = -1.2.3 - \text{etc.}$$

et que ces quantités peuvent s'exprimer par la somme des puissances de la progression 1, 2, 3, 4, etc. au moyen des formules du n°. 158, qui donnent

$$P = -S_1$$
$$Q = -\frac{S_2 + PS_1}{2} = -\frac{S_2 - S_1^2}{2}$$
$$R = -\frac{S_3 + PS_2 + QS_1}{3} = -\frac{S_3 - S_1S_2 + \frac{S_1S_2 - S_1^3}{2}}{3},$$

etc.

et on aura ensuite, pour déterminer A, A', A'', A''', etc. les équations

$$
\begin{aligned}
&A = 1 \\
&PA + A' = 0 \\
&QA + PA' + A'' = 0 \\
&RA + QA' + PA'' + A''' = 0
\end{aligned}
$$

etc.

reste à tirer les valeurs des coefficiens A, A', A'', A''', etc. mais on y parviendra plus facilement, en comparant les équations qui se correspondent dans les deux suites ; car on aura ainsi :

$$P + S_1 = P + \frac{A'}{A}$$

$$Q + \tfrac{1}{2} P S_1 + \tfrac{1}{2} S_2 = Q + P\frac{A'}{A} + \frac{A''}{A}$$

$$R + \tfrac{1}{3} Q S_1 + \tfrac{1}{3} P S_2 + \tfrac{1}{3} S_3 = R + Q\frac{A'}{A} + P\frac{A''}{A} + \frac{A'''}{A}$$

etc.

d'où l'on conclura

$$\frac{A'}{A} = S_1$$

$$\frac{A''}{A} = \frac{S_2}{2} + S_1 \frac{S_1}{3}$$

$$\frac{A'''}{A} = \frac{S_3}{3} + S_1 \frac{S_2}{3} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1 \frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}$$

. . . .

$$\frac{A^{(n+1)}}{A} = \frac{S_{m+1}}{m+1} + S_1 \frac{S_m}{m+1} \left(\frac{S_2}{2} + S_1 \frac{S_1}{2}\right) \frac{S_{m-1}}{m+1} + \text{etc. } (*) ;$$

(*) Ces formules ne sont qu'un cas particulier de celles que donne M. Paoli, pour réduire en série, par le moyen des sommes des puissances, une fraction rationnelle, formules trop élégantes pour ne pas trouver place ici.

Si l'on a la fraction

$$\frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)\ldots\ldots}{(1-a'z)(1-b'z)(1-c'z)\ldots\ldots} = A + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \text{etc.}$$

et par conséquent

$$[\alpha_x]^x = a^{-\frac{1}{2}x(x-1)} + S_1 a^{-\frac{1}{2}x(x-1)-1} + \left(\frac{S_2}{2} + S_1\right) z^{-\frac{1}{2}x(x-1)-2} + \text{etc.}$$

---

et qu'on prenne les logarithmes, il viendra

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{l}(1-\mathrm{a}z)+\mathrm{l}(1-\mathrm{b}z)+\mathrm{l}(1-\mathrm{c}z)\ldots\ldots \\ -\mathrm{l}(1-\mathrm{a}'z)-\mathrm{l}(1-\mathrm{b}'z)-\mathrm{l}(1-\mathrm{c}'z)\ldots\ldots \end{matrix}\right\} = \mathrm{l}(A+A'z+A''z^2+A'''z^3+\text{etc}),$$

puis en différentiant, on obtiendra

$$\left.\begin{matrix} -\dfrac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{a}z}-\dfrac{\mathrm{b}}{1-\mathrm{b}z}-\dfrac{\mathrm{c}}{1-\mathrm{c}z}\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{\mathrm{a}'}{1-\mathrm{a}'z}+\dfrac{\mathrm{b}'}{1-\mathrm{b}'z}+\dfrac{\mathrm{c}'}{1-\mathrm{c}'z}\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} = \frac{A'+2A''z+3A'''z^2+\text{etc.}}{A+A'z+A''z^2+A'''z^3+\text{etc.}}$$

les termes du premier membre étant dévcloppés en série, il en résulte

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{a}'+\mathrm{a}'^2z+\mathrm{a}'^3z^2+\text{etc.} \\ +\mathrm{b}'+\mathrm{b}'^2z+\mathrm{b}'^3z^2+\text{etc.} \\ +\mathrm{c}'+\mathrm{c}'^2z+\mathrm{c}'^3z^2+\text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\mathrm{a}-\mathrm{a}^2z+\mathrm{a}^3z^2-\text{etc.} \\ -\mathrm{b}-\mathrm{b}^2z+\mathrm{b}^3z^2-\text{etc.} \\ -\mathrm{c}-\mathrm{c}^2z+\mathrm{c}^3z^2-\text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\} = \frac{A'+2A''z+3A'''z^2+\text{etc.}}{A+A'z+A''z^2+A'''z^3+\text{etc.}}$$

et si l'on fait

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{a}'+\mathrm{b}'+\mathrm{c}'\ldots\ldots-\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c}\ldots\ldots \\ S_2 &= \mathrm{a}'^2+\mathrm{b}'^2+\mathrm{c}'^2\ldots\ldots-\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2\ldots\ldots \\ S_3 &= \mathrm{a}'^3+\mathrm{b}'^3+\mathrm{c}'^3\ldots\ldots-\mathrm{a}^3-\mathrm{b}^3-\mathrm{c}^3\ldots\ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

on aura

$$S_1+S_2z+S_3z^2+\text{etc.} = \frac{A'+2A''z+3A'''z^2+\text{etc.}}{A+A'z+A''z^2+A'''z^3+\text{etc.}}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned} A' &= A\,S_1 \\ 2A'' &= A'\,S_1+A\,S_2 \\ 3A''' &= A''\,S_1+A'\,S_2+A\,S_3 \\ 4A'''' &= A'''\,S_1+A''S_2+A'S_3+AS_4 \end{aligned}$$

etc.

par le moyen de cette dernière expression, on aura

$$y_{x,t}=\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}\right)+S_1\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}-1\right)$$
$$+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\varphi\left(t-\frac{x(x-1)}{2}-2\right)+\text{etc.}$$

$$\frac{A'}{A}=S_1$$
$$\frac{A''}{A}=\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}$$
$$\frac{A'''}{A}=\frac{S_3}{3}+S_1\frac{S_2}{3}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}$$
$$\frac{A''''}{A}=\frac{S_4}{4}+S_1\frac{S_3}{4}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_2}{4}+\left(\frac{S_3}{3}+S_1\frac{S_2}{3}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right)\frac{S_1}{4}$$

....

$$\frac{A^{(m+1)}}{A}=\frac{S_{m+1}}{m+1}+S_1\frac{S_m}{m+1}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_{m-1}}{m+1}$$
$$+\left(\frac{S_3}{3}+S_1\frac{S_2}{3}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right)\frac{S_{m-2}}{m+1}+\text{etc.}$$

Ces formules sont principalement applicables, lorsque les quantités

a, b, c........a′, b′, c′........

constituent des séries dont on peut obtenir facilement la somme, lorsque leurs différences premières, par exemple, sont constantes; dans ce cas on peut aussi trouver immédiatement les coefficiens des puissances de z, dans le développement du produit

$$(1-az)(1-bz)(1-cz)\text{ etc.}$$

par un moyen que nous allons exposer, parce qu'il peut être utile dans plusieurs occasions, ainsi que l'a montré Lagrange.

Soit a, $a+k$, $a+2k$, $a+3k$, $a+(m-1)k$

une suite de quantités croissant par une différence constante et égale à k; on fera

$$(x+a)(x+a+k)(x+a+2k)\ldots\ldots(x+a+(m-1)k)$$
$$=x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}+A'''x^{m-3}\ldots\ldots\ldots+A^{(m)}\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

les coefficiens A', A'', A''',..........$+A^{(m)}$ donneront les sommes demandées. Si l'on substitue $x+k$ à x, dans les deux membres de cette équation, elle deviendra

$$(x+a+k)(x+a+2k)(x+a+3k)\ldots\ldots\ldots(x+a+mk)$$
$$=(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots\ldots+A^{(m)};$$

Si l'on fait $x=0$, les sommes S_1, S_2, S_3.... s'évanouiront, et il ne restera que $y_{0,t}=\varphi(t)$, en sorte que la détermination de la fonction φ dépendra de la colonne verticale qui précéderoit la première de la table de la page 281, et qui n'est pas donnée.

---

en comparant son premier membre avec celui de la précédente, on voit sans peine que le second

$$(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots\ldots\ldots+A^{(m)}$$
$$=(x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}\ldots\ldots\ldots+A^{(m)})\frac{x+a+mk}{x+a},$$

développant cette nouvelle équation, on obtiendra successivement

$$(x+a)\{(x+k)^m+A'(x+k)^{m-1}+A''(x+k)^{m-2}\ldots\ldots+A^{(m)}\}$$
$$=(x+a+mk)\{x^m+A'x^{m-1}+A''x^{m-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A^{(m)}\},$$

et

$$\begin{array}{llll}
x^{m+1}+\frac{m}{1}kx^m+ & \frac{m(m-1)}{1.2}k^2x^{m-1}+ & \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^3x^{m-2}+\text{etc.} \\
+\ ax^m+ & \frac{m}{1}akx^{m-1}+ & \frac{m(m-1)}{1.2}ak^2x^{m-2}+\text{etc.} \\
+A'x^m+ & \frac{m-1}{1}A'kx^{m-1}+ & \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'k^2x^{m-2}+\text{etc.} \\
+ & A'ax^{m-1}+ & \frac{m-1}{1}A'akx^{m-2}+\text{etc.} \\
+ & A''x^{m-1}+ & \frac{m-2}{1}A''kx^{m-2}+\text{etc.} \\
 & + & A''ax^{m-2}+\text{etc.} \\
 & + & A'''x^{m-2}+\text{etc.} \\
 & & +\text{etc.} \\
=x^{m+1}+A'x^m+ & A''x^{m-1}+ & A'''x^{m-2}+\text{etc.} \\
+\ ax^m+ & A'ax^{m-1}+ & A''ax^{m-2}+\text{etc.} \\
+\ mkx^m+ & A'mkx^{m-1}+ & A''mkx^{m-2}+\text{etc.}
\end{array}$$

Cette dernière équation devant être identique donne

$$1=1$$
$$mk+a+A'=A'+a+mk$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}k^2+\frac{m}{1}ak+\frac{m-1}{1}A'k+A'a+A''=A''+A'a+A'mk$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^3+\frac{m(m-1)}{1.2}ak^2+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'k^2$$
$$\frac{m-1}{1}A'ak+\frac{m-2}{1}A''k+A''a+A'''=A'''+A''a+A''mk$$

etc.

Maintenant voyons comment nous passerons de l'une à l'autre; faisons $x=1$, l'équation proposée nous donnera $y_{1,t}=y_{1,t-1}+y_{0,t}$, d'où $y_{0,t}=y_{1,t}-y_{1,t-1}$, ce qui nous montre que la valeur de $y_{0,t}$ doit toujours être nulle tant que t est un nombre entier positif différent de l'unité, puisque la table de la page 281 donne dans tous ces cas $y_{1,t}=1$. Pour obtenir les valeurs de $y_{1,t}$, lorsque t est nul ou négatif, il faut continuer en arrière la série résultante de l'équation proposée, ce qui s'effectuera en formant, par le moyen de cette équation, le tableau suivant :

$y_{1,0}=y_{1,-1}+y_{0,0}$	$y_{1,1}=y_{1,0}+y_{0,1}$	$y_{1,2}=y_{1,1}+y_{0,2}$	etc.
$y_{2,0}=2y_{2,-1}+y_{1,-1}$	$y_{2,1}=2y_{2,0}+y_{1,0}$	$y_{2,2}=2y_{2,1}+y_{1,1}$	
$y_{3,0}=3y_{3,-1}+y_{2,-2}$	$y_{3,1}=3y_{3,0}+y_{2,-1}$	$y_{3,2}=3y_{3,1}+y_{2,0}$	
etc.	etc.	etc.	

A la troisième ligne de la troisième colonne, on trouve l'équation $y_{3,2}=3y_{3,1}+y_{2,0}$, qui, par le moyen des valeurs de $y_{3,2}$, $y_{3,1}$, tirées de la table de la page 281, donne $y_{2,0}=0$, cette valeur, substituée dans la seconde ligne de la deuxième colonne, qui est $y_{2,1}=2y_{2,0}+y_{1,0}$, conduit à $y_{1,0}=0$; en prolongeant plus loin le tableau, on trouveroit dans la quatrième colonne, à la quatrième ligne, $y_{4,3}=4y_{4,2}+y_{3,0}$, équation de laquelle il

---

d'où l'on déduit

$$A'=\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}k$$

$$2A''=\frac{m-1}{1}A'a+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'k+\frac{m(m-1)}{1.2}ak+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}k^2$$

$$3A'''=\frac{m-2}{1}A''a+\frac{(m-2)(m-2)}{1.2}A''k+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A'ak$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A'k^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}ak^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}k^3$$

etc.

La loi de ces expressions est déjà assez évidente pour nous dispenser d'aller plus loin. Nous observerons que, pour les ramener à celle de Lagrange, il faudroit faire $a=1$, $k=1$, et écrire $m-1$ au lieu de m. (*Mém. de l'Académie de Berlin*, année 1771, page 126.)

résulte $y_{3,2}=0$, cette valeur mise dans la troisième ligne de la deuxième colonne, montre que $y_{2,-1}=0$, et par la seconde ligne de la première colonne on a alors $y_{1,-1}=0$, puis par la première ligne de la même colonne $y_{0,0}=0$. On s'assurera par la même voie que les valeurs de $y_{1,t}$ sont toutes nulles lorsque t est nul ou négatif; on conclura donc de là que $y_{0,1}=y_{1,1}-y_{1,0}=1$: c'est la seule valeur de $y_{0,t}$ qui ne soit pas nulle.

Cela posé, puisque $y_{0,t}=\varphi(t)$, on aura

$$\varphi(t-1)=y_{0,t-1}, \qquad \varphi(t-2)=y_{0,t-2}, \text{ etc.}$$

et $$y_{x,t}=Ay_{0,t}+A'y_{0,t-1}+A''y_{0,t-2}\ldots+A^{(m+1)}y_{0,t-m-1}.$$

Cette série, d'après ce qui précède, se réduira pour chaque cas particulier de la question qui nous occupe, au seul terme dans lequel

$$t-m-1=1, \quad \text{où } y-\frac{x(x-1)}{2}-m-1=1,$$

il vient alors $m+1=y-\frac{x(x-1)}{2}-1$; mettant cette valeur dans l'expression générale du coefficient $A^{(m+1)}$, donnée plus haut, on obtiendra

$$y_{x,t}=\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}+S_1\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-2}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}$$
$$+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-3}}{x-\frac{1}{2}x(x-1)-1}$$
$$+\left(\frac{S_3}{3}+S_1\frac{S_2}{3}+\left(\frac{S_2}{2}+S_1\frac{S_1}{2}\right)\frac{S_1}{3}\right)\frac{S_{t-\frac{1}{2}x(x-1)-4}}{t-\frac{1}{2}x(x-1)-1}+\text{etc.}$$

Soit, pour appliquer cette formule $x=3$, $t=8$; les quatre termes écrits ci-dessus suffiront pour ce cas particulier, puisqu'on a $m+1=4$, et on trouvera

$$S_1=6, \quad S_2=14, \quad S_3=36, \quad S_4=98,$$

d'où l'on déduira

$$y_{3,8}=\frac{98}{4}+\frac{6.36}{4}+(7+18)\frac{14}{4}$$
$$+(12+2.14+(7+18)2)\frac{6}{4}=\frac{1204}{4}=301.$$

1018.

1028. Condorcet, à qui l'on doit la théorie générale des équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions différentielles, a donné les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction aux différences soit intégrable; nous avons remis jusqu'à présent à traiter cet objet parce qu'il est plus curieux qu'utile.

Des équations de condition relatives à l'intégrabilité des fonctions aux différences.

Soit V une fonction quelconque des variables x, y, z et de leurs différences jusqu'à l'ordre n inclusivement; si on la regarde comme la différence complète d'une fonction $V_{,}$, on aura

$$V=\Delta V_{,}, \qquad dV=d\Delta V_{,}=\Delta dV_{,},$$

d'où l'on déduira successivement

$$\frac{dV}{dx}=\frac{d\Delta V_{,}}{dx}, \quad \frac{dV}{d\Delta x}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta x}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 x}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 x}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 x}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 x}, \text{ etc.}$$

$$\frac{dV}{dy}=\frac{d\Delta V_{,}}{dy}, \quad \frac{dV}{d\Delta y}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta y}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 y}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 y}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 y}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 y}, \text{ etc.}$$

$$\frac{dV}{dz}=\frac{d\Delta V_{,}}{dz}, \quad \frac{dV}{dx}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta z}, \quad \frac{dV}{d\Delta^2 z}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^2 z}, \quad \frac{dV}{d\Delta^3 z}=\frac{d\Delta V_{,}}{d\Delta^3 z}, \text{ etc.}$$

mais en transposant la caractéristique Δ, dans $\frac{d\Delta V_{,}}{dx}$, on obtient $\Delta\frac{dV_{,}}{dx}$, puis en observant que

$$dV=\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{d\Delta x}d\Delta x+\frac{dV}{d\Delta^2 x}d\Delta^2 x+\frac{dV}{d\Delta^3 x}d\Delta^3 x+\text{etc.}$$
$$+\frac{dV}{dy}dy+\text{etc.}$$

$$dV_{,}=\frac{dV_{,}}{dx}dx+\frac{dV_{,}}{d\Delta x}d\Delta x+\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}d\Delta^2 x+\frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x}d\Delta^3 x+\text{etc.}$$
$$+\frac{dV_{,}}{dy}dy+\text{etc.}$$

prenant ensuite les différences de chaque terme de cette dernière expression, qui donnent

$$\Delta\frac{dV_{,}}{dx}dx=\Delta\frac{dV_{,}}{dx}.dx+\frac{dV_{,}}{dx}d\Delta x+\Delta\frac{dV_{,}}{dx}.d\Delta x$$

$$\Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}d\Delta x=\Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}.d\Delta x+\frac{dV_{,}}{d\Delta x}d\Delta^2 x+\Delta\frac{dV_{,}}{d\Delta x}.d\Delta^2 x.$$

etc.

pour former le développement de $\Delta dV_{,}$, et comparant enfin ce développement terme à terme, avec celui de dV, on aura les équations suivantes,

$$\frac{dV}{dx} = \Delta \frac{dV_{,}}{dx}$$
$$\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \frac{dV_{,}}{dx} + \Delta \frac{dV_{,}}{dx}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^2 x} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} + \frac{dV_{,}}{d\Delta x} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta x}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^3 x} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}$$
....

pareillement, par rapport aux variables y et z,

$$\frac{dV}{dy} = \Delta \frac{dV_{,}}{dy}$$
$$\frac{dV}{d\Delta y} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta y} + \frac{dV_{,}}{dy} + \Delta \frac{dV_{,}}{dy}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^2 y} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y} + \frac{dV_{,}}{d\Delta y} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta y}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^3 y} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^3 y} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 y}$$
....

$$\frac{dV}{dz} = \Delta \frac{dV_{,}}{dz}$$
$$\frac{dV}{d\Delta z} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta z} + \frac{dV_{,}}{dz} + \Delta \frac{dV_{,}}{dz}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^2 z} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z} + \frac{dV_{,}}{d\Delta z} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta z}$$
$$\frac{dV}{d\Delta^3 z} = \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^3 z} + \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z} + \Delta \frac{dV_{,}}{d\Delta^2 z}$$
....

Il reste maintenant à éliminer les coefficiens différentiels de $V_{,}$; on y parvient de proche en proche par un procédé semblable à celui qu'on a mis en usage dans le n°. 86. En prenant d'abord la diffé-

rence de la seconde des équations relatives à la variable x, on a ce résultat :

$$\Delta\frac{dV}{d\Delta x}=\Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x}+\Delta\frac{dV_{,}}{dx}+\Delta^2\frac{dV_{,}}{dx}$$

qui devient

$$\Delta\frac{dV}{d\Delta x}=\Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x}+\frac{dV}{dx}+\Delta\frac{dV}{dx}\,;$$

en vertu de la première équation $\frac{dV}{dx}=\Delta\frac{dV_{,}}{dx}$.

Prenant ensuite la différence seconde de la troisième équation ; on aura

$$\Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x}=\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}+\Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x}+\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta x};$$

équation de laquelle on éliminera les termes $\Delta^2\frac{dV_{,}}{d\Delta x}$, $\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta x}$, par le moyen de celle que nous venons d'obtenir et de sa différence, ce qui donnera

$$\Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x}=\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}-\frac{dV}{dx_{,}}-2\Delta\frac{dV}{dx}-\Delta^2\frac{dV}{dx}$$
$$+\Delta\frac{dV}{d\Delta x}+\Delta^2\frac{dV}{d\Delta x}.$$

Si l'on prend encore la différence troisième de la quatrième équation, qu'on en chasse les termes $\Delta^3\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}$, $\Delta^4\frac{dV_{,}}{d\Delta^2 x}$, à l'aide de la précédente et de sa différence, on obtiendra

$$\Delta^3\frac{dV}{d\Delta x^3}=\Delta^4\frac{dV_{,}}{d\Delta^3 x}+\frac{dV}{dx}+3\Delta\frac{dV}{dx}+3\Delta^2\frac{dV}{dx}+\Delta^3\frac{dV}{dx}$$
$$-\Delta\frac{dV}{d\Delta x}-2\Delta^2\frac{dV}{d\Delta x}-\Delta^3\frac{dV}{d\Delta x}$$
$$+\Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x}+\Delta^3\frac{dV}{d\Delta^2 x}.$$

En suivant la marche que nous venons de tracer, et en observant que puisque V est de l'ordre n, $V_{,}$ doit être de l'ordre $n-1$, d'où

il suit que $\frac{dV_{,}}{d\Delta^n x}=0$, on arrivera enfin à

$$\Delta^n \frac{dV}{d\Delta^n x} = \pm \left\{ \frac{dV}{dx} + \frac{n}{1}\Delta \frac{dV}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 \frac{dV}{dx} \ldots + \Delta^n \frac{dV}{dx} \right\}$$

$$\mp \left\{ \Delta \frac{dV}{d\Delta x} + \frac{(n-1)}{1}\Delta^2 \frac{dV}{d\Delta x} \ldots + \Delta^n \frac{dV}{d\Delta x} \right\}$$

$$\pm \left\{ \Delta^2 \frac{dV}{d\Delta^2 x} \ldots + \Delta^n \frac{dV}{d\Delta^2 x} \right\}$$

$$\mp \text{etc.}$$

Il est visible que les équations relatives aux autres variables y, z, doivent être absolument de la même forme, mais que s'il y avoit une variable dont la différence première fût constante, elle ne fourniroit point d'équation de condition.

On déduiroit aisément de ce qui précède les équations qui doivent avoir lieu pour que la fonction V soit la différence seconde d'une fonction $V_{,,}$, en formant d'abord celles qui doivent avoir lieu pour que V, soit la différence première de $V_{,,}$ et qui sont semblables aux précédentes, mais seulement de l'ordre $n-1$; puis chassant ensuite les coefficiens différentiels de $V_{,}$, par le moyen des expressions de leurs différences, que l'on obtiendroit à peu près comme ci-dessus. Nous laissons au lecteur, que cette matière pourroit intéresser, le soin de développer ces calculs qui n'exigent que de la patience et de l'attention; nous ne nous arrêterons pas non plus à montrer comment on peut trouver les équations de condition relatives à l'intégrabilité des équations aux différences; car il est évident que si $V=0$ désigne l'équation proposée, il faut chercher les équations de conditions relatives à la fonction MV, qui doivent être employées à la détermination du facteur M, après avoir été réduites autant qu'il est possible par la suppression des termes dont l'équation $V=0$ et ses différences, indiquent la nullité.

1029. Nous avons déjà fait remarquer, dans le dernier Chapitre du second volume de cet ouvrage, l'analogie que les équations de condition relatives aux différentielles, ont avec les équations qui donnent les *maxima* et les *minima* des formules intégrales indéterminées; il existe

une semblable liaison entre les équations de condition relatives aux différences et celles qui donnent les *maxima* et les *minima* des fonctions indéterminées, exprimée par des intégrales aux différences.

En prenant la variation de ces fonctions, on a $\delta\Sigma V = \Sigma\delta V$, et lorsqu'on cherche leurs *maxima* ou leurs *minima*, il faut que $\Sigma\delta V = 0$; mais il convient de séparer l'expression de $\Sigma\delta V$ en deux parties, en intégrant autant qu'il est possible les divers termes de δV, ce qui fournit deux espèces de résultats les uns dégagés du signe Σ, et les autres qui ne peuvent admettre d'intégration tant qu'on n'assigne aucune relation particulière entre les variables qui entrent dans la fonction V. On doit égaler séparément à zéro chacune de ces parties, pour obtenir les équations qui doivent déterminer la forme de la fonction cherchée et celles qui sont relatives aux limites de l'intégrale.

S'il s'agissoit de chercher les conditions d'après lesquelles la fonction V doit être une différence complète, on verroit facilement que dans cette hypothèse δV doit être pareillement une différence complète, sans qu'il soit besoin, pour la rendre intégrable, de supposer aucune relation entre les variables de la fonction V. Il suit de là qu'après avoir intégré autant qu'il est possible chaque terme de δV, la partie qui reste sous le signe Σ doit s'évanouir d'elle-même, ce qui fournit évidemment des équations de condition absolument semblables à celles qui résultent de la même partie de la formule pour les *maxima* et les *minima*; quant à la partie dégagée du signe Σ, ce n'est autre chose que la fonction primitive de $\Sigma\delta V$, et si on l'intègre par rapport à la caractéristique δ le résultat sera l'expression de ΣV.

En prenant, comme ci-dessus,

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{d\Delta x}d\Delta x + \frac{dV}{d\Delta^2 x}d\Delta^2 x + \text{etc.} + \frac{dV}{dy}dy + \text{etc.}$$

on en conclura

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta x}\delta x + \frac{\delta V}{\delta\Delta x}\Delta\delta x + \frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\Delta^2\delta x + \text{etc.} + \frac{\delta V}{\delta y}\delta y + \text{etc.}$$

Si l'on intègre, par rapport au signe Σ, d'après les formules du

n°. 910, chaque terme de cette dernière expression, on aura successivement

$$\Sigma\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\,\Delta\,\delta x=\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\,\delta x-\Sigma\,\Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\,\delta x_{,}$$

$$\Sigma\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\Delta^2\delta x=\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\Delta\,\delta x-\Sigma\,\Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\Delta\,\delta x_{,}$$

$$=\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\Delta\,\delta x-\Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\delta x_{,}+\Sigma\,\Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\delta x_{2}$$

etc.

Il en seroit de même à l'égard des autres variables y, z, etc. et on ne considérant que les termes qui demeurent soumis au signe Σ, on formera l'équation

$$\Sigma\left\{\begin{aligned}&\frac{\delta V}{\delta x}\,\delta x-\Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\,\delta x_{,}+\Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x}\,\delta x_{2}\ldots\mp\Delta^n\frac{\delta V}{\delta\Delta^n x}\,\delta x_n\\&+\frac{\delta V}{\delta y}\,\delta y-\Delta\frac{\delta V}{\delta\Delta y}\,\delta y_{,}+\Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 y}\,\delta y_{2}\ldots\mp\Delta^n\frac{\delta V}{\delta\Delta^n y}\,\delta y_n\\&\text{etc.}\end{aligned}\right\}=0,$$

dans laquelle il faudra réduire les variations δx, $\delta x_{,}$, ... δx_n, δy, $\delta y_{,}$, etc. au plus petit nombre possible. Cette réduction s'opère sur le champ en substituant aux quantités

$$\frac{\delta V}{\delta x},\qquad \Delta\frac{\Delta V}{\delta\Delta x},\qquad \Delta^2\frac{\delta V}{\delta\Delta^2 x},\ \text{etc.}$$

les suivantes

$$\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)},\qquad \Delta\frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta\Delta x(n-1)},\qquad \Delta^2\frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta\Delta^2 x(n-2)},\ \text{etc.}$$

qui en désignent les valeurs ultérieures, lorsque x se change en x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, etc. parce qu'il est évident que $\Sigma\frac{\delta V}{\delta x}\delta x_{,}$ ne diffère de $\Sigma\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)}\delta x_n$ que d'une constante, que $\Sigma\frac{\delta V}{\delta\Delta x}\delta x$ ne diffère de $\Sigma\frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta\Delta x(n-1)}\delta x_n$ que d'une constante, et ainsi des autres termes relatifs à x et de ceux que donnent les autres variables. D'après ces considérations, il ne restera que les seules variations indépen-

dantes δx_n, δy_n, etc. dont il faudra par conséquent égaler séparément à zéro les coefficiens; on aura donc, par rapport à la variable x, l'équation

$$\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)} - \Delta \frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta \Delta x(n-1)} + \Delta^2 \frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta \Delta^2 x(n-2)} \ldots\ldots \mp \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta^n x} = 0:$$

maintenant on sait que

$$\frac{\delta V_{x(n)}}{\delta x(n)} = \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{n}{1}\Delta \frac{\delta V}{\delta x} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 \frac{\delta V}{\delta x} \ldots + \Delta^n \frac{\delta V}{dx}$$

$$\Delta \frac{\delta V_{x(n-1)}}{\delta \Delta x(n-1)} = \Delta \frac{\delta V}{\delta \Delta x} + \frac{n-1}{1}\Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta x} \ldots + \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta x}$$

$$\Delta^2 \frac{\delta V_{x(n-2)}}{\delta \Delta^2 x(n-2)} = \Delta^2 \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x} \ldots + \Delta^n \frac{\delta V}{\delta \Delta^2 x}$$

etc.

la substitution de ces valeurs, dans l'équation précédente, fait précisément retomber sur l'équation de condition relative à x, obtenue dans le n°. précédent.

1030. La question la plus générale qu'on puisse se proposer sur les variations, par rapport aux différences, consiste à trouver la variation d'une fonction qui n'est donnée que par une équation aux différences. Pour la résoudre, on multiplie la variation de l'équation proposée par un facteur; on intègre ensuite le résultat par parties comme ci-dessus, et en égalant séparément à zéro les termes qui contiennent encore sous le signe Σ la variation de la fonction cherchée, on se procure une équation aux différences et du premier degré, qui sert à déterminer le facteur. Ce calcul est trop facile à effectuer d'après celui du n°. 841, pour qu'il soit besoin de nous y arrêter.

1031. Pour donner un exemple de l'application du Calcul des différences à la recherche des *maxima* et des *minima*, nous résoudrons, d'après Lagrange, cette question : *trouver entre tous les polygones qui ont un même nombre de côtés donnés, celui dont l'aire est la plus grande.* Soit $AMM'M''$, etc. *fig.* 5, ce polygone, rapporté à une ligne AB, FIG. 5.

menée par l'un de ses angles; la différence de son aire est le trapeze $PMM'P'$, dont l'aire, mesurée par $\left(\frac{PM+P'M'}{2}\right) PP'$, aura pour expression $(y+\frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$; celle de l'aire du polygone entier sera en conséquence l'intégrale $\Sigma(y+\frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$, prise entre les limites marquées par les points extrêmes du polygone: on aura de plus $MM'=\sqrt{\overline{PP'}^2+\overline{M'R}^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Maintenant les conditions de la question proposée donneront les équations

$$\delta\Sigma(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta x=0, \quad \delta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0;$$

dont la première exprime que l'aire du polygone cherché doit être un *maximum* ou un *minimum*, et la seconde que ses côtés sont invariables. En développant ces équations, on obtient

$$\Sigma\{\Delta x(\delta y+\tfrac{1}{2}\Delta\delta y)+(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta\delta x\}=0$$

$$\frac{\Delta x\Delta\delta x+\Delta y\Delta\delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0;$$

on conclut de la seconde de celles-ci, $\Delta\delta x=-\frac{\Delta y\Delta\delta y}{\Delta x}$; substituant dans la première, on la change en

$$\Sigma\left\{\Delta x\delta y+\left(\frac{1}{2}\Delta x-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\}=0,$$

et faisant pour abréger

$$\frac{1}{2}\Delta x-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}=z;$$

il restera à intégrer par parties la fonction $z\Delta\delta y$. On en déduira

$$\Sigma z\Delta\delta y=z\delta y-\Sigma\Delta z.\delta y_{,},$$

résultat qu'on transformera en $z\delta y-\Sigma\Delta z_{,}.\delta y$, si l'on désigne par $z_{,}$ la valeur que prend z lorsqu'on y met $x-\Delta x$, au lieu de x; et la première équation du problême deviendra

$$z\delta y+\Sigma(\Delta x-\Delta z_{,})\delta y=0.$$

Dans le cas où le polygone coupe l'axe en deux points, c'est-à-dire, où la ligne AB passe par deux angles opposés, la première et la

la dernière ordonnées sont nulles, ainsi que leurs différences, et l'on a $\delta y = 0$; il ne reste que l'équation

$$\Sigma(\Delta x - \Delta z)\delta y = 0,$$

qui donne $\Delta x - \Delta z = 0$, ou $x - z = C$, ce qui revient à $x + \Delta x - z = C$ et fournit par conséquent l'équation

$$x + \Delta x - \frac{1}{2}\Delta x + \frac{y\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x} = C.$$

En la multipliant par $2\Delta x$, il viendra

$$(2x + \Delta x)\Delta x + (2y + \Delta y)\Delta y = 2C\Delta x;$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + y^2 = 2Cx + C',$$

équation appartenante à un cercle dont le centre est placé sur l'axe des x, et qui se réduit à $x^2 + y^2 = 2Cx$, lorsqu'on veut que x et y soient nuls en même temps. Il résulte de là que le polygone demandé doit être inscrit dans une demi-circonférence de cercle.

Si la partie de l'axe des abscisses, comprise entre les deux points extrêmes du polygone, c'est-à-dire, la base de ce polygone étoit donnée, le dernier δx seroit nécessairement nul; et comme l'équation $\Delta\delta x = -\frac{\Delta y \Delta \delta y}{\Delta x}$, donne $\delta x = -\Sigma\frac{\Delta y \Delta \delta y}{\Delta x}$, il faudroit que la valeur totale de l'intégrale $\Sigma\frac{\Delta y \Delta \delta y}{\Delta x}$ fût nulle aussi bien que celle de

$$\Sigma\left\{\Delta x \delta y + \left(\frac{1}{2}\Delta x - y\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\};$$

or on peut appliquer évidemment ici ce qui a été dit, n°. 852, sur la combinaison des conditions simultanées auxquelles les *maxima* et les *minima* des intégrales aux différentielles pouvoient être assujettis, et l'on aura en conséquence

$$\Sigma\left\{\Delta x \delta y + \left(\frac{1}{2}\Delta x + k\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}\right)\Delta\delta y\right\} = 0;$$

k désignant le coefficient indéterminé par lequel on a multiplié la formule $\Sigma\frac{\Delta y \Delta \delta y}{\Delta x}$ avant de l'ajouter à celle que donne la condi-

tion primitive du *maximum*. Si l'on fait comme ci-dessus

$$k\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{1}{2}\Delta x-y\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta x}=\zeta,$$

on obtiendra encore l'équation $x+\Delta x-\zeta=C$, de laquelle on tirera ensuite

$$2k\Delta y+(2x+\Delta x)\Delta x+(2y+\Delta y)\Delta y=2C\Delta x,$$
$$2ky\ \ +x^2+y^2=2Cx+C':$$

cette dernière équation est celle d'un cercle dont le centre est situé d'une manière quelconque par rapport aux coordonnées : ainsi *parmi tous les polygones que l'on peut construire sur des côtés donnés, celui qui sera inscriptible dans un cercle renfermera le plus d'aire.*

1032. Si les côtés du polygone ne sont pas donnés chacun en particulier, mais qu'on en ait seulement la somme, alors l'équation $\delta\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$ doit être remplacée par $\delta\Sigma\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$, ou

par
$$\Sigma\frac{\Delta x\Delta\delta x+\Delta y\Delta\delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0,$$

équation qui doit être combinée avec celle du *maximum*;

$$\Sigma\{\Delta x\Delta y+\tfrac{1}{2}\Delta x\Delta\delta y+(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\Delta\delta x\}=0,$$

comme nous l'avons indiqué plus haut, et d'après laquelle on a

$$\Sigma\Big\{\Delta x\delta y+\Big(\frac{1}{2}\Delta x+\frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Big)\Delta\delta y$$
$$+\Big(y+\frac{1}{2}\Delta y+\frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\Big)\Delta\delta x\Big\}=0.$$

Pour abréger, faisons

$$\frac{1}{2}\Delta x+\frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\zeta;\quad y+\frac{1}{2}\Delta y+\frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=u,$$

nous aurons

$$\Sigma(\Delta x\delta y+\zeta\Delta\delta y+u\Delta\delta x)=0;$$

en intégrant cette équation par parties, de même que celle du n°. précédent, elle donnera

$$\zeta\delta y+u\delta x+\Sigma\{(\Delta x-\Delta\zeta_{,})\delta y-\Delta u_{,}\delta x\}=0,$$

d'où on déduira

$$\Delta x - \Delta z_{,} = 0, \quad \Delta u_{,} = 0, \quad x - z_{,} = C, \quad u_{,} = C_{,},$$

ou

$$x + \frac{1}{2}\Delta x - \frac{k\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = C, \quad y + \frac{1}{2}\Delta y + \frac{k\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = C'.$$

Si on multiplie la première de ces équations par $2\Delta x$, la seconde par $2\Delta y$, puisqu'on les ajoute, on formera la suivante

$$(2x + \Delta x)\Delta x + (2y + \Delta y)\Delta y = 2C\Delta x + 2C'\Delta y,$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + y^2 = 2Cx + 2C'y + C''$$

et appartient à un cercle quelconque. Faisant aussi disparoître les radicaux dans les équations d'où celle-ci est tirée, on obtiendra

$$\frac{k^2\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = (C - x - \tfrac{1}{2}\Delta x)^2, \quad \frac{k^2\Delta x^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = (C' - y - \tfrac{1}{2}\Delta y)^2;$$

en ajoutant ces résultats il viendra

$$\begin{aligned} k^2 &= (C - x - \tfrac{1}{2}\Delta x)^2 + (C' - y - \tfrac{1}{2}\Delta y)^2 \\ &= C^2 + C'^2 - 2Cx - 2C'y + x^2 + y^2 \\ &\quad - (C - x)\Delta x - (C' - y)\Delta y + \tfrac{1}{4}\Delta x^2 + \tfrac{1}{4}\Delta y^2; \end{aligned}$$

mais par l'intégrale déjà obtenue, on a

$$-2Cx - 2C'y + x^2 + y^2 = C''$$

$$-2(C - x)\Delta x - 2(C - y)\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 = 0:$$

il restera donc seulement

$$k^2 = C^2 + C'^2 + C'' - \tfrac{1}{4}(\Delta x^2 + \Delta y^2),$$

résultat d'après lequel il est visible que la quantité $\Delta x^2 + \Delta y^2$ doit être constante, et que par conséquent les côtés du polygone cherché doivent être tous égaux.

Les termes $z\delta y$ et $u\delta x$ s'évanouissent d'eux-mêmes lorsque les points extrêmes du polygone sont donnés; mais dans le cas où la base seule seroit donnée, c'est-à-dire, où l'on auroit la dernière valeur de $x = a$, la première étant zéro, il faudroit, pour faire disparoître ces termes, prendre $u = 0$ et $z = 0$, lorsque $x = a$, ce qui, en vertu des équations

$$x - z_{,} = C, \quad u_{,} = C',$$

donneroit $C=a$, $C'=0$, et conduiroit à l'équation $x^2+y^2=C''^2$; appartenante au cercle dont le diamètre est la base même du polygone. Il est facile de conclure de là que *parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés et d'un même périmètre, c'est le polygone régulier inscrit au cercle qui renferme le plus d'aire.*

CHAPITRE II.

Théorie des suites, tirée de la considération de leurs Fonctions génératrices.

1033. LE Chapitre précédent a dû montrer que ce que le Calcul aux différences offroit de plus satisfaisant, consistoit principalement dans les formules d'interpolation, dans quelques séries générales pour l'intégration des fonctions d'une seule variable et dans l'intégration des équations du premier degré à coefficiens constans. Laplace, en 1779, parvint à tirer ces diverses théories d'une même source ; savoir, de la considération de ce qu'il appela les *Fonctions génératrices ;* sous ce nouveau point de vue elles présentent un ensemble aussi simple que lumineux, et constituent une nouvelle espèce de calcul qu'il est très-important de cultiver avec soin. Nous allons donc le faire connoître dans ce Chapitre, qui, pour être entendu, n'exigera, sur les différences et sur les intégrales, que les notions les plus simples, et pourra ainsi former un traité complet sur ces matières.

Des fonctions d'une seule variable.

Une série quelconque étant représentée comme il suit :

$$u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 \dots + y_x t^x + y_{x+1} t^{x+1}, \text{ etc.}$$

le second membre est le développement du premier, suivant les puissances de la variable t, u est la fonction génératrice de ce second membre; mais par ce qu'il est contenu implicitement dans son terme général $y_x t^x$, nous dirons que u est la *fonction génératrice* de y_x, qui sera le *coefficient* de t^x dans le développement de la fonction u.

Lorsque la série proposée procède comme ci-dessus, suivant les puissances entières de t, le théorême de Taylor donne sur le champ

$$y_x = \frac{1}{1.2.3\dots x} \frac{d^x u}{dt^x};$$

mais on peut varier d'une infinité de manières la forme du développement de la fonction u, et de là naît un *calcul direct* quand on veut

déterminer les coefficiens par le moyen des fonctions génératrices, et un *calcul inverse*, quand on veut remonter des coefficiens aux fonctions génératrices.

1034. La première question qui va nous occuper aura pour but de déduire du coefficient y_x relatif à la fonction génératrice u celui de quelques autres fonctions liées à celle-là d'une manière fort simple.

1°. Il est visible que le coefficient de t^x doit être égal à y_{x-1} dans ut, à y_{x-2} dans ut^2, et en général à y_{x-m} dans ut^m.

2°. Le même coefficient de t^x doit être égal à y_{x+1} dans le développement de $\frac{u}{t}$, à y_{x+2} dans celui de $\frac{u}{t^2}$, et en général à y_{x+n} dans celui de $\frac{u}{t^n}$.

D'après cela le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, ou $\frac{u}{t}-u$, est évidemment égal à $y_{x+1}-y_x$, ou à Δy_x; puis à cause que $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)$, on aura pour le coefficient de t^x dans le développement de cette dernière fonction, $\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$, ou $\Delta^2 y_x$, etc.

En continuant ainsi, on reconnoîtra sans peine que le coefficient de t^x, dans $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est égal à $\Delta^n y_x$.

Il suit de là aussi que $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est la fonction génératrice de $\Delta^n y_x$, et que $ut^m\left(\frac{1}{t}-1\right)^n$ est celle de $\Delta^n y_{x-m}$.

3°. Passons à la fonction plus générale

$$u\left(a+\frac{a'}{t}+\frac{a''}{t^2}\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{t^n}\right),$$

dans laquelle a, a', a'', ...$a^{(n)}$, représentent des constantes; le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction, que l'on peut mettre sous la forme

$$au+\frac{a'u}{t}+\frac{a''u}{t^2}\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}u}{t^n},$$

sera, d'après ce qui précède,

$$ay_x + a'y_{x+1} + a''y_{x+2} \dots + a^{(n)}y_{x+n};$$

comme cette dernière expression reviendra souvent, nous la désignerons par ∇y_x, et nous dirons que la fonction génératrice de ∇y_x

est $$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \dots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right):$$

composant avec ∇y_x l'expression

$$a\nabla y_x + a'\nabla y_{x+1} + a''\nabla y_{x+2} \dots + a''\nabla y_{x+n};$$

semblable à la précédente, et que nous désignerons par $\nabla^2 y_x$, elle aura pour fonction génératrice

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \dots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^2.$$

Il est aisé maintenant de poursuivre cette notation et d'en conclure que les fonctions génératrices des expressions $\nabla^3 y_x \dots \nabla^p y_x$, sont respectivement

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \dots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \dots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p.$$

4°. En combinant les résultats que nous venons d'obtenir, nous en conclurons que la fonction génératrice de l'expression $\Delta^i \nabla^p y_{x-m}$ est

$$u\,t^m\left(a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \dots + \frac{a^{(n)}}{t^n}\right)^p \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i.$$

1035. Il suit de là que rien n'est plus facile que d'obtenir le coefficient de t^x dans le développement de us^p, si s désigne une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$; il suffit pour cela de développer s^p suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, et représentant un terme quelconque de ce dernier développement par $\frac{K}{t^m}$, le terme affecté de t^x dans le produit $\frac{Ku}{t^m}$ aura pour coefficient celui de t^{x+m} dans u, multiplié par K,

ou Ky_{x+m}, ce qui revient à changer la puissance m de $\frac{1}{t}$ en y_{x+m}.
On voit par là qu'en écrivant dans s^p, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, et développant ensuite suivant les puissances de y_x, il n'y aura qu'à changer $(y_x)^0$ en y_x, $(y_x)^1$ en y_{x+1}, ... $(y_x)^m$ en y_{x+m}, pour avoir le développement de us^p; c'est ainsi qu'on formera celui de $\nabla^p y_x$, en prenant

$$s = a + \frac{a'}{t} + \frac{a''}{t^2} + \frac{a'''}{t^3} \ldots + \frac{a^{(n)}}{t^n}.$$

On introduira les différences de y_x au lieu des valeurs successives de cette fonction, si on développe s^p suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, en sorte qu'un terme quelconque $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$ de ce développement donne $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$; $K\Delta^m y_x$ sera le coefficient de t^x dans ce dernier, et puisqu'il faut substituer $\Delta^m y_x$ à $\left(\frac{1}{t}-1\right)^m$, il est visible qu'il suffit de changer d'abord $\frac{1}{t}-1$ en Δy_x, ou $\frac{1}{t}$ en $1+\Delta y_x$, puis de développer le résultat suivant les puissances de Δy_x, et d'écrire ensuite $\Delta^0 y_x$, ou y_x, au lieu de $(\Delta y_x)^0$, Δy_x au lieu de $(\Delta y_x)^1$, et en général $\Delta^m y_x$ au lieu de $(\Delta y_x)^m$.

1036. Le développement de $\Sigma^p y_x$ s'obtient avec la même facilité, en observant que s'il a z pour fonction génératrice, le coefficient y_x, qui revient à $\Delta^p.\Sigma^p y_x$, aura pour fonction génératrice $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$ (n°. précéd.), et que par conséquent il viendra

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^p = u, \text{ d'où } z = \frac{u}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^p} = u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-p},$$

en faisant abstraction des constantes arbitraires introduites par l'intégration; et il ne s'agira plus que de passer de la fonction génératrice au coefficient, d'après les préceptes donnés dans le n°. précédent.

Ce

Ce résultat rend évidente l'analogie des intégrales avec les puissances négatives, déjà remarquée dans le n°. 914; car il montre qu'on peut, en changeant seulement le signe de l'exposant p, passer de la fonction génératrice de $\Delta^p y_x$, égale à $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^p$, à celle de $\Sigma^p y_x$, égale à $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-p}$, et réciproquement.

Lorsqu'on veut tenir compte des constantes arbitraires, il faut ajouter à u les termes

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}\dots+\frac{F}{t^p},$$

dont le nombre est égal à l'exposant p, qui désigne l'ordre de l'intégrale.

1037. L'interpolation des suites n'est au fond que la manière de passer du terme y_x et de ceux qui le précèdent ou qui le suivent, à un terme y_{x+n}, dans lequel n représente un nombre quelconque; or y_{x+n} est évidemment le coefficient de t^x dans $\frac{u}{t^n}$: toutes les manières de développer $\frac{1}{t^n}$ doivent donc fournir des formules propres à l'interpolation. La plus simple consiste à mettre $\frac{1}{t}$ sous la forme $\left(1+\frac{1}{t}-1\right)$, à développer $\left\{1+\left(\frac{1}{t}-1\right)\right\}^n$, suivant les puissances de $\frac{1}{t}-1$, et à remplacer ces puissances par les différences correspondantes de y_x. On aura de cette manière

$$\frac{u}{t^n}=u\left\{1+\frac{n}{1}\left(\frac{1}{t}-1\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1}{t}-1\right)^3+\text{etc.}\right\},$$

et le coefficient de t^x dans le second membre de cette équation donnera

$$y_{x+n}=y_x+\frac{n}{1}\Delta y_x+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_x+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_x+\text{etc.}$$

résultat conforme à celui du n°. 873.

Si l'on fait $\frac{1}{t} = 1 + \alpha \frac{1}{t^r}$, et qu'on développe $\frac{1}{t^n}$ suivant les puissances de α, par le moyen du théorême du n°. 111, on trouvera

$$\frac{u}{t^n} = u\left\{1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n+2r-1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3}\alpha^3 + \frac{n(n+4r-1)(n+4r-2)(n+4r-3)}{1.2.3.4}\alpha^4 + \text{etc.}\right\}.$$

Mais de $\frac{1}{t} = 1 + \alpha \frac{1}{t^r}$, on tire $\alpha = t^r\left(\frac{1}{t} - 1\right)$, et puisque le coefficient de t^x est Δy_{x-r} dans $u\,\alpha$, $\Delta^2 y_{x-2r}$ dans $u\alpha^2$, et ainsi de suite (n°. 1034), on aura

$$y_{x+n} = y_x + \frac{n}{1}\Delta y_{x-r} + \frac{n(n+2r-1)}{1.2}\Delta^2 y_{x-2r} + \frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_{x-3r} + \frac{n(n+4r-1)(n+4r-2)(n+4r-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 y_{x-4r} + \text{etc.}$$

1038. Si l'on prend $t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = z$, et qu'on cherche la valeur de $\frac{1}{t^n}$ en z, on aura des formules analogues à celles des n°s. 879 et 880. Pour développer $\frac{1}{t^n}$ suivant les puissances de z, il faut observer que $\frac{1}{t^n}$ est le coefficient de α^n dans le développement de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{t}}$, puis chercher à introduire z au lieu de t, sans faire entrer dans le résultat les radicaux que donneroit l'équation proposée, entre t et z. Or en multipliant par $1 - \alpha t$ les deux termes de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{t}}$, on aura $\frac{1 - \alpha t}{1 - \alpha\left(\frac{1}{t} + t\right) + \alpha^2}$; et comme l'équation $t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = z$

donne $\frac{1}{t}+t=2+z$, il viendra $\frac{1-\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$; mais il est facile de voir que

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{\alpha z}{(1-\alpha)^4}+\frac{\alpha^2 z^2}{(1-\alpha)^6}+\frac{\alpha^3 z^3}{(1-\alpha)^8}+\text{etc.}$$

il reste à développer chacune des fractions du second membre de cette équation et à rassembler les quantités qui multiplient α^n dans le résultat final. Le coefficient de α^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^s}$ est $\frac{d^r.(1-\alpha)^{-s}}{1.2.3\ldots r d\alpha^r}$, en faisant $\alpha=0$, après les différentiations, ce qui donne

$$\frac{s(s+1)(s+2)\ldots\ldots(s+r-1)}{1.2.3\ldots\ldots r}.$$

Par cette formule le coefficient de α^n est

$$\frac{n+1}{1} \quad \text{dans } \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \quad \text{dans } \frac{\alpha}{(1-\alpha)^4}$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.5} \quad \text{dans } \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^6}$$

etc.

en nommant donc Z le coefficient de α^n, dans le développement de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, nous aurons

$$Z=\frac{n+1}{1}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}z+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.}$$

expression qu'il est facile de changer en

$$Z=\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{1.2.3}z+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4][(n+1)^2-9]}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.}$$

Si l'on y met $n-1$, au lieu de n, elle donnera le coefficient de α^n dans le développement de $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, savoir :

$$Z'=\frac{n}{1}+\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}z+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}z^2$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}z^3+\text{etc.}$$

mais il est évident que le coefficient de α^n, dans le développement de $\frac{1-\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, ou de $\frac{1}{(1-\alpha)^2-\alpha z}-\frac{\alpha t}{(1-\alpha)^2-\alpha z}$, est $Z-Z't$, et que par conséquent

$$\frac{u}{t^n}=u(Z-Z't);$$

la question proposée revient donc à chercher le coefficient de t^x dans le second membre de cette équation, celui de la même puissance de t dans le premier étant y_{x+n}. Or un terme quelconque de uZ pouvant être représenté par $Kuz^r=Kut^r\left(\frac{1}{t}-1\right)^{2r}$, donnera, d'après le n°. 1034, $K\Delta^{2r}y_{x-r}$, tandis qu'un terme quelconque de utZ', représenté par $Kutz^r$ donnera $K\Delta^{2r}y_{x-r-1}$; on aura donc

$$y_{x+n}=\frac{(n+1)}{1}y_x+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1]}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-1}$$
$$+\frac{(n+1)[(n+1)^2-1][(n+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-2}+\text{etc.}$$
$$-\frac{n}{1}y_{x-1}-\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\Delta^2 y_{x-2}$$
$$-\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^4 y_{x-3}-\text{etc.}$$

Nous déduirons de la valeur précédente de $\frac{1}{t^n}$ de nouvelles expressions de y_x, en y changeant n en $n-1$; car en désignant par Z'' ce que devient dans ce cas Z', qui représente ce que devient alors Z, nous transformerons l'équation

$$\frac{1}{t^n}=Z-Z't, \text{ en } \frac{1}{t^{n-1}}=Z'-Z''t;$$

de cette dernière nous tirerons $\frac{1}{t^n} = \frac{Z'}{t} - Z''$, et prenant la moitié de la somme des deux valeurs de $\frac{1}{t^n}$, nous aurons

$$\frac{1}{t^n} = \frac{1}{2} Z - \frac{1}{2} Z'' + \frac{1}{2}(1+t)\left(\frac{1}{t} - 1\right) Z'.$$

Mettons pour Z, Z' et Z'', leurs valeurs, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Z - \frac{1}{2} Z'' = & \frac{1}{2}\left\{\frac{n+1}{1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} z + \text{etc.}\right\} \\ & - \frac{1}{2}\left\{\frac{n-1}{1} + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3} z + \text{etc.}\right\} \\ & = 1 + \frac{n^2}{1.2} z + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4} z^2 + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6} z^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

puis chassant z, il viendra

$$\begin{aligned} \frac{u}{t^n} = & u\left\{1 + \frac{n^2}{1.2} t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4} t^2 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 \right. \\ & \left. + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6} t^3 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^6 + \text{etc.}\right\} \\ & + \frac{1}{2} u (1+t) \left\{\frac{n}{1}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} t \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 \right. \\ & \left. + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5} t^2 \left(\frac{1}{t} - 1\right)^5 + \text{etc.}\right\} \end{aligned}$$

et formant les coefficiens de t^x, pour chaque membre, d'après les règles du n°. 1034, on en conclura

$$\begin{aligned} y_{x+n} = & y_x + \frac{n^2}{1.2} \Delta^2 y_{x-1} + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4} \Delta^4 y_{x-2} \\ & + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5.6} \Delta^6 y_{x-3} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{2}\frac{n}{1}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n(n^2-1)}{1.2.3}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2}) \\ & + \frac{1}{2}\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

formule semblable à celle du n°. 879.

Si l'on en prend la différence en faisant varier n de l'unité, on aura

$$\Delta y_{x+n} = \frac{1}{2}(2n+1)\Delta^2 y_{x-1} + \frac{1}{2}\frac{(2n+1)(n+1)n}{1.2.3}\Delta^4 y_{x-2}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4.5}\Delta^6 y_{x-3} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{2}(\Delta y_x + \Delta y_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{1.2}(\Delta^3 y_{x-1} + \Delta^3 y_{x-2})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}(\Delta^5 y_{x-2} + \Delta^5 y_{x-3}) + \text{etc.}$$

écrivons maintenant y'_x au lieu de Δy_x, et $\frac{n'-1}{2}$ au lieu de n, nous changerons ce dernier résultat en

$$y_{x+\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{1}{2}(y'_x + y'_{x-1}) + \frac{1}{2}\frac{n'^2-1}{2.4}(\Delta^2 y'_{x-1} + \Delta^2 y'_{x-2})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n'^2-1)(n'^2-9)}{2.4.6.8}(\Delta^4 y'_{x-2} + \Delta^4 y'_{x-3}) + \text{etc.}$$
$$+\frac{n'}{2}\Delta y'_{x-1} + \frac{n'(n'^2-1)}{2.4.6}\Delta^3 y'_{x-2}$$
$$+\frac{n'(n'^2-1)(n'^2-9)}{2.4.6.8.10}\Delta^5 y'_{x-3} + \text{etc.}$$

formule qui rentre dans celle du n°. 880.

1039. Nous allons parvenir dans cet article à une formule d'interpolation, plus générale que toutes celles que nous avons données jusqu'ici, et qui s'étend à toutes les séries qui tendent sans cesse à devenir récurrentes. Soit

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n};$$

la question se réduit à trouver une expression de $\frac{1}{t^x}$, ordonnée sui-

vant les puissances de z, et qui ne contienne que des puissances de $\frac{1}{t}$ inférieures à $\frac{1}{t^m}$. La méthode qui s'offre la première est l'élimination des puissances $\frac{1}{t^m}$, $\frac{1}{t^{2m}}$, $\frac{1}{t^{3m}}$, etc. de $\frac{1}{t}$, suivant le procédé indiqué dans le n°. 1015; mais cette méthode devient impraticable lorsque le nombre n est un peu grand; et pour arriver à un développement général, il faut avoir recours à d'autres artifices analytiques. Voici celui que Laplace employe: en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$ par

$$(a-z)\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}\ldots\ldots+p\theta+q,$$

et substituant, dans le nouveau numérateur seulement, pour z sa valeur, il vient

$$\frac{b\theta^{m-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right)+c\theta^{m-2}\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right)+e\theta^{m-3}\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right)\ldots+q\left(1-\frac{\theta^m}{t^m}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right)(a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots\ldots+p\theta+q-z\theta^m)};$$

les deux termes de cette fraction étant divisés par $1-\frac{\theta}{t}$, elle prend la forme

$$\frac{\left.\begin{array}{r} b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots\ldots+p\theta+q \\ +\frac{\theta}{t}(c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots\ldots\ldots+p\theta+q) \\ +\frac{\theta^2}{t^2}(e\theta^{m-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+p\theta+q) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{q\theta^{m-1}}{t^{m-1}} \end{array}\right\}}{a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots\ldots+p\theta+q-z\theta^m}$$

Maintenant, la quantité $\frac{1}{t^n}$ pouvant être considérée comme le coefficient de θ^n dans le développement de $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$, sera aussi le coefficient de θ^n dans le développement de la fonction précédente, développement qui ne dépend que de celui de

$$\frac{1}{a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots+p\theta+q-\zeta\theta^m}.$$

Faisons pour abréger

$$a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}+e\theta^{m-3}\ldots+p\theta+q=V,$$

nous aurons

$$\frac{1}{V-\zeta\theta^m}=\frac{1}{V}+\frac{\zeta\theta^m}{V^2}+\frac{\zeta^2\theta^{2m}}{V^3}+\frac{\zeta^3\theta^{3m}}{V^4}+\text{etc.}$$

expression dans laquelle il reste à développer, suivant les puissances de θ, les quantités

$$\frac{1}{V},\quad \frac{1}{V^2},\quad \frac{1}{V^3},\quad \frac{1}{V^4},\ \text{etc.}$$

On y parviendra en décomposant la fraction $\frac{1}{V^i}$ en fractions simples suivant les procédés du n°. 368, et convertissant chacune de ces dernières en séries; alors si on désigne par $Z_{i-1,r}$, le coefficient de θ^r, formé par la réunion des termes correspondans de ces séries, les coefficiens de θ^n dans les quantités

$$\frac{1}{V},\quad \frac{\zeta\theta^m}{V^2},\quad \frac{\zeta^2\theta^{2m}}{V^3},\quad \frac{\zeta^3\theta^{3m}}{V^4},\ \text{etc,}$$

seront respectivement

$$Z_{0,n},\quad Z_{1,n-m}\zeta,\quad Z_{2,n-2m}\zeta^2,\quad Z_{3,n-3m}\zeta^3,\ \text{etc.}$$

le coefficient total de θ^n, dans le développement de $\frac{1}{V-\zeta\theta^m}$ sera donc

$$Z_{0,n}+Z_{1,n-m}\zeta+Z_{2,n-2m}\zeta^2+Z_{3,n-3m}\zeta^3+\text{etc.}$$

Substituant

Substituant cette série dans l'expression de $\frac{1}{t^n}$, on obtiendra

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n} = \quad & b Z_{0,\,n-m+1} + b\zeta Z_{1,\,n-2m+1} + b\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+1} \\
& \qquad + b\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+1} + \text{etc.} \\
+ \quad & c Z_{0,\,n-m+2} + c\zeta Z_{1,\,n-2m+2} + c\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+2} \\
& \qquad + b\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+2} + \text{etc.} \\
+ \quad & e Z_{0,\,n-m+3} + e\zeta Z_{1,\,n-2m+3} + e\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+3} \\
& \qquad + e\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+3} + \text{etc.} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{t} & \left\{ \begin{aligned} & c Z_{0,\,n-m+1} + c\zeta Z_{1,\,n-2m+1} + c\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+1} \\ & \qquad + c\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+1} + \text{etc.} \\ & + e Z_{0,\,n-m+2} + e\zeta Z_{1,\,n-2m+2} + e\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+2} \\ & \qquad + e\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+2} + \text{etc.} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \\
+ \frac{1}{t^2} & \left\{ \begin{aligned} & e Z_{0,\,n-m+1} + e\zeta Z_{1,\,n-2m+1} + e\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+1} \\ & \qquad + e\zeta^3 Z_{3,\,n-4m+1} + \text{etc.} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{1}{t^{n-1}} & \{ q Z_{0,\,n-m+1} + q\zeta Z_{1,\,n-m+1} + q\zeta^2 Z_{2,\,n-3m+1} + \text{etc.} \}
\end{aligned}$$

Les quantités

$$\begin{aligned}
& a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} \ldots\ldots + q y_{x+m} \\
& a\nabla y_x + b\nabla y_{x+1} + c\nabla y_{x+2} \ldots + q\nabla y_{x+m} \\
& a\nabla^2 y_x + b\nabla^2 y_{x+1} + c\nabla^2 y_{x+2} \ldots + q\nabla^2 y_{x+m} \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

ont été désignées respectivement par ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, $\nabla^3 y_x$, etc. dans le n°. 1034, et il suit aussi de ce n°. que le coefficient de t^x, dans la fonction $\frac{u\zeta^r}{t^r}$, est $\nabla^r y_{x+r}$; si donc on multiplie par u l'expression de $\frac{1}{t^n}$, trouvée ci-dessus, on aura celle de $\frac{u}{t^n}$, fonction génératrice de y_{x+n}, et prenant les coefficiens du second membre,

suivant la remarque que nous venons de faire, on en déduira cette formule

$$\begin{aligned}
y_{x+n} = {} & y_x\{bZ_{0,n-m+1} + cZ_{0,n-m+2} + eZ_{0,n-m+3} \ldots + qZ_{0,n}\} \\
& + \nabla y_x\{bZ_{1,n-2m+1} + cZ_{1,n-2m+2} + eZ_{1,n-2m+3} \ldots + qZ_{1,n-m}\} \\
& + \nabla^2 y_x\{bZ_{2,n-3m+1} + cZ_{2,n-3m+2} + eZ_{2,n-3m+3} \ldots + qZ_{2,n-2}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_{x+1}\{cZ_{0,n-m+1} + eZ_{0,n-m+2} \ldots + qZ_{0,n-1}\} \\
& + \nabla y_{x+1}\{cZ_{1,n-2m+1} + eZ_{1,n-2m+2} \ldots + qZ_{1,n-m-1}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_{x+2}\{eZ_{0,n-m+1} \ldots + qZ_{0,n-2}\} \\
& + \nabla y_{x+2}\{eZ_{1,n-2m+1} \ldots + qZ_{1,n-m-2}\} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + qy_{x+m-1}Z_{0,n-m+1} + q\nabla y_{x+m-1}Z_{1,n-2m+1} \\
& \qquad + q\nabla^2 y_{x+m-1}Z_{2,n-3m+1} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Les diverses séries dont cette expression est composée, étant ordonnées suivant les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x \ldots \nabla y_{x+1}$, $\nabla^2 y_{x+1}$, etc. sont convergentes toutes les fois que ces quantités vont en décroissant à mesure que l'exposant de leur caractéristique augmente; on en tirera par conséquent des valeurs de y_{x+n}, qui seront d'autant plus approchées que la convergence sera rapide: ces valeurs seroient entièrement exactes si l'on avoit $\nabla^r y_x = 0$, puisqu'alors chacune des séries qui les forment ne renfermeroit qu'un nombre de termes limité.

L'équation $\Delta^r y_x = 0$ développée, revenant à

$$a\nabla^{r-1}y_x + b\nabla^{r-1}y_{x+1} + c\nabla^{r-1}y_{x+2} \ldots + q\nabla^{r-1}y_{x+m} = 0,$$

appartient à une série récurrente dont le terme général seroit exprimé par $\nabla^{r-1}y_x$ (n°. 983), ce qui fait voir que la formule d'interpolation obtenue ci-dessus, donnera l'expression du terme général de toutes les séries qui, par des combinaisons d'un nombre m de termes, effectuées d'après les formules ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, etc. conduiront enfin à une série récurrente.

Si l'on avoit simplement $\nabla y_x = 0$, ou

$$ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots + qy_{x+m} = 0,$$

on en concluroit

$$ay_n + by_{n+1} + cy_{n+2} \ldots + qy_{n+m} = 0,$$

en changeant x en n; et faisant $x=0$ dans la valeur de y_{x+n}, il en résulteroit

$$\begin{aligned}y_n = y_0\{&bZ_{0,n-m+1}+cZ_{0,n-m+2}+eZ_{0,n-m+3}\ldots+qZ_{0,n}\}\\ +y_1\{&cZ_{0,n-m+1}+eZ_{0,n-m+2}\ldots+qZ_{0,n-1}\}\\ +y_2\{&eZ_{0,n-m+1}\ldots\ldots+qZ_{0,n-2}\}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +q&y_{m-1}Z_{0,n-m+1}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression offre l'intégrale complète de l'équation aux différences posée précédemment; y_0, y_1, $y_2 \ldots y_{m-1}$ en sont les constantes arbitraires.

Si l'on se proposoit l'équation $\nabla^2 y_x = 0$, la formule générale donneroit pour ce cas un résultat dans lequel entreroient comme arbitraires, les quantités y_0, ∇y_0, y_1, $\nabla y_1 \ldots y_{m-1}$, Δy_{m-1} : leur nombre est égal à $2m$, parce que l'équation $\nabla^2 y_x=0$ monte à l'ordre marqué par $2m$; car son développement est

$$\left.\begin{aligned}a\{&ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}\ldots\ldots+qy_{x+m}\}\\ +b\{&ay_{x+1}+by_{x+2}+cy_{x+3}\ldots\ldots+qy_{x+m+1}\}\\ +c\{&ay_{x+2}+by_{x+3}+cy_{x+4}\ldots\ldots+qy_{x+m+2}\}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +q\{&ay_{x+m}+by_{x+m+1}+cy_{x+m+2}\ldots+qy_{x+2m}\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Il en seroit de même des équations plus élevées $\nabla^3 y_x=0$, $\nabla^4 y_x=0$, etc.

1040. On parviendroit encore par les formules précédentes à l'intégrale de l'équation $\nabla^n y_x + X_x = 0$, dans laquelle X_x désigne une fonction quelconque de x, en faisant $y_x = y'_x + y''_x$. La fonction génératrice u deviendra dans cette hypothèse $u=u'+u''$, u' et u'' représentant les fonctions génératrices de y'_x et de y''_x; supposons que $u''\zeta' = \lambda$, et que X_{x+n} soit le coefficient de t^{x+n} dans le développement de λ, nous aurons (n°. 1034) $X_{x+n} = \nabla^i y''_{x+n}$; mais

$$\frac{1}{\zeta'} = \frac{t^{mi}}{(at^m+bt^{m-1}+ct^{m-2}\ldots+q)^i},$$

et le coefficient de t^{x+n}, dans le développement de cette fonction, sera évidemment le même que celui de θ^{x+n-mi} dans celui de

$$\frac{1}{(a\theta^m+b\theta^{m-1}+c\theta^{m-2}\ldots+q)^i}, \text{ ou de } \frac{1}{V^i},$$

coefficient qui, d'après le n°. préced. sera désigné par $Z_{s-1,\,x+n-ms}$.
Il suit de là que y''_x, coefficient de t^{x+n} dans u'', ou dans $\frac{\lambda}{\zeta'}$, sera

$$X_{x+n-ms} Z_{s-1,\,0} + X_{x+ms-1} Z_{s-1,\,1} \ldots + X_0 Z_{s-1,\,x+n-ms},$$

et reviendra par conséquent à $\Sigma X_r Z_{x+n-ms-r}$, en prenant l'intégrale depuis $r=0$, jusqu'à $r=x+n-ms$; maintenant si l'on écrit dans l'expression générale de y_{x+n} du n°. précédent, y'_{x+n}, puis qu'on fasse $x=0$, et qu'on mette pour y''_n sa valeur $\Sigma X_r Z_{s-1,\,n-m-r}$, on aura

$$y'_n + \Sigma X_r Z_{s-1,\,n-ms-r} =$$

$$\begin{cases} y_0\{bZ_{0,\,n-m+1} + cZ_{0,\,n-m+2} \ldots\ldots + qZ_{0,\,n}\} \\ + \nabla y_0\{bZ_{1,\,n-2m+1} + cZ_{0,\,n-2m+2} \ldots\ldots + qZ_{1,\,n-m}\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} y_0\{bZ_{s-1,\,n-sm+1} + cZ_{s-1,\,n-sm+2} \ldots + qZ_{s-1,\,n-sm+m}\} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y_1\{cZ_{0,\,n-m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + qZ_{0,\,n-1}\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} y_1\{cZ_{s-1,\,n-sm+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + qZ_{s-1,\,n-sm+m-1}\}. \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q y_{m-1} Z_{0,\,n-m+1} + q\nabla y_{m-1} Z_{1,\,n-2m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + q\nabla^{s-1} y_{m-1} Z_{s-1,\,n-sm+1}.$$

Cette série s'arrêtera toutes les fois qu'on aura $\nabla^s y_n = 0$, ou $\nabla^s y'_n + \nabla^s y''_n = 0$, ou enfin $\nabla^s y'_n + X_n = 0$: elle donnera alors l'intégrale de cette dernière équation; et les quantités y_0, ∇y_0, ... y_1, Δy_1, ... etc. tiendront lieu des constantes arbitraires.

1041. Tout ce qui précède repose sur le développement en série de la fonction $\frac{1}{V'}$ (n°. 109), recherche qui renferme implicitement celle du terme général d'une suite récurrente, c'est pourquoi nous allons nous en occuper en détail. Nous prendrons, au lieu de la fraction $\frac{1}{V'}$, la fraction $\frac{U}{V}$, U et V étant des fonctions rationnelles et entières de x, l'une du degré $s-1$, l'autre du degré s. Sup-

posant que $V = Q(x-a)^n$, nous aurons, par le n°. 369,

$$\frac{U}{V} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{P}{Q},$$

et les constantes $A, A_1, \ldots A_{n-1}$, seront données par les équations

$$A = \frac{u}{q}$$

$$A_1 = \frac{1}{1.dx} d.\frac{U}{Q}$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2.dx^2} d^2.\frac{U}{Q}$$

. . . .

$$A_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)dx^{n-1}} d^{n-1}.\frac{U}{Q},$$

u et q étant ce que deviennent U et Q, lorsqu'on y change x en a; et il faut observer aussi de faire la même substitution dans

$$\frac{1}{dx}d.\frac{U}{Q}, \quad \frac{1}{dx^2}d^2.\frac{U}{Q}, \ldots \frac{1}{dx^{n-1}} d^{n-1}.\frac{U}{Q}.$$

Le coefficient de x^r, dans le développement de $\frac{A}{(x-a)^n}$, ordonné suivant les puissances positives de x, sera

$$\mp \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1.2.3\ldots r} \frac{A}{a^{n+r}},$$

dans celui de $\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}$ sera

$$\pm \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+r-2)}{1.2.3\ldots r} \frac{A_1}{a^{n+r-1}},$$

dans celui de $\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}$ sera

$$\mp \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\ldots(n+r-3)}{1.2.3\ldots r} \frac{A_2}{a^{n+r-2}}$$

etc.

en réunissant ces diverses parties, et faisant usage de la notation

du n°. 902, il viendra

$$\overset{-r}{[0]}\left\{\mp[n+r-1]^{r}\frac{A}{a^{n+r}}\pm[n+r-2]^{r}\frac{A_1}{a^{n+r-1}}\mp[n+r-3]^{r}\frac{A_2}{a^{n+r-2}}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-[r]^{r}\frac{A_{n-1}}{a^{r+1}}\right\}.$$

Mettant pour les numérateurs A, A_1, ... A_{n-1}, leurs valeurs, on aura

$$\overset{-r}{[0]}\left\{\mp\frac{[n+r-1]^{r}}{a^{n+r}}\frac{u}{q}\pm\frac{[n+r-2]^{r}\,\overset{-1}{[0]}}{a^{n+r-1}}d\frac{U}{Q}\mp\frac{[n+r-3]^{r}\,\overset{-2}{[0]}}{a^{n+r-2}}d^2.\frac{U}{Q}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{[r]^{r}\,\overset{-n+1}{[0]}}{a^{r+1}}d^{n-1}.\frac{U}{Q}\right\},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\overset{-n+1}{[0]}\left\{\mp\frac{[n+r-1]^{n-1}}{a^{n+r}}\frac{u}{q}\pm\frac{[n+r-2]^{n-2}}{a^{n+r-1}}d\frac{U}{Q}\mp\frac{[n+r-3]^{n-3}}{a^{n+r-2}}d^2.\frac{U}{Q}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\frac{[1]^{1}}{a^{r+1}}d^{n-1}.\frac{U}{Q}\right\},$$

en observant, pour le premier terme, que

$$\overset{-r}{[0]}[n+r-1]^{r}=\frac{[n+r-1]^{n+r-1}}{[r]^{r}[n-1]^{n-1}}=\frac{[n+r-1]^{n-1}}{[n-1]^{n-1}}=[n+r-1]^{n-1}\,\overset{-n+1}{[0]},$$

pour le second, que

$$\overset{-r}{[0]}[n+r-2]^{r}\overset{-1}{[0]}=\frac{\overset{-1}{[0]}\,[n+r-2]^{n+r-2}}{[r]^{r}[n-2]^{n-2}}=\overset{-1}{[0]}[n-1]^{1}\frac{[n+r-2]^{n-2}}{[n-1]^{n-1}}=\overset{-1}{[0]}[n-1]^{1}[n+r-2]^{n-2}\,\overset{-n+1}{[0]},$$

et de même des termes suivans. Cela posé, puisque

$\frac{[n+r-1]^{n-1}}{x^{n+r}}=\pm\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{1}{x^{r+1}}$, il est visible que le développement

ci-dessus revient à

$$-\overset{-n+1}{[0]}\frac{1}{dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{U}{Qx^{r+1}}\text{ (n°. 107)},$$

pourvu qu'après les différentiations on change x en a. Voilà donc une expression fort simple du coefficient de x^r dans la partie du développement $\frac{U}{V}$, qui résulte du facteur $(x-a)^n$ de son dénominateur. Si l'on suppose que ce dénominateur se décompose dans les facteurs $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc. on obtiendra de semblables expressions pour les parties résultantes des facteurs $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, etc. et le terme général du développement de la fraction rationnelle de $\frac{U}{V}$, ordonné suivant les puissances positives de x, sera par conséquent

$$\overset{-n+1}{-[0]}\frac{1}{dx^{n-1}}\,d^{n-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-b)^p(x-c)^q\ldots\ldots}$$
$$\overset{-p+1}{-[0]}\frac{1}{dx^{p-1}}\,d^{p-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-a)^n(x-c)^q\ldots\ldots}$$
$$\overset{-q+1}{-[0]}\frac{1}{dx^{q-1}}\,d^{q-1}.\frac{U}{x^{r+1}(x-a)^n(x-b)^p\ldots\ldots}$$

etc.

pourvu qu'après les différentiations on substitue, au lieu de x, a dans la première ligne, b dans la seconde, c dans la troisième, etc.

Quand même les quantités a, b, c, etc. seroient imaginaires, on n'en parviendroit pas moins au terme général demandé: il contiendroit à la vérité des expressions imaginaires; mais on s'en débarrasseroit en combinant convenablement les termes fournis par un même couple de facteurs imaginaires.

1042. En appliquant ce qui précède à la fonction

$$\frac{1}{a\theta^n+b\theta^{n-1}+c\theta^{n-2}\ldots+p\theta+q}$$

du n°. 1039, il faut supposer que

$$a\theta^n+b\theta^{n-1}+c\theta^{n-2}\ldots\ldots+pa+q=a(\theta-\alpha)(\theta-\beta)(\theta-\gamma),\ \text{etc.}$$

et prenant

$$\frac{1}{V'}=\frac{1}{a'(\theta-\alpha)^r(\theta-\beta)^r(\theta-\gamma)^r\ \text{etc.}},$$

le coefficient de θ^r, ou $Z_{r-1,r}$, aura pour expression

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(s-1)a^s d\theta^{s-1}}d^{s-1}\begin{cases}+\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\beta)^s(\theta-\gamma)^s, \text{ etc.}}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\gamma)^s, \text{ etc.}}\\ +\dfrac{1}{\theta^{r+1}(\theta-\alpha)^s(\theta-\beta)^s, \text{ etc.}}\\ + \text{etc.}\end{cases}$$

en observant de faire, après la différentiation, $\theta=\alpha$ dans la première ligne, $\theta=\beta$ dans la seconde, $\theta=\gamma$ dans la troisième, et ainsi de suite.

1043. La méthode que nous venons d'exposer, pour parvenir au terme général d'une suite récurrente, exige la décomposition du dénominateur de la fraction génératrice, en facteurs, décomposition qui dépend de la résolution des équations. Lagrange en a donné une qui ne présente point cette difficulté et qui conduit immédiatement au terme général de la série engendrée par le développement d'une fraction rationnelle quelconque, la voici :

Si l'on fait pour abréger

$$\varphi(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{etc.}$$
$$\psi(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\text{etc.}$$

les seconds membres de ces équations étant terminés, la fraction $\frac{\varphi(x)}{u-x+\psi(x)}$ pourra représenter une fraction rationnelle quelconque. En la développant d'abord suivant les puissances de $\psi(x)$, on trouve

$$\frac{\varphi(x)}{u-x}-\frac{\varphi(x)\psi(x)}{(u-x)^2}+\frac{\varphi(x)\psi(x)^2}{(u-x)^3}-\text{etc.}$$

et pour arriver au dernier développement il faut obtenir en particulier celui de chacune des fractions

$$\frac{1}{u-x},\quad \frac{1}{(u-x)^2},\quad \frac{1}{(u-x)^3}, \text{ etc.}$$

On peut les tirer de la formule du binome ; mais on les dérive successivement

successivement les unes des autres, en observant que

$$\frac{1}{u-x}=\frac{1}{u}+\frac{x}{u^2}+\frac{x^2}{u^3}+\frac{x^3}{u^4}\ldots+\frac{x^n}{u^{n+1}}+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{dx}d\frac{1}{u-x}=\frac{1}{(u-x)^2}=\frac{1}{u^2}+\frac{2x}{u^3}+\frac{3x^2}{u^4}\ldots+\frac{(n+1)x^n}{u^{n+2}}+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{2dx^2}d^2\frac{1}{u-x}=\frac{1}{(u-x)^3}=\frac{2}{2u^3}+\frac{2.3x}{2u^4}\ldots+\frac{(n+1)(n+2)x^n}{2u^{n+3}}+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{2.3dx^3}d^3\frac{1}{u-x}=\frac{1}{(u-x)^4}=\frac{2.3}{2.3u^4}+\frac{2.3.4x}{2.3u^5}\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{2.3u^{n+4}}+\text{etc.}$$

etc.

Cela posé, la fraction $\frac{\varphi(x)}{u-x}$ fournira dans le terme général la partie

$$\frac{A_0x^n}{u^{n+1}}+\frac{A_1x^n}{u^n}+\frac{A_2x^n}{u^{n-1}}+\frac{A_3x^n}{u^{n-2}}\ldots+\frac{A_nx^n}{u},$$

qui s'arrête au terme divisé par la première puissance de u; cette partie étant réduite au même dénominateur, devient

$$\frac{A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3\ldots+A_nu^n}{u^{n+1}}x^n,$$

et revient par conséquent à $\frac{\varphi(u)}{u^{n+1}}x^n$, pourvu que l'on borne le développement aux termes dans lesquels u est affecté d'un exposant négatif. Cette conséquence subsisteroit encore quand on écriroit $\varphi(u)\psi(u)$, au lieu de $\varphi(u)$, puisque ce produit est de la même forme que $\varphi(u)$; ainsi le terme général du développement de $\frac{\varphi(x)\psi(x)}{u-x}$ seroit encore exprimé par $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^{n+1}}x^n$, dans les mêmes conditions que ci-dessus.

Si maintenant on différentie par rapport à u, l'expression $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^{n+1}}$, on aura le coefficient de x^n dans la différentielle de la fonction $\frac{\varphi(x)\psi(x)}{u-x}$, prise de même par rapport à u; or cette dernière est $-\frac{\varphi(x)\psi(x)}{(u-x)^2}du$: il est donc évident que $\frac{1}{du}d\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^{n+1}}$ est le

coefficient de x^n dans le développement de la fonction $-\frac{\varphi(x)\psi(x)}{(u-x)^2}$, en observant toujours de ne prendre que les termes dans lesquels u a un exposant négatif.

Par les mêmes raisons, le coefficient de x^n, dans le développement de $\frac{\varphi(x)\psi(x)^2}{u-x}$, seroit $\frac{\varphi(u)\psi(u)^2}{u^{n+1}}$; et différentiant deux fois par rapport à u, chacune de ces fonctions, le résultat fourni par la seconde donnera le coefficient de x^n dans le développement de celui qu'on tire de la première : en effectuant le calcul, on trouvera

$$\frac{2\varphi(x)\psi(x)^2}{(u-x)^3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{du^2}\, d^2\, \frac{\varphi(u)\psi(u)^2}{u^{n+1}},$$

et divisant par 2, on en conclura que l'assemblage des termes de l'expression $\frac{1}{2du^2}\, d^2\, \frac{\varphi(u)\psi(u)^2}{u^{n+1}}$, dans lesquels u a un exposant négatif, forme le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{\varphi(x)\psi(x)^2}{(u-x)^3}$.

On prouveroit de la même manière que le coefficient de x^n, dans le développement de la fonction $-\frac{\varphi(x)\psi(x)^3}{(u-x)^4}$ est

$$\frac{1}{2.3du^3}\, d^3\, \frac{\varphi(u)\psi(u)^3}{u^{n+1}},$$

et ainsi de suite, en sorte que le terme général du développement de $\frac{\varphi(x)}{u-x+\psi(x)}$ sera

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varphi(u)}{u^{n+1}} + \frac{1}{du}\, d\, \frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^{n+1}} + \frac{1}{1.2du^2}\, d^2\, \frac{\varphi(u)\psi(u)^2}{u^{n+1}} \\ \quad + \frac{1}{1.2.3du^3}\, d^3\, \frac{\varphi(u)\psi(u)^3}{u^{n+1}} + \text{etc.} \end{array}\right\} x^n,$$

en se bornant aux termes où l'exposant de u est négatif.

Il est visible que les différentielles successives de cette expression, relatives à u, correspondent à celles de la fonction $\frac{\varphi(x)}{u-x+\psi(x)}$,

prises dans la même hypothèse ; et l'on en déduit par conséquent par de simples différentiations, le coefficient de x^n dans les développemens des fonctions

$$\frac{\varphi(x)}{(u-x+\psi(x))^2},\quad \frac{\varphi(x)}{(u-x+\psi(x))^3},\quad \frac{\varphi(x)}{(u-x+\psi(x))^4},\ \text{etc.}$$

1044. Nous allons appliquer cette formule à la fraction

$$\frac{P+Qx}{1-2x\cos\omega+x^2}:$$

donnons-lui la forme

$$\frac{1}{2\cos\omega}\cdot\frac{P+Qx}{\frac{1}{2\cos\omega}-x+\frac{1}{2\cos\omega}x^2},$$

nous aurons

$$\varphi(x)=P+Qx,\quad \psi(x)=\frac{x^2}{2\cos\omega},\quad u=\frac{1}{2\cos\omega},$$

d'où nous déduirons

$$\varphi(u)=P+Qu;$$

$$\psi(u)=\frac{u^2}{2\cos\omega},\quad \psi(u)^2=\frac{u^4}{4\cos\omega^2},\quad \psi(u)^3=\frac{u^6}{8\cos\omega^3},\ \text{etc.}$$

$$\frac{\varphi(u)}{u^{n+1}}=Pu^{-n-1}+Qu^{-n},$$

$$\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^{n+1}}=\frac{Pu^{-n+1}}{2\cos\omega}+\frac{Qu^{-n+2}}{2\cos\omega},$$

$$\frac{\varphi(u)\psi(u)^2}{u^{n+1}}=\frac{Pu^{-n+3}}{4\cos\omega^2}+\frac{Qu^{-n+4}}{4\cos\omega^2},$$

etc.

passant aux coefficiens différentiels, pour les substituer dans la formule générale que nous diviserons par $2\cos\omega$, nous obtiendrons

$$P\left\{\frac{u^{-n-1}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\}$$
$$+\,Q\left\{\frac{u^{-n}}{2\cos\omega}-\frac{(n-2)u^{-n+1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-4)(n-3)u^{-n+2}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\};$$

mettant au lieu de u sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$, nous parviendrons à

$$P\left\{(2\cos\omega)^{n}-\frac{(n-1)}{1}(2\cos\omega)^{n-2}+\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-4}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{1.2.3}(2\cos\omega)^{n-6}+\text{etc.}\right\}$$
$$+Q\left\{(2\cos\omega)^{n-1}-\frac{(n-2)}{1}(2\cos\omega)^{n-3}+\frac{(n-4)(n-3)}{1.2}(2\cos\omega)^{n-5}\right.$$
$$\left.-\frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{1.2.3}(2\cos\omega)^{n-7}+\text{etc.}\right\},$$

expression qui ne doit point contenir de puissances négatives de $\cos\omega$, puisque la précédente ne devoit point contenir de puissances positives de u. On la simplifie beaucoup en la comparant avec la formule

$$\sin n z=\sin z\left\{2^{n-1}\cos z^{n-1}-\frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos z^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos z^{n-5}\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos z^{n-7}+\text{etc.}\right\},$$

obtenue dans le n°. 985; car on voit alors que la série qui multiplie P n'est autre chose que le développement de $\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}$, et que celle qui multiplie Q répond à $\frac{\sin n\omega}{\sin\omega}$: on a donc pour le terme général du développement de la fraction $\frac{P+Qx}{1-2x\cos\omega+x^2}$, cette expression très-simple

$$\left\{P\frac{\sin(n+1)\omega}{\sin\omega}+Q\frac{\sin n\omega}{\sin\omega}\right\}x^{n},$$

qu'Euler a donnée le premier dans son introduction à l'analyse de l'infini.

La formule générale s'applique également aux fractions

$$\frac{P+Qx}{(1-2x\cos\omega+x^2)^2},\qquad\frac{P+Qx}{(1-2x\cos\omega+x^2)^3}+\text{etc.}$$

on trouvera pour la première,

$$P\left\{\frac{(n+1)u^{-n-2}}{2\cos\omega}-\frac{(n-1)nu^{-n-1}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)u^{-n}}{2(\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\}$$
$$+Q\left\{\frac{nu^{-n-1}}{2\cos\omega}-\frac{(n-2)(n-1)u^{-n}}{(2\cos\omega)^2}+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)u^{-n+1}}{2(2\cos\omega)^3}-\text{etc.}\right\},$$

et mettant pour u sa valeur $\frac{1}{2\cos\omega}$, il viendra

$$\begin{aligned} P\{ &(n+1)(2\cos\omega)^{n+1}-(n-1)n(2\cos\omega)^{n-1} \\ &+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2}(2\cos\omega)^{n-3}-\text{etc.}\} \\ +Q\{ &n(2\cos\omega)^{n}-(n-2)(n-1)(2\cos\omega)^{n-2} \\ &+\frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2}(2\cos\omega)^{n-4}-\text{etc.}\}, \end{aligned}$$

en observant de ne faire entrer dans cette expression aucune des puissances négatives de $\cos\omega$.

Nous ne pousserons pas plus loin les applications de la formule du n°. précéd. nous observerons qu'elle exige le développement des puissances de la fonction

$$\psi(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\text{etc.}$$

lequel donnera lui-même celui de la fraction rationnelle

$$\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3\ldots\ldots+A_{n-1}x^{n-1}}{B^0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3\ldots\ldots+B_nx^n},$$

en la mettant sous la forme

$$(A_0+A_1x\ldots+A_{n-1})(B_0+B_1x\ldots+B_nx^n)^{-1};$$

nous avons trouvé dans le n°. 98, les équations, d'après lesquelles on peut calculer successivement les coefficiens des diverses puissances de x, dans le développement de la formule

$$(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.})^m;$$

mais pour en rendre l'application plus facile, il auroit fallu donner l'expression immédiate de ses coefficiens: tel a été l'objet récent des travaux de plusieurs analystes Allemands, MM. Hindenburg, Pfaff, Maurice de Prasse, dont nous avons cité les ouvrages dans la table. L'exposition de leurs recherches nous entraîneroit trop loin ; il nous suffira de dire qu'elles reposent sur le Calcul des combinaisons, appliqué aux indices qui marquent le rang de chaque coefficient, Calcul dont Leibnitz avoit prévu l'utilité, et dont il a donné un essai dans les *Acta eruditorum* de l'année 1700, à la fin d'une réponse à quelques

imputations de Fatio de Duillier (voyez aussi ses œuvres, tome III, page 365).

1045. Reprenons le Calcul des Fonctions génératrices. Laplace donne encore au développement de $\frac{1}{t^n}$ une nouvelle forme qui le conduit à une formule d'interpolation dépendante à la fois des différences et des fonctions désignées par la caractéristique ∇; mais forcés par l'abondance des matières d'omettre plusieurs détails intéressans, nous renvoyons pour ceux-ci au Mémoire même d'où ce qui précède est tiré, et nous allons passer à l'usage des fonctions génératrices dans la *transformation* des suites.

Toute suite n'étant autre chose qu'un développement de la fonction Σy_x prise depuis $x=0$, jusqu'à x infini, il est évident que les diverses manières d'exprimer ce développement fourniront des suites équivalentes, ou des transformées de la même suite. Soit la suite

$$y_0+y_1+y_2\ldots\ldots+y_x+y_{x+1}+\text{etc.}$$

et faisons

$$u=y_0+y_1t+y_2t^2\ldots\ldots+y_xt^x+y_{x+1}t^{x+1}+\text{etc.}$$

il suit du n°. 1036, que le coefficient de t^x, dans la fonction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$, exprimera la somme des termes de la suite proposée depuis y_x inclusivement, jusqu'à l'infini. En multipliant les deux termes de cette fraction par

$$a+b+c+e+\text{etc.}\ldots\ldots-(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}+\text{etc.}),$$

on rend le numérateur divisible par $1-\frac{1}{t}$, et il se change en

$$u\left\{\begin{array}{l}b+c+e+\text{etc.}\\+\frac{1}{t}(c+e+\text{etc.})+\frac{1}{t^2}(e+\text{etc.})+\text{etc.}\end{array}\right\};$$

puis posant

$$a+b+c+e+\text{etc.}=K$$

$$a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}+\text{etc.}=\zeta,$$

on aura

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}}=\frac{b+c+e+\text{etc.}+\frac{1}{t}(c+e+\text{etc.})+\frac{1}{t^2}(e+\text{etc.})+\text{etc.}}{K-z}\,u\,,$$

équation dont le second membre développé par rapport à z prend cette forme

$$u\left\{\begin{array}{l} b+c+e+\text{etc.}\\ +\frac{1}{t}(c+e+\text{etc.})\\ +\frac{1}{t^2}(e+\text{etc.})\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}\left\{\frac{1}{K}+\frac{z}{K^2}+\frac{z^2}{K^3}+\frac{z^3}{K^4}+\text{etc.}\right\}$$

mais le coefficient de t^x dans $\frac{uz^i}{t^r}$ étant égal à $\Delta^i y_{x+r}$ (n°. 1034), le même coefficient dans le développement de la formule ci-dessus, sera

$$\begin{array}{l} (b+c+e+\text{etc.})\left\{\frac{y_x}{K}+\frac{\nabla y_x}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_x}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_x}{K^4}+\text{etc.}\right\}\\ +\quad (c+e+\text{etc.})\left\{\frac{y_{x+1}}{K}+\frac{\nabla y_{x+1}}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_{x+1}}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_{x+1}}{K^4}+\text{etc.}\right\}\\ +\quad (e+\text{etc.})\left\{\frac{y_{x+2}}{K}+\frac{\nabla y_{x+2}}{K^2}+\frac{\nabla^2 y_{x+2}}{K^3}+\frac{\nabla^3 y_{x+2}}{K^4}+\text{etc.}\right\}\\ +\text{etc.}\end{array}$$

Cette nouvelle série équivalente à la proposée, depuis y_x jusqu'à l'infini, deviendra convergente si les quantités ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, etc. vont en décroissant; elle s'arrêtera même si l'on a $\nabla^i y_x=0$, et donnera alors la somme des suites récurrentes. En faisant $x=0$, on transformeroit la série proposée à partir de son origine.

En général, si z représente une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, et que l'on désigne par ∇y_x, $\nabla^2 y_x$, $\nabla^3 y_x$, etc. les coefficiens de t^x dans uz, uz^2, uz^3, etc. on parviendra à ordonner, suivant les puissances de z, le développement de $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$, en multipliant les

deux termes de cette fraction par $K-z$, K étant une quantité égale à ce que devient z lorsque $t=1$, afin que $K-z$ soit divisible par $1-\frac{1}{t}$. Représentons par

$$q+\frac{q'}{t}+\frac{q''}{t^2}+\frac{q'''}{t^3}+\text{etc.}$$

le quotient de la division, et nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{u}{1-\frac{1}{t}}=&\frac{uq}{K}\left(1+\frac{z}{K}+\frac{z^2}{K^2}+\frac{z^3}{K^3}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{uq'}{Kt}\left(1+\frac{z}{K}+\frac{z^2}{K^2}+\frac{z^3}{K^3}+\text{etc.}\right)\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

et passant des fonctions génératrices aux coefficiens, suivant la convention établie ci-dessus, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\Sigma y_x=&\frac{qy_x}{K}+\frac{q\nabla y_x}{K^2}+\frac{q\nabla^2 y_x}{K^3}+\text{etc.}\\&+\frac{q'y_{x+1}}{K}+\frac{q'\nabla y_{x+1}}{K^2}+\frac{q'\nabla^2 y_{x+1}}{K^3}+\text{etc.}\\&+\frac{q''y_{x+2}}{K}+\frac{q''\nabla y_{x+2}}{K^2}+\frac{q''\nabla^2 y_{x+2}}{K^3}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

Pour avoir toute la série, c'est-à-dire, l'intégrale Σy_x, prise depuis $x=0$, jusqu'à x infini, il faut faire dans la formule ci-dessus $x=0$.

1046. Je ne puis quitter ce sujet, sans faire connoître une transformation purement algébrique et fort simple, qu'Euler a employée avec succès dans son Calcul différentiel; elle consiste à faire dans la série

$$S=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{etc.}$$

$x=\frac{y}{1\pm y}$. En prenant le signe $+$, on a

$$\begin{aligned}x&=y-y^2+y^3-y^4+y^5-y^6+\text{etc.}\\x^2&=y^2-2y^3+3y^4-4y^5+5y^6-6y^7+\text{etc.}\\x^3&=y^3-3y^4+6y^5-10y^6+15y^7-21y^8+\text{etc.}\\x^4&=y^4-4y^5+10y^6-20y^7+35y^8-56y^9+\text{etc.}\end{aligned}$$

etc.

d'où

d'où l'on déduit

$$S = ay \left.\begin{matrix} -a \\ +b \end{matrix}\right| y^2 \left.\begin{matrix} +a \\ -2b \\ +c \end{matrix}\right| y^3 \left.\begin{matrix} -a \\ +3b \\ -3c \\ +d \end{matrix}\right| y^4 \left.\begin{matrix} +a \\ -4b \\ +6c \\ -4d \\ +e \end{matrix}\right| y^5 - \text{etc.}$$

Les coefficiens des puissances de y dans cette série, sont les différences du premier terme a de la série

$$a+b+c+d+e+ \text{ etc.}$$

qu'on obtient en faisant $x=1$ dans la proposée; et l'on conclut de là que

$$S = ay + \Delta a.y^2 + \Delta^2 a.y^3 + \Delta^3 a.y^4 + \text{ etc.}$$

Cette dernière série sera convergente lorsque les différences de termes de la première iront en décroissant.

Lorsqu'on fait $x = \frac{y}{1+y}$, on a $y = \frac{x}{1-x}$, et la série ci-dessus devient

$$S = a\frac{x}{1-x} + \Delta a.\frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 a.\frac{x^3}{(1-x)^3} + \Delta^3 a.\frac{x^4}{(1-x)^4} + \text{ etc.}$$

série équivalente à la proposée.

Quand la série $a+b+c+d+e+$ etc. a des différences constantes, on obtient exactement la somme S. Si l'on avoit, par exemple,

$$4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \text{ etc.}$$

on trouveroit, en prenant les différences des coefficiens numériques,

$$a=4, \quad \Delta a = 11, \quad \Delta^2 a = 14, \quad \Delta^3 a = 6, \quad \Delta^4 a = 0, \text{ etc.}$$

ce qui donneroit

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11x^2}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4}$$
$$= \frac{4x - x^2 + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

Non-seulement on arrive de cette manière à la limite de la série proposée, ou à sa fonction génératrice, mais on obtient encore la somme d'un nombre quelconque de ses termes. En effet, la série proposée étant

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots + px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{ etc.}$$

on aura

$$p x^{n+1} + q x^{n+2} + r x^{n+3} + s x^{n+4} + \text{etc.}$$
$$= x^n \left\{ p . \frac{x}{1-x} + \Delta p . \frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 p . \frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{etc.} \right\},$$

et en retranchant cette partie de l'expression totale de S, il viendra pour la somme des termes, depuis le premier, jusqu'à celui qui est multiplié par x^n, inclusivement,

$$(a - x^n p)\frac{x}{1-x} + (\Delta a - x^n \Delta p)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{etc.}$$

Avec un peu d'attention on reconnoît facilement que la série transformée n'est convergente par elle-même que dans un très-petit nombre de cas, lorsque les différences Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, etc. ne décroissent pas très-rapidement; mais si l'on donne à x le signe $-$, la série proposée et la transformée deviendront respectivement

$$S = a x - b x^2 + c x^3 - d x^4 + e x^5 - \text{etc.}$$
$$S = a\frac{x}{1+x} - \Delta a \frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 a \frac{x^3}{(1+x)^3} - \Delta^3 a \frac{x^4}{(1+x)^4} + \text{etc.}$$

en changeant le signe de chaque terme; et la seconde sera convergente lorsqu'on y supposera $x = 1$ et $x < 1$: le premier de ces cas mérite une attention particulière.

1047. On a, quand $x = 1$,

$$S = a - b + c - d + e - \text{etc.}$$
$$S = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{4} \Delta a + \tfrac{1}{8} \Delta^2 a - \tfrac{1}{16} \Delta^3 a + \text{etc.}$$

et par ces formules on trouve les limites d'un grand nombre de séries divergentes.

Si l'on propose, par exemple,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$$
$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.}$$
etc.

On trouve pour la première série, $a = 1$, $\Delta a = 0$, $\Delta^2 a = 0$, etc. et par conséquent $S = \frac{1}{2}$, comme on l'a vu dans le n°. 6 de l'Introduction; pour la deuxième série $a = 1$, $\nabla a = 1$, $S = \frac{1}{4}$; pour la troisième $a = 1$, $\Delta a = 3$, $\Delta^2 a = 2$, $S = 0$, etc.

On arriveroit encore à la limite cherchée, si la série transformée étoit de celles que l'on sait sommer; mais, sans nous arrêter à ces exemples, passons à la série excessivement divergente,

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+1.2.3.4.5-\text{etc.}$$

Pour obtenir les différences du premier terme, on formera la table suivante.

termes.	différ. 1ère	différ. 2e.	différ. 3e.
1	1	3	4
2	4	14	64
6	18	78	426
24	96	504	3216
120	600	3720	27240
720	4320	30960	256320
5040	35280	287280	2656080
40320	322560	2943360	
362880	3265920		
3628800			
etc.			

On aura, d'après ce tableau,

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{389}{64}+\frac{2119}{128}-\frac{16687}{216}$$
$$+\frac{148329}{512}-\frac{1468457}{1024}+\frac{16019531}{2048}-\frac{190899411}{4096}+\text{etc.}$$

série un peu moins divergente que la proposée. Réunissons les deux premiers termes et représentons le reste par S', nous aurons

$$S=\frac{1}{4}+S' \text{ et } S'=\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\text{etc.}$$

en transformant la série S', comme nous avons fait la proposée, nous en diminuerons la divergence, car nous trouverons

$$S'=\frac{3}{2^4}-\frac{5}{2^6}+\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\frac{615}{2^{12}}-\frac{4401}{2^{14}}+\frac{36585}{2^{16}}$$
$$-\frac{342207}{2^{18}}+\frac{3565323}{2^{20}}-\frac{40866525}{2^{22}}+\text{etc.}$$

Les deux premiers termes de cette série, réduits à un seul, donnent $S'=\frac{7}{2^6}+S''$, en désignant par S'' l'assemblage de tous les autres;

et transformant encore la série S'', il viendra

$$S''=\frac{21}{2^{9}}-\frac{15}{2^{12}}+\frac{159}{2^{15}}-\frac{429}{2^{18}}+\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26283}{2^{24}}+\frac{338835}{2^{27}}$$
$$-\frac{2771097}{2^{30}}+\text{etc.}$$

Réunissant dans cette dernière les quatre premiers termes, et désignant le reste par S''', nous aurons

$$S''=\frac{153}{2^{12}}+\frac{843}{2^{18}}+S''', \qquad S'''=\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26283}{2^{24}}+\text{etc.}$$

et si l'on s'arrête après les quatre premiers termes de S''', on aura $S'''=\frac{15645}{2^{24}}-\frac{60417}{2^{30}}$, d'où l'on conclura $S=0,40082038$, résultat qui n'est encore exact que dans les deux premiers chiffres décimaux, à cause de l'extrême divergence de la série proposée. Nous donnerons dans la suite un moyen plus expéditif pour parvenir au nombre 0,4036524077, exact jusqu'au dernier chiffre.

1048. La transformation qui nous occupe étant appliquée aux séries

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\text{etc.}$$
$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\text{etc.}$$

dont la première exprime le logarithme népérien de 2, et la seconde la longueur de la huitième partie de la circonférence du cercle (Int. n°s. 26 et 38), conduit à des résultats fort élégans.

En prenant les différences des termes de la première, on trouve

diff. 1ere, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2\cdot 3}$, $-\frac{1}{3\cdot 4}$, $-\frac{1}{4\cdot 5}$, $-\frac{1}{5\cdot 6}$, etc.
diff. 2e, $+\frac{1}{3}$, $+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}$, $+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}$, $+\frac{2}{4\cdot 5\cdot 6}$, etc.
diff. 3e, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$, $-\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$, etc.
diff. 4e, $+\frac{1}{5}$, etc.
etc.

et l'on en conclut

$$S=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2\cdot 4}+\tfrac{1}{3\cdot 8}+\tfrac{1}{4\cdot 16}+\tfrac{1}{5\cdot 32}+\text{etc.}$$

On obtient pour la seconde série,

diff. 1ere, $-\frac{2}{1\cdot 3}$, $-\frac{2}{3\cdot 5}$, $-\frac{2}{5\cdot 7}$, $-\frac{2}{7\cdot 9}$, $-\frac{2}{9\cdot 11}$ etc.
diff. 2e, $+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}$, $+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}$, $+\frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}$, $+\frac{2\cdot 4}{7\cdot 9\cdot 11}$, etc.
diff. 3^{e}, $-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$, $-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$, etc.

ce qui donne

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 2} + \text{etc.}$$

ou $$2S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc.}$$

La même méthode donne facilement la limite de la série

$$l\,2 - l\,3 + l\,4 - l\,5 + l\,6 - l\,7 + l\,8 - l\,9 + \text{etc.}$$

parce que les différences des logarithmes consécutifs vont en décroissant; mais pour abréger l'opération, il faut former immédiatement la valeur du résultat des neuf premiers termes de cette série, valeur qu'on trouve égale à —0,3911005. Nous supprimerons le détail du reste du calcul qui n'offre aucune difficulté, et nous dirons seulement qu'Euler a trouvé pour résultat 0,4891606; la différence de ce nombre avec le précédent est 0,0980601, et, comme logarithme, répond au nombre 1,253315 : telle est la limite de la série proposée.

1049. Les théorèmes des nos. 864, 873, 913, 914 et 915 se déduisent avec la plus grande facilité de la Théorie des fonctions génératrices.

Il est visible que

$$u\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m = u\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n - 1\right\}^m;$$

on tire de là

$$u\left(\frac{1}{t^n} - 1\right)^m = u\left\{\frac{n}{1}\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \text{etc.}\right\}^m;$$

les coefficiens de t^x, dans le développement des termes

$$u\left(\frac{1}{t} - 1\right), \quad u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2, \quad u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3, \text{ etc.}$$

fournis par le second membre, seront respectivement

$$\Delta y_x, \quad \Delta^2 y_x, \quad \Delta^3 y_x, \text{ etc.}$$

et par conséquent on obtiendra le coefficient de t^x dans le développement de ce membre, en développant la quantité $\{(1 + \Delta y_x)^n - 1\}^m$, pourvu qu'on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de Δy_x (n°. 1035). Mais d'un autre côté, le coefficient de t^x, dans le développement de $\frac{u}{t^n} - u$, est égal

à $y_{x+n}-y_x$; désignant cette nouvelle espèce de différence par la caractéristique $\Delta' y_x$, les coefficiens de t^x, dans le développement des fonctions

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right), \quad u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^2, \quad u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^3, \text{ etc.}$$

seront respectivement

$$\Delta' y_x, \quad \Delta'^2 y_x, \quad \Delta'^3 y_x, \text{ etc.}$$

et nous conclurons de là que

$$\Delta'^m y_x = \{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m \quad (1);$$

cette formule rentre dans celle du n°. 873, lorsqu'on y fait $m=1$ et qu'on change n en h', et dans celle du n°. 864, quand $n=1$, m demeurant quelconque.

Si la caractéristique Σ' représente l'intégrale relative aux différences marquées par Δ', dans lesquelles x varie de la quantité n, les considérations du n°. 1036, appliquées à ce cas, feront voir que $\Sigma'^m y_x$ est le coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^{-m}$, abstraction faite des constantes arbitraires introduites par l'intégration; et comme on a

$$u\left(\frac{1}{t^n}-1\right)^{-m} = u\{(1+\frac{1}{t}-1)^n - 1\}^{-m},$$

on en conclura de même que ci-dessus,

$$\Sigma'^m y_x = \{(1+\Delta y_x)^n - 1\}^{-m} \quad (2);$$

mais il faudra observer de changer les puissances négatives de Δy_x, en termes de la forme Σy_x, $\Sigma^2 y_x$, etc. parce que le coefficient de t^x, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-r}$ est $\Sigma^r y_x$ (n°. 1036): avec cette attention l'équation que nous venons d'obtenir comprend celles des n°s. 913, 914 et 915.

Si l'on change x en $\frac{x'}{k}$, la quantité x' variera de k, lorsque x variera de l'unité, et nk sera la variation de x', relativement à la caractéristique Δ', c'est-à-dire, que x' deviendra $x'+k$ dans $\Delta y_{x'}$,

et $x'+nk$ dans $\Delta' y_{x,}$; il est visible que les équations (1) et (2) subsisteront encore dans cette hypothèse: nous pouvons donc les regarder comme ayant lieu lorsque x devient $x+k$, par rapport à la caractéristique Δ, pourvu que nous supposions qu'il se change en $x+nk$ par rapport à la caractéristique Δ'. Si nous concevons maintenant que k représente une quantité infiniment petite, ou l'accroissement dx, et que n soit infiniment grand, nous pourrons écrire $ndx = \alpha$, α désignant une quantité finie, et changer Δy_x en dy_x; mais les équations (1) et (2) devenant alors

$$\Delta'^m y_x = \{(1+dy_x)^n - 1\}^m$$

$$\Sigma'^m y_x = \frac{1}{\{(1+dy_x)^n - 1\}^m}$$

doivent être ramenées à l'homogénéité conformément aux loix du Calcul différentiel. Pour y parvenir, il suffit de remarquer que

$$l(1+dy_x)^n = nl(1+dy_x) = n\left(\frac{dy_x}{1} - \frac{(dy_x)^2}{2} + \text{etc.}\right);$$

en ne prenant que le premier terme de la série, on obtient ndy_x; quantité équivalente à $ndx\frac{dy_x}{dx}$, ou à $\alpha\frac{dy_x}{dx}$; et l'équation $l(1+dy_x)^n = \alpha\frac{dy_x}{dx}$ conduit à $(1+dy)^n = e^{\alpha\frac{dy}{dx}}$, en supprimant pour plus de simplicité l'indice de y, que l'on peut sous-entendre facilement dans ce cas. Par le moyen de cette valeur, on a

$$\Delta'^m y = \left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}} - 1\right)^m \quad (3),$$

$$\Sigma'^m y = \frac{1}{\left(e^{\alpha\frac{dy}{dx}} - 1\right)^m} \quad (4),$$

en observant de transporter à la caractéristique d, les exposans de dy, et de changer les puissances négatives en intégrales. Ces équations sont les mêmes que celles du n°. 915.

Considérons l'accroissement n comme infiniment petit, ou comme dx, $\Delta'^m y_x$ se changera en $d^m y$, $\Sigma'^m y_x$ en $\frac{1}{dx^m}\int^m y\,dx^m$, et $(1+\Delta y_x)^n$

en $(1+\Delta y)^{dx} = e^{dx\,l(1+\Delta y)}$, en écrivant dx pour n. Le développement de cette expression est $1+dx\,l(1+\Delta y)+$ etc. substituant dans les équations (1) et (2), elles donnent

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \{ l(1+\Delta y) \}^m \quad (5)$$

$$\int^m y\,dx^m = \frac{1}{\{ l(1+\Delta y) \}^m} \quad (6),$$

équations semblables à celles des n°s. 867 et 915.

La route qui vient de nous conduire à ces formules a l'avantage de nous découvrir la cause de l'analogie des puissances avec les différences et les intégrales, puisqu'elle nous montre que les fonctions génératrices des différences de y_x, sont les produits de la fonction u par les puissances positives de la quantité $\frac{1}{t} - 1$, tandis que celles des intégrales sont les produits de u par les puissances négatives de la même quantité.

1050. Laplace a obtenu, ainsi qu'il suit, pour les séries de la forme,

$$y_0 + y_1 a t + y_2 a^2 t^2 \ldots\ldots + y_x a^x t^x + \text{etc.}$$

des formules analogues à celles du n°. précédent. En nommant u la somme de cette suite, ou la fonction génératrice de $y_x a^x$, on a l'équation identique

$$u\left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^n = u\left\{ a^i\left(1 + \frac{1}{at} - 1\right)^i - 1 \right\}^n;$$

et d'après le n°. précédent, le coefficient de t^x, dans la fonction $u\left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^n$ sera égal à $\Delta^{n}.a^x y_x$, en supposant que x varie de la quantité n. Mais le coefficient de la puissance de t dans le développement de $u\left(\frac{1}{at} - 1\right)^r$ est $a^x \Delta^r y_x$, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre, en observant que le coefficient de t^x dans $u\left(\frac{1}{at} - 1\right)$ ou $\frac{u}{at} - u$ est $\frac{a^{x+1} y_{x+1}}{a} - a^x y_x = a^x(y_{x+1} - y_x) = a^x \Delta y_x$, et continuant ainsi de proche en proche. Si donc on développe suivant les puissances de $\frac{1}{at} - 1$, le second membre de l'équation identique

identique posée plus haut, on pourra, dans le passage des fonctions génératrices aux coefficiens, remplacer les puissances de $\frac{1}{at} - 1$ par celles de Δy_x, multipliées par le facteur commun a^x, et transporter après le développement, les exposans des puissances de Δy_x à la caractéristique Δ. Avec cette attention, on aura l'équation

$$\Delta'^m . a^x y_x = a^x \{ a^n (1 + \Delta y_x)^n - 1 \}^m \quad (7);$$

puis en écrivant $-m$, au lieu de m, on aura encore, comme dans le n°. précédent,

$$\Sigma'^m . a^x y_x = \frac{a^x}{\{a^n(1+\Delta y_x)^n - 1\}^m} \quad (8).$$

Si l'on substitue rx' à x, et qu'on désigne par y' ce que devient alors y, la différence de x' sera $\frac{1}{r}$: en supposant r infini, cette différence se changera en dx'; on aura $\Delta y_x = dy'$; on fera ensuite $a^r = p$, pour obtenir $a^x = p^{x'}$ et $a^x y_x = p^{x'} y'$. Maintenant si l'on prend n infiniment grand, et qu'on pose $\frac{n}{r} = \alpha$, la quantité α pourra être finie, et exprimer le changement qu'éprouve x', lorsque x devient $x+n$, d'où il résulte que $\Delta'^m . p^{x'} y'$, $\Sigma'^m . p^{x'} y'$, désignent pour l'ordre m la différence et l'intégrale de la fonction $p^{x'} y'$, lorsque x' se change en $x' + \alpha$. Remplaçant, dans les équations (7) et (8), Δy_x par dy', il viendra

$$\Delta'^m . p^{x'} y' = p^{x'} \{ p^\alpha (1 + dy')^n - 1 \}^m$$

$$\Sigma'^m . p^{x'} y' = \frac{p^{x'}}{\{ p^{x'} (1 + dy')^n - 1 \}^m};$$

et ramenant la quantité $(1 + dy')^n$ à l'homogénéité, comme dans le n°. précédent, on aura $(1 + dy')^n = c^{\alpha \frac{dy'}{dx'}}$, d'où il suit

$$\Delta'^m . p^{x'} y' = p^{x'} (p^\alpha c^{\alpha \frac{dy'}{dx'}} - 1)^m \quad (9)$$

$$\Sigma'^m . p^{x'} y' = \frac{p^{x'}}{(p^\alpha c^{\alpha \frac{dy'}{dx'}} - 1)^m} \quad (10).$$

Si, dans les équations (7) et (8), l'on suppose n infiniment petit, c'est-à-dire, qu'on y substitue dx, $\Delta'^{m}.a^x y_x$ se changera en $d^m.a^x y_x$, et $\Sigma'^{m}.a^x y_x$ en $\frac{1}{dx^m}\int^m a^x y_x dx^m$, et puisque

$$a^x(1+\Delta y_x)^x = 1 + dx\{1a(1+\Delta y_x)\} \text{ (n°. précéd.)},$$

on en conclura

$$\frac{d^m.a^x y_x}{dx^m} = a^x\{1a(1+\Delta y_x)\}^m \quad (11)$$

$$\int^m.a^x y_x dx^m = \frac{a^x}{\{1a(1+\Delta y_x)\}^m} \quad (12).$$

Telles sont les formules que nous avons annoncées dans le n°. 923; où nous avons donné, d'après Euler, un cas particulier de celle qui est désignée par (10). Outre ces théorêmes intéressans, parmi lesquels ceux qui sont désignés par (7), (8), (9), (10), (11) et (12), lui appartiennent, Laplace a de plus donné dans son Mémoire, un moyen pour en trouver une infinité d'autres du même genre.

Des fonctions de deux variables.

1051. Soit u une fonction de deux variables t et t', dont le développement ait la forme

$$\begin{array}{l} y_{0,0}+y_{1,0}t+y_{2,0}t^2+y_{3,0}t^3 \ldots\ldots\ldots +y_{n,0}\ t^n \quad + \text{etc.} \\ +y_{0,1}t'+y_{1,1}tt'+y_{2,1}t^2t' \ldots\ldots\ldots +y_{n-1,1}t^{n-1}t' + \text{etc.} \\ +y_{0,2}t'^2+y_{1,2}tt'^2 \ldots\ldots\ldots +y_{n-2,2}t^{n-2}t'^2 + \text{etc.} \\ +y_{0,3}t'^3 \ldots\ldots\ldots +y_{n-3,3}t^{n-3}t'^3 + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +y_{0,n}t'^n \quad + \text{etc.} \end{array}$$

$y_{x,x'}$ désignant le coefficient de $t^x t'^{x'}$, aura u pour fonction génératrice. Si l'on représente par $\Delta_x y_{x,x'}$ la différence de la fonction $y_{x,x'}$, prise seulement par rapport à la variable x, la fonction génératrice de cette différence sera $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$; celle de $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ sera de même $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$. Il est facile de conclure de là que la fonction génératrice de $\Delta_x\Delta_{x'}y_{x,x'}$, ou de $\Delta^{1+1}_{x,x'}y_{x,x'}$ est $u\left(\frac{1}{t}-1\right)\left(\frac{1}{t'}-1\right)$, et qu'en général celle de $\Delta^{n+n'}_{x,x'}y_{x,x'}$ sera $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^n\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{n'}$.

Dans le cas actuel, l'expression $\nabla y_{x,x'}$ sera le symbole d'une quantité de la forme

$$\begin{array}{l} Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + Cy_{x+2,x'} \quad + \text{etc.} \\ \qquad\quad + B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + C''y_{x,x'+2} \quad + \text{etc.} \end{array}$$

l'expression $\nabla^2 y_{x,x'}$, celui d'une quantité composée en $\nabla y_{x,x'}$, comme la précédente l'est en $y_{x,x'}$, et ainsi de suite; la fonction génératrice de l'expression générale $\nabla^m y_{x,x'}$ sera visiblement de la forme

$$u \left\{ \begin{array}{l} A + \dfrac{B}{t} + \dfrac{C}{t^2} + \text{etc.} \\ \quad + \dfrac{B'}{t'} + \dfrac{C'}{tt'} + \text{etc.} \\ \qquad\quad + \dfrac{C''}{t'^2} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\quad + \text{etc.} \end{array} \right\}^m$$

en sorte que

$$ut^r t'^{r'} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{n'} \left\{ \begin{array}{l} A + \dfrac{B}{t} + \text{etc.} \\ \quad + \dfrac{B'}{t'} + \text{etc.} \end{array} \right\}^m$$

sera la fonction génératrice de $\overset{n+n'}{\underset{x,\,x'}{\Delta}} \nabla^m y_{x-r,\,x'-r'}$.

Cela posé, lorsque s désignera une fonction des quantités $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t'}$, et que son développement, suivant les puissances de ces quantités, aura un terme général de la forme $\frac{K}{t^p t'^{p'}}$, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans $\frac{Ku}{t^p t'^{p'}}$, sera $Ky_{x+p,\,x'+p'}$; et il s'ensuit que le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans us^m, sera $\nabla^m y_{x,x'}$, si s a la forme convenable. On voit par là que $\nabla^m y_{x,x'}$ s'obtiendra en écrivant dans s^m, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$, et en développant le résultat suivant les puissances de y_x et de $y_{x'}$, puis changeant les produits $K(y_x)^r(y_{x'})^{r'}$ en $Ky_{x+r,\,x'+r'}$;

bien entendu qu'un terme tout constant K, équivalent à $K(y_x)^0(y_{x'})^0$, doit être remplacé par $K y_{x,x'}$.

Pour introduire dans le calcul les différences de $y_{x,x'}$, il faut développer s^m suivant les puissances des quantités $\frac{1}{t}-1$, $\frac{1}{t'}-1$; un terme quelconque du résultat, étant désigné par $K\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ et multiplié par u, ou $Ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, donnera lieu à un développement dans lequel le coefficient $t^x t'^{x'}$ sera exprimé par $K\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$. Il suit de là que la quantité $\nabla^m y_{x,x'}$ se formera dans ce cas en substituant $\Delta_x y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t}-1$, et $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}-1$, dans s, et développant alors s^m suivant les puissances de $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, puis en transportant à la caractéristique Δ les exposans de ces puissances, et mettant ainsi $\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, à la place de $(\Delta_x y_{x,x'})^r(\Delta_{x'} y_{x,x'})^{r'}$.

Si l'on désigne par $\Sigma^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$ l'intégrale du coefficient $y_{x,x'}$, prise un nombre r de fois par rapport à x seul, et un nombre r' de fois par rapport à x' seul, et que l'on représente par z la fonction génératrice de cette intégrale, celle de la différence $y_{x,x'}$, sera d'après ce qu'on vient de voir, $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, et l'on aura par conséquent

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u, \text{ d'où } z=\frac{u}{\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}};$$

connoissant ainsi la fonction génératrice de $\Sigma^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, on aura cette intégrale en passant des fonctions génératrices aux coefficiens. Nous observerons qu'à cause des quantités arbitraires qu'elle doit comporter, il faut écrire

$$z\left(\frac{1}{t}-1\right)^r\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}=u+\frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t^3}\ldots\ldots+\frac{q}{t^r}$$
$$+\frac{a'}{t'}+\frac{b'}{t'^2}+\frac{c'}{t'^3}\ldots\ldots+\frac{q'}{t'^{r'}},$$

a, b, c, ... q, étant des fonctions arbitraires de t' et a', b', c', ... q', des fonctions arbitraires de t; d'où l'on conclut

$$z = \frac{ut^r t'^{r'} + at^{r-1} t'^{r'} + bt^{r-2} t'^{r'} \ldots\ldots + qt'^{r'} + a't^r t'^{r'-1} \ldots\ldots + q't^r}{(1-t)^r (1-t')^{r'}}.$$

1052. Appliquons maintenant ces principes à l'interpolation des séries à double entrée, recherche qui consiste à déterminer l'expression de $y_{x+n,\, x'+n'}$, ou, ce qui revient au même, le coefficient $t^x t'^{x'}$, dans le développement de la fonction $\frac{u}{t^n t'^{n'}}$. Il est visible qu'on a l'équation identique

$$\frac{u}{t^n t'^{n'}} = u\left(1 + \frac{1-t}{t}\right)^n \left(1 + \frac{1-t'}{t'}\right)^{n'} =$$

$$u \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{n}{1}\left(\frac{1-t}{t}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \\ &\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^3 + \text{etc.} \\ &+ \frac{n'}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right) + \frac{n'}{1}\frac{n}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right) \\ &\qquad + \frac{n'}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + \text{etc.} \\ &\qquad + \frac{n'(n'-1)}{1.2}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^2 \\ &\qquad + \frac{n'(n'-1)}{1.2}\frac{n}{1}\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^2\left(\frac{1-t}{t}\right) + \text{etc.} \\ &\qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned} \right\}.$$

et dans ce développement le coefficient numérique de $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^r \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{r'}$ sera

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r} \cdot \frac{n'(n'-1)(n'-2)\ldots(n'-r'+1)}{1.2.3\ldots\ldots r'},$$

ou $\overset{-r}{[0]}\overset{r}{[n]}\overset{-r'}{[0]}\overset{r'}{[n']}$. Cela posé, le coefficient de $t^x t'^{x'}$, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^r \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{r'}$, étant $\Delta^{r+r'}_{x,x'} y_{x,x'}$, le terme

général de l'expression de $y_{x+n,\,x_{\prime}+n_{\prime}}$ sera

$$\overset{-r}{[0]}\;\overset{r}{[n]}\;\overset{-r'}{[0]}\;\overset{r'}{[n']}\;\overset{r+r'}{\underset{x,\,x'}{\Delta}}\;y_{x,\,x'},$$

formule dont on tire cette série

$$\begin{aligned} y_{x+n,\,x'+n'} = y_{x,\,x'} &+ \frac{n}{1}\Delta_x y_{x,\,x'} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2_x y_{x,\,x'} + \text{etc.} \\ &+ \frac{n'}{1}\Delta_{x'} y_{x,\,x'} + \frac{n}{1}\;\frac{n'}{1}\;\overset{1+1}{\underset{x,\,x'}{\Delta}} y_{x,\,x'} + \text{etc.} \\ &+ \frac{n'(n'-1)}{1.2}\Delta^2_{x'} y_{x,\,x'} + \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

que nous avons déjà obtenue, n°. 894, par d'autres considérations. On peut lui donner cette forme

$$y_{x+n,\,x_{\prime}+x_{\prime}} = (1+\Delta_x y_{x,\,x_{\prime}})^n (1+\Delta_{x'} y_{x,\,x'})^{n'},$$

en observant de transporter, comme il a été dit dans le n°. précéd. à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de $\Delta_x y_{x,\,x_{\prime}}$, $\Delta_{x_{\prime}} y_{x,\,x_{\prime}}$, et d'écrire $y_{x,\,x_{\prime}}$, au lieu du premier terme 1, que l'on doit regarder comme équivalent à $(\Delta_x y_{x,\,x_{\prime}})^0 (\Delta_{x_{\prime}} y_{x,\,x_{\prime}})^0$.

1053. Proposons-nous maintenant d'ordonner le développement de $y_{x+n,\,x_{\prime}}$, suivant les quantités $\nabla y_{x,\,x_{\prime}}$, $\nabla^2 y_{x,\,x'}$, etc. et prenons en conséquence

$$\begin{aligned} z = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} \ldots\ldots &+ \frac{P'}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n} \\ + \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t't} + \frac{D'}{t't^2} &+ \text{etc.} \\ + \frac{C''}{t'^2} + \frac{D''}{t'^2 t} &+ \text{etc.} \\ + \frac{D'''}{t'^3} &+ \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{t'^{m'}}. \end{aligned}$$

Soit fait $$A+\frac{B'}{t'}+\frac{C''}{t'^2}+\frac{D'''}{t'^3}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{t'^{m'}}=a$$

$$B+\frac{C'}{t'}+\frac{D''}{t'^2}+\text{etc.}=b$$

$$C+\frac{D'}{t'}+\text{etc.}=c$$

etc.

il viendra $$z=a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots\ldots\ldots+\frac{q}{t^n},$$

équation semblable à celle que nous avons traitée dans le n°. 1039, et pour laquelle nous avons donné l'expression de $\frac{1}{t^x}$ à la page 313; mais dans le cas actuel, il faut développer de plus les coefficiens a, b, c, ... q, suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$, ce qui changera

la quantité $$\begin{aligned}&bZ_{0,n-m+1}+bzZ_{1,n-2m+1}+\text{etc.}\\&+cZ_{0,n-m+2}+czZ_{1,n-2m+2}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M+Nz+\text{etc.}+\frac{1}{t'}(M_1+N_1z+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{t'^2}(M_2+N_2z+\text{etc.})\ldots\ldots+\frac{1}{t'^n}M_n,$$

la quantité $$\begin{aligned}&cZ_{0,n-m+1}+czZ_{1,n-2m+1}+\text{etc.}\\&+cZ_{0,n-m+2}+czZ_{1,n-2m+2}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M'+N'z+\text{etc.}+\frac{1}{t'}(M'_1+N'_1z+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{t'^2}(M'_2+N'_2z+\text{etc.})\ldots+\frac{1}{t'^{n-1}}M'_{n-1},$$

la quantité $$\begin{aligned}&cZ_{0,n-m+1}+\text{etc.}\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

en une autre de la forme

$$M''+N''z+\text{etc.}+\frac{1}{t'}(M''_1+N''_1z+\text{etc.})$$

$$+\frac{1}{t'^2}(M''_2+N''_2z+\text{etc.})\ldots+\frac{1}{t'^{n-2}}M''_{n-2},$$

et ainsi de suite. Il est facile de voir que la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ et de $\frac{1}{t'}$, dans ces expressions, ne doit point surpasser l'exposant n, lorsque cet exposant est entier. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n} = M + N z + \text{etc.} &+ \frac{1}{t'}(M_1 + N_1 z + \text{etc.}) \\
&+ \frac{1}{t'^2}(M_2 + N_2 z + \text{etc.}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{t'^n} M_n
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{t}\left\{\begin{array}{l}
\quad M' + N' z + \text{etc.} \\
+\frac{1}{t'}(M'_1 + N'_1 z + \text{etc.}) \\
+\frac{1}{t'^2}(M'_2 + N'_2 z + \text{etc.}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{1}{t'^{n-1}} M'_{n-1}
\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{t^2}\left\{\begin{array}{l}
\quad M'' + N'' z + \text{etc.} \\
+\frac{1}{t'}(M''_1 + N''_1 z + \text{etc.}) \\
+\frac{1}{t'^2}(M''_2 + N''_2 z + \text{etc.}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{1}{t'^{n-2}} M''_{n-2}
\end{array}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{t^{m-1}}\left\{\begin{array}{l}
\quad M^{(m-1)} + N^{(m-1)} z + \text{etc.} \\
+\frac{1}{t'}(M_1^{(m-1)} + N_1^{(m-1)} z + \text{etc.}) \\
+\frac{1}{t'^2}(M_2^{(m-1)} + N_2^{(m-1)} z + \text{etc.}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\frac{1}{t'^{n-m+1}} M^{(m-1)}_{n-m+1}
\end{array}\right\}$$

et

et comme le symbole $\nabla y_{x,x'}$ désigne la quantité

$$\begin{aligned} A y_{x,x'} + B y_{x+1,x'} + C y_{x+2,x'} &+ \text{etc.} \\ + B' y_{x,x'+1} + C' y_{x+1,x'+1} &+ \text{etc.} \\ + C'' y_{x,x'+2} &+ \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

et que le coefficient de $t^x t'^{x'}$, dans le développement de la fonction $\frac{u\zeta'}{t^r t'^{r'}}$, est exprimé par $\nabla^i y_{x+r,x'+r'}$ (n°. 1051), on conclura de ce qui précède, en passant des coefficiens aux fonctions génératrices, que

$$y_{x+n,x'} = \begin{cases} M y_{x,x'} + N \nabla y_{x,x'} + \text{etc.} \\ + M_1 y_{x,x'+1} + N_1 \nabla y_{x,x'+1} + \text{etc.} \\ + M_2 y_{x,x'+2} + N_2 \nabla y_{x,x'+2} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M_n y_{x,x'+n} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} M' y_{x+1,x'} + N' \nabla y_{x+1,x'} + \text{etc.} \\ M'_1 y_{x+1,x'+1} + N'_1 \nabla y_{x+1,x'+1} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M'_{n-1} y_{x+1,x'+n-1} \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \begin{cases} M^{(n-1)} y_{x+m-1,x'} + N^{(n-1)} \nabla y_{x+m-1,x'} + \text{etc.} \\ + M_1^{(n-1)} y_{x+m-1,x'+1} + N_1^{(n-1)} \nabla y_{x+m-1,x'+1} + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M^{m-1}_{n-m+1,m-1} y_{x+m-1,x'+n-m+1}. \end{cases}$$

Cette suite s'arrêtera lorsque quelqu'une des quantités $\nabla y_{x,x'}$; $\nabla^2 y_{x,x'}$, etc. sera nulle.

Si l'on prend $\nabla y_{x,x'} = 0$, et que l'on fasse ensuite $x = 0$ dans l'expression précédente de $y_{x+n,x'}$, on aura

$$\begin{aligned} y_{n,x'} = M y_{0,x'} + M_1 y_{0,x'+1} &+ M_2 y_{0,x'+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+ M_n y_{0,x'+n} \\ + M' y_{1,x'} + M'_1 y_{1,x'+1} &+ M'_2 y_{1,x'+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+ M'_{n-1} y_{1,x'+n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M^{(m-1)} y_{m-1,x'} + M_1^{(m-1)} y_{m-1,x'+1} &+ M_2^{(m-1)} y_{m-1,x'+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+ M^{(m-1)}_{n-m+1} y_{m-1,x'+n-m+1}; \end{aligned}$$

cette expression s'écrit sous la forme

$$y_{n,x'} = \Sigma M_r y_{0,x'+r} + \Sigma M'_r y_{1,x'+r} + \Sigma M''_r y_{2,x'+r}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \Sigma M_r^{(m-1)} y_{m-1,x'+r},$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $r=0$, jusqu'à $r=n+1$, afin d'y comprendre la somme des termes depuis $r=0$, jusqu'à $r=n$ (n°. 897); l'intégrale du second terme étant prise depuis $r=0$, jusqu'à $r=n$, et ainsi de suite; enfin l'intégrale du dernier, depuis $r=0$, jusqu'à $r=n-m+1$.

L'expression que nous venons d'obtenir pour $y_{n,x'}$ est évidemment l'intégrale complète de l'équation

$$0 = Ay_{x,x'} + By_{n+1,x'} + Cy_{n+2,x'} \ldots + Py_{n+m-1,x'} + qy_{n+m,x'}$$
$$+ B'y_{x,x'+1} + C'y_{n+1,x'+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C''y_{n,x'+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_{n,x'+m}.$$

1054. La recherche de cette intégrale se trouve ramenée à celle des coefficiens M, M_1, ... M', M'_1, etc. qui sont précisément ceux des puissances de $\frac{1}{t'}$ dans le développement des fonctions

$$b Z_{0,n-m+1} + c Z_{0,n-m+2} + \text{etc.}$$
$$c Z_{0,n-m+1} + e Z_{0,n-m+2} + \text{etc.}$$
etc.

ces développemens seront faciles à former dès qu'on connoîtra ceux des quantités $Z_{0,n-m+1}$, $Z_{0,n-m+2}$, etc. ou en général celui de $Z_{0,r}$; mais on trouvera sans peine, par les formules du n°. 1042, que

$$Z_{0,r} = -\frac{1}{a\alpha^{r+1}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots}$$
$$-\frac{1}{a\beta^{r+1}(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots}$$
$$-\frac{1}{a\gamma^{r+1}(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots}$$
etc.

et comme α, β, γ, etc. sont les racines de l'équation

$$a\theta^m + b\theta^{m-1} + c\theta^{m-2} \ldots\ldots\ldots + q = 0,$$

ces quantités seront dans le cas actuel des fonctions de $\frac{1}{t'}$. Si l'on fait $\frac{1}{t'} = s$, et que l'on différentie m fois de suite, par rapport à s, l'expression de $Z_{0,r}$, pour en éliminer les quantités $\frac{1}{\alpha'}$, $\frac{1}{\beta'}$, $\frac{1}{\gamma'}$, etc. on parviendra nécessairement à une équation finale du premier degré par rapport à la fonction $Z_{0,r}$, et à ses coefficiens différentiels; ces quantités y seront multipliées par des fonctions symétriques des racines α, β, γ, etc. et de leurs différences, fonctions que l'on pourra par conséquent exprimer d'une manière rationnelle au moyen des coefficiens de l'équation $a\theta^m +$ etc. $= 0$ (n°. 159). Faisant ensuite disparoître les dénominateurs des termes du résultat, les quantités $Z_{0,r}$, $\frac{dZ_{0,r}}{ds}$, etc. n'auront pour coefficiens que des fonctions rationnelles de s ou de $\frac{1}{t'}$, c'est-à-dire, que les termes de l'équation finale seront de la forme $Ks^n \frac{d^\mu Z_{0,r}}{ds^\mu}$. Cela posé, si λ_i désigne le coefficient de s^i, dans le développement de $Z_{0,r}$, le terme $\lambda_i s^i$ deviendra $i(i-1)\ldots\ldots(i-\mu+1)\lambda_i s^{i-\mu}$, en passant dans $\frac{d^\mu Z_{0,r}}{ds^\mu}$, en sorte que $i(i-1)\ldots\ldots(i-\mu+1)K\lambda_i$ sera le coefficient de $s^{n+i-\mu}$, dans l'équation finale, et que par conséquent il faudra, pour avoir celui de s^i dans la même équation, changer i en $i-m+\mu$, et λ_i en $\lambda_{i-m+\mu}$: on aura donc

$$(i-m+\mu)(i-m+\mu-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(i-m+1)K\lambda_{i-m+\mu},$$

pour ce coefficient, le même que celui de $\frac{1}{t^i}$. Il est visible que si dans cette équation différentielle, on remplace les fonctions génératrices par leurs coefficiens, on la transformera en une équation aux différences entre les valeurs successives de λ_i, et dont l'intégration donnera ces valeurs. Par là l'intégration de l'équation $\nabla y_{x,x_1} = 0$

est ramenée à celle d'une équation aux différences à deux variables seulement et à une intégrale définie.

Pour donner une idée de l'application des formules précédentes, supposons qu'on ait l'équation du premier ordre

$$Ay_{x,\,x'}+By_{x+1,\,x'}+B'y_{x,\,x'+1}=0.$$

Dans cet exemple

$$z=A+\frac{B}{t}+\frac{B'}{t'}, \qquad a=A+\frac{B'}{t'}, \qquad b=B, \qquad c=0, \text{ etc.}$$

d'où $\quad z=a+\frac{b}{t}, \quad a\theta+b=0, \quad \theta=-\frac{b}{a}=\alpha,$

$$Z_{0,\,r}=-\frac{1}{a\alpha^{r+1}}=-\frac{(A+B's)^r}{(-B)^{r+1}},$$

en écrivant s, au lieu de $\frac{1}{t'}$. Différentiant la dernière expression de $Z_{0,\,r}$, on trouve

$$\frac{dZ_{0,\,r}}{ds}=-\frac{rB'(A+B's)^{r-1}}{(-B)^{r+1}},$$

et éliminant la fonction $\frac{(A+B's)^r}{(-B)^r}$, il vient

$$\frac{dZ_{0,\,r}}{ds}(A+B's)-rB'Z_{0,\,r}=0;$$

substituant enfin dans cette équation, à la place des fonctions génératrices, les coefficiens de $\frac{1}{t'^i}$, on obtient

$$A(i+1)\lambda_{i+1}+B'i\lambda_i-rB'\lambda_i.$$

Or la quantité $bZ_{0,\,n-m+1}+cZ_{0,\,n-m+2}+$ etc. se réduisant à son premier terme, donne seulement $M_i=B\lambda_i$, et l'on en conclut

$$y_{n,\,x'}=B\,\Sigma\,\lambda_r\,y_{0,\,x'+r},$$

l'intégrale étant prise depuis $r=0$, jusqu'à $r=n+1$. Il faut faire attention en intégrant l'équation, d'où dépend λ_i, que la constante arbitraire introduite soit telle qu'on ait $\lambda_0=\frac{A^r}{(-B)^{r+1}}$.

1055. L'équation $\nabla y_{x,x'}=0$, ou

$$0=\begin{cases} Ay_{x,x'}+By_{x+1,x'}+Cy_{x+2,x'}\ldots\ldots\ldots+qy_{x+m,x'} \\ \qquad +B'y_{x,x'+1}+C'y_{x+1,x'+1}+\text{etc.} \\ \qquad\qquad +C'y_{x,x'+2} \quad +\text{etc.} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +y_{x,x'+m'}, \end{cases}$$

correspond à l'équation $z=0$, ou à

$$0=\begin{cases} A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{q}{m} \\ \quad +\frac{B'}{t'}+\frac{C'}{tt'}+\text{etc.} \\ \qquad +\frac{C''}{t'^2}+\text{etc.} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad +\frac{1}{t'^{m'}}, \end{cases}$$

qu'on obtient en substituant dans la première, au lieu des coefficiens

$$\begin{array}{lll} y_{x,x'}, & y_{x+1,x'}, & y_{x+2,x'}, \text{ etc.} \\ & y_{x,x'+1}, & y_{x+1,x'+1}, \text{ etc.} \\ & & y_{x,x'+2}, \text{ etc.} \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

leurs fonctions génératrices

$$\begin{array}{lll} u, & \frac{u}{t}, & \frac{u}{t^2}, \text{ etc.} \\ & \frac{u}{t'}, & \frac{u}{tt'}, \text{ etc.} \\ & & \frac{u}{t'^2}, \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

car il est facile de voir que toute équation du premier degré, qui a lieu entre les coefficiens, doit avoir également lieu entre les fonctions génératrices. L'équation $z=0$ rentre évidemment dans l'équation (1) du n°. 1015, lorsqu'on y change $\frac{1}{t}$ en α, et $\frac{1}{t'}$ en β; et l'on doit saisir maintenant la liaison des méthodes qui nous ont

conduits à l'une et à l'autre: la même correspondance existe à l'égard des fonctions d'une seule variable.

Il suit de là que l'intégration de l'équation $\nabla y_{x,x'}=0$, par la seconde méthode, revient à déterminer l'expression de $\frac{1}{t^x}$, développée suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$, au moyen de l'équation $z=0$; or il y a aussi dans cette méthode, comme dans la première, des cas où l'expression de $\frac{1}{t^x}$ se présente d'abord sous la forme d'une suite infinie. L'équation

$$\frac{1}{tt'}-\frac{a}{t'}-\frac{b}{t}-c=0,$$

qui correspond à

$$y_{x+1,x'+1}-ay_{x,x'+1}-by_{x+1,x'}-cy_{x,x'}=0,$$

est un de ces cas, parce que la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ y est multipliée par $\frac{1}{t'}$. Voici l'artifice qu'employe Laplace pour lever cette difficulté.

L'équation proposée donne immédiatement

$$\frac{1}{t}=\frac{c+\frac{a}{t'}}{\frac{1}{t'}-b},$$

d'où on tire

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}}=\frac{\left(c+\frac{a}{t'}\right)^x}{t'^{x'}\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x}.$$

La dernière de ces expressions étant écrite ainsi

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}}=\frac{\left(\frac{1}{t'}-b+b\right)^{x'}\left\{c+ab+a\left(\frac{1}{t'}-b\right)\right\}^x}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x},$$

devient susceptible d'un développement terminé suivant les puissances de $\frac{1}{t'}-b$; on en tire

$$\frac{1}{t^x t'^{x'}}=\left\{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'}+\frac{x'}{1}b\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1}+\frac{x'(x'-1)}{1.2}b^2\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-2}+\text{etc.}\right\}$$

$$\times\left\{a^x+\frac{x}{1}(c+ab)\frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t'}-b}+\frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2\frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^2}+\text{etc.}\right\};$$

faisant pour abréger

$$V=a^x$$

$$V_1=\frac{x'}{1}ba^x+\frac{x}{1}(c+ab)a^{x-1}$$

$$V_2=\frac{x'(x'-1)}{1.2}b^2a^x+\frac{x'x}{1.1}b(c+ab)a^{x-1}+\frac{x(x-1)}{1.2}(c+ab)^2a^{x-2}$$

$$V_3=\frac{x(x'-1)(x'-2)}{1.2.3}b^3a^x+\frac{x'(x'-1)}{1.2}\frac{x}{1}b^2(c+ab)a^{x-1}$$
$$+\frac{x'}{1}\frac{x(x-1)}{1.2}b(c+ab)^2a^{x-2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(c+ab)^3a^{x-3}$$

etc.

il viendra

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}}=u\left\{\begin{array}{l}V\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'}+V_1\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-1}\\+V_2\left(\frac{1}{t'}-b\right)^{x'-2}\cdots\cdots\cdots\cdots+V_{x'}\\+\frac{V_{x'+1}}{\frac{1}{t'}-b}+\frac{V_{x'+2}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^2}\cdots\cdots+\frac{V_{x'+x}}{\left(\frac{1}{t'}-b\right)^x}\end{array}\right\}.$$

L'équation $\frac{1}{tt'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0$,

donnant aussi

$$\frac{1}{\frac{1}{t'} - b} = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab},$$

on peut chasser la quantité $\frac{1}{t'} - b$, du résultat ci-dessus, et si on le fait dans les termes affectés de V'_{x+1}, V'_{x+2}, etc. on obtiendra

$$\frac{u}{t^x t'^{x'}} = u \left\{ \begin{array}{l} V\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'} + V_1\left(\frac{1}{t'} - b\right)^{x'-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{x'} \\ + \frac{V_{x'+1}}{c+ab}\left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V_{x'+2}}{(c+ab)^2}\left(\frac{1}{t} - a\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{V_{x'+x}}{(c+ab)^x}\left(\frac{1}{t} - a\right)^x \end{array} \right\}.$$

Passons maintenant des fonctions génératrices aux coefficiens. Il est visible que celui de $t^0 t'^0$, dans $\frac{u}{t^x t'^{x'}}$, est $y_{x,x'}$; la quantité $u\left(\frac{1}{t'} - b\right)^r$, mise sous la forme $u b^r\left(\frac{1}{bt'} - 1\right)$, étant développée, devient

$$b^r \left\{ \frac{u}{b^r t'^r} - \frac{r}{1} \frac{u}{b^{r-1} t'^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2} \frac{u}{b^{r-1} t'^{r-1}} - \text{etc.} \right\},$$

d'où l'on conclura que le coefficient de $t^0 t'^0$, dans cette fonction est

$$b^r \left\{ \frac{y_{0,r}}{b^r} - \frac{r}{1} \frac{y_{0,r-1}}{b^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1.2} \frac{y_{0,r-2}}{b^{r-2}} - \text{etc.} \right\},$$

développement qui est celui de $b^r \Delta^r_{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$, pourvu que l'on fasse $x' = 0$ après la différentiation. On se convaincroit de la même manière que le coefficient de $t^0 t'^0$, dans le développement de $u\left(\frac{1}{t} - a\right)^r$, doit être $a^r \Delta^r_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$, en faisant $x = 0$ après la différentiation,

différentiation; et l'on aura enfin

$$y_{x,x'} = Vb^{x'}\Delta_{x'}^{x'}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) + V_1 b^{x'-1}\Delta_{x'}^{x'-1}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right)$$
$$+ V_2 b^{x'-2}\Delta_{x'}^{x'-2}\left(\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}\right) \ldots\ldots + V_{x'} y_{0,}.$$
$$+ \frac{V_{x'+1}}{c+ab} a\Delta_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right) + \frac{V_{x'+2}}{(c+ab)^2} a^2\Delta^2_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{V_{x'+x}}{(c+ab)^x} a^x\Delta^x_x\left(\frac{y_{x,0}}{a^x}\right)$$

pour l'intégrale de l'équation

$$y_{x+1,x'+1} - ay_{x,x'+1} - by_{x+1,x'} - cy_{x,x'} = 0.$$

En développant cette intégrale, on reconnoîtra sans peine qu'elle exige la connoissance de la première ligne horizontale et de la première colonne verticale de la table à double entrée qui correspond à l'équation proposée.

1056. Des considérations absolument semblables à celles du n°. 1049, vont nous conduire aux formules que nous avons déjà obtenues dans les n°s. 865, 867, 869, 895.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} u = y_{0,0} + y_{1,0}t + y_{2,0}t^2 + y_{3,0}t^3 &+ \text{etc.} \\ + y_{0,1}t' + y_{1,1}tt' + y_{2,1}t^2t' &+ \text{etc.} \\ + y_{0,2}t'^2 + y_{1,2}tt'^2 &+ \text{etc.} \\ + y_{0,3}t'^3 &+ \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Si $\Delta y_{x,x'}$, désigne la différence de $y_{x,x'}$, prise en faisant varier en même tems x et x', la fonction génératrice de $\Delta^n y_{x,x'}$ sera $u\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n$, n°. 1051; mais il est visible que

$$\frac{1}{tt'} - 1 = \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right) - 1,$$

et que par conséquent

$$u\left(\frac{1}{tt'} - 1\right)^n = u\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right) - 1\right\}^n;$$

le développement du second membre de cette équation pouvant être ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$ et de $\frac{1}{t'} - 1$, contiendra les termes $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$, $u\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{n'}$, qui sont les fonctions génératrices de $\overset{n}{\underset{x}{\Delta}} y_{x,x'}$, $\overset{n'}{\underset{x'}{\Delta}} y_{x,x'}$: passant donc de ces fonctions à leurs coefficiens, on aura

$$\Delta^m y_{x,x'} = \{(1 + \Delta_x y_{x,x'})(1 + \Delta_{x'} y_{x,x'}) - 1\}^m,$$

en observant de transporter, dans le développement du second membre, à la caractéristique Δ les exposans de $\Delta_x y_{x,x'}$, $\Delta_{x'} y_{x,x'}$.

Il suit aussi de ce qu'on a dit (n°. 1051), sur les fonctions génératrices des intégrales, que l'équation

$$\Sigma^m y_{x,x'} = \frac{1}{\{(1 + \Delta_x y_{x,x'})(1 + \Delta_{x'} y_{x,x'}) - 1\}^m};$$

doit avoir lieu dans les mêmes conditions que la précédente, et en remplaçant les puissances négatives des différences par des intégrales.

Dans les formules ci-dessus, les différences des variables x et x' sont égales à l'unité; mais il est visible que $u\left(\frac{1}{t^n t'^{n'}} - 1\right)^m$ est la fonction génératrice de la différence $\Delta'^m y_{x,x'}$, prise en faisant varier x de n et x' de n'; et en vertu de l'équation identique

$$u\left(\frac{1}{t^n t'^{n'}} - 1\right)^m = u\left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^n \left(1 + \frac{1}{t'} - 1\right)^{n'} - 1\right\}^m,$$

il viendra encore

$$\Delta'^m y_{x,x'} = \{(1 + \Delta_x y_{x,x'})^n (1 + \Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'} - 1\}^m$$

$$\Sigma'^m y_{x,x'} = \frac{1}{\{(1 + \Delta_x y_{x,x'})^n (1 + \Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'} - 1\}^m},$$

dans les mêmes conditions que ci-dessus, relativement aux exposans des différences.

Ces équations subsisteront encore, si l'on suppose que les différences de x et de x', au lieu d'être 1, relativement à $\Delta_x y_{x,x'}$ et à $\Delta_{x'} y_{x,x'}$, soient k et k'; mais alors, dans $\Delta' y_{x,x'}$, les différences de x et de x' seront respectivement kn et $k'n'$. En considérant k et k' comme infi-

niment petits, ou comme dx et dx', tandis que n et n' seront infinis, on pourra faire $kn = \alpha$, $k'n' = \alpha'$, α et α' désignant des quantités finies; dans cette hypothèse, $\Delta_x y_{x,x'}$ et $\Delta_{x'} y_{x,x'}$ deviendront les différentielles partielles de y, et se changeront par conséquent en $\frac{dy}{dx}dx$, $\frac{dy}{dx'}dx'$: on aura

$$(1 + \Delta_x y_{x,x'})^n = \left\{1 + \frac{dy}{dx}dx\right\}^n = c^{\alpha\frac{dy}{dx}}$$

$$(1 + \Delta_{x'} y_{x,x'})^{n'} = \left\{1 + \frac{dy}{dx'}dx'\right\}^{n'} = c^{\alpha'\frac{dy}{dx'}},$$

d'où on déduira

$$\Delta'^n y_{x,x'} = \left\{c^{\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha'\frac{dy}{dx'}} - 1\right\}^n$$

$$\Sigma'^n y_{x,x'} = \frac{1}{\left\{c^{\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha'\frac{dy}{dx'}} - 1\right\}^n}.$$

Supposons maintenant que les accroissemens n et n' soient infiniment petits, tandis que k et k' soient finis, ce qui changera nk en dx, $n'k'$ en dx', et $\Delta'^n y_{x,x'}$ en $d^n y$; nous aurons

$$(1+\Delta_x y_{x,x'})^n = (1+\Delta_x y_{x,x'})^{dx} = 1 + dx\,\mathrm{l}(1+\Delta_x y_{x,x'})$$

$$(1+\Delta_{x'} y_{x,x'}) = (1+\Delta_{x'} y_{x,x'})^{dx'} = 1 + dx'\,\mathrm{l}(1+\Delta_{x'} y_{x,x'}),$$

$$d^n y = \{[1 + dx\,\mathrm{l}(1+\Delta_x y_{x,x'})][1 + dx'\,\mathrm{l}(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})] - 1\}^n,$$

formule qui revient à

$$d^n y = \{dx\,\mathrm{l}(1+\Delta_x y_{x,x'}) + dx'\,\mathrm{l}(1+\Delta_{x'} y_{x,x'})\}^n.$$

On trouveroit facilement pour fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables, les formules correspondantes à celles qui précèdent.

CHAPITRE III.

Application du Calcul intégral à la Théorie des suites.

1058. L'INTÉGRATION des différentielles à une seule variable ayant conduit à des séries, on en a conclu qu'on pouvoit représenter une série par une intégrale, et comme on a des méthodes pour calculer, au moins par approximation, la valeur d'une intégrale entre des limites données (n°. 470), on a cherché à remonter d'une série à l'intégrale dont elle est un des développemens. C'est par ces considérations qu'Euler a créé, pour la sommation des séries et la recherche de leur terme général, des méthodes très-ingénieuses que nous allons faire connoître successivement.

De la sommation des séries.

La première de ces méthodes consiste à effectuer sur la série proposée des opérations telles que les résultats successifs conduisent en dernier lieu à une série que l'on sache sommer, ou qui soit semblable à la proposée.

La progression par quotiens (ou géométrique)

$$s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} \ldots\ldots + x^{a+(n-1)b},$$

est un des cas les plus simples. En passant le premier terme du second membre dans le premier membre, et ajoutant aux deux le terme x^{a+nb}, il vient

$$s - x^a + x^{a+nb} = x^{a+b} + x^{a+2b} \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{a+nb}$$
$$= x^b\{x^a + x^{a+b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x^{a+(n-1)b}\},$$

d'où on tire $s - x^a + x^{a+nb} = sx^b$; et par conséquent

$$s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}.$$

Les premières opérations de l'Algèbre suffisent non-seulement pour ce cas, mais encore pour toutes les séries dont le terme général est de la forme

$$(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \text{etc.})\, x^{a+(n-1)b};$$

ainsi qu'on peut le voir dans les Elémens d'Algèbre : passons donc aux artifices tirés du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

1058. Considérons d'abord la série

$$s = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + nx^n;$$

en multipliant tous les termes par $\frac{dx}{x}$, on obtiendra

$$\frac{s\,dx}{x} = dx + 2x\,dx + 3x^2dx \ldots\ldots\ldots\ldots + nx^{n-1}dx:$$

intégrant ensuite il viendra

$$\int \frac{s\,dx}{x} = x + x^2 + x^3 \ldots\ldots\ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x};$$

et en différentiant l'équation $\int \frac{s\,dx}{x} = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on aura

$$\frac{s\,dx}{x} = \frac{dx - (n+1)x^n dx + nx^{n+1}dx}{(1-x)^2},$$

d'où l'on déduira

$$s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

La série que nous venons de traiter est comprise dans cette autre plus générale

$$s = ax^{\alpha} + (a+b)x^{\alpha+\beta} + (a+2b)x^{\alpha+2\beta} + (a+3b)x^{\alpha+3\beta} + (a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\beta}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $px^r dx$, nous aurons

$$psx^r dx = apx^{\alpha+r}dx \ldots + (a+(n-1)b)px^{\alpha+(n-1)\beta+r}dx;$$

cette série se ramèneroit comme la précédente, à une progression par quotiens, si pour toutes les valeurs de n on avoit

$$(a+(n-1)b)p = \alpha + (n-1)\beta + r + 1,$$

ou $\quad ap - 1 + (n-1)bp = \alpha + r + (n-1)\beta;$

or c'est ce qui aura lieu si

$$ap-1=\alpha+r \text{ et } bp=\beta,$$

équations qui donnent $p=\frac{\beta}{b}$, $r=\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}$,

$$\frac{\beta}{b}\int x^{\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}} s\,dx = x^{\frac{a\beta}{b}} + x^{\frac{a\beta+b\beta}{b}} \ldots\ldots + x^{\frac{a\beta+(n-1)b\beta}{b}}$$

$$= \frac{x^{\frac{a\beta}{b}} - x^{\frac{a\beta+nb\beta}{b}}}{1-x^{\beta}},$$

d'où par la différentiation on conclura l'expression de s.

Si le terme général de la série proposée est de la forme

$$(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta},$$

et qu'on multiplie par $px^r dx$, les deux membres de l'équation,

$$s=(a+b)(c+e)x^{\alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots+(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta},$$

on pourra déterminer p et r de manière à faire disparoître, par l'intégration, un des facteurs du coefficient de chaque puissance de x, et cela, en rendant ce facteur égal à l'exposant augmenté de l'unité; on formera ainsi l'équation

$$pcn+pe=\alpha+(n-1)\beta+r+1,$$

d'où on tirera $\quad pc=\beta$, $pe=\alpha-\beta+r+1$ et

$$p=\frac{\beta}{c}, \qquad r=\frac{\beta e+\beta c-\alpha c-c}{c};$$

au moyen de ces valeurs, on aura

$$\frac{\beta}{c}\int s x^r dx=(a+b)x^{\alpha+r+1}\ldots\ldots+(an+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+r+1}.$$

La série du second membre, étant de la même forme que la précédente, on y substituera sa valeur, déterminée d'après ce qu'on a vu, et on aura ainsi une équation finie entre cette valeur et l'intégrale $\int s x^r dx$, qui conduira par la différentiation à l'expression de s.

On obtiendra immédiatement une équation finie du même genre

en multipliant par $p'x^{r'}$, les deux membres de celle que nous venons de trouver, et posant

$$(an+b)p' = \alpha + (n-1)\beta + r + r' + 2,$$

d'où l'on déduira

$$p' = \frac{\beta}{a}, \quad r' = \frac{\beta b - \alpha a + \beta a - ra - 2a}{a} = \frac{\beta bc - \beta ae - ac}{ac};$$

intégrant ensuite, il viendra

$$\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\frac{\beta bc - \beta ae - ac}{ac}} dx \int x^{\frac{\beta e + \beta c - \alpha c - c}{c}} s\,dx$$
$$= \frac{x^{\frac{\beta(a+b)}{a}} - x^{\frac{\beta(a+b+na)}{a}}}{1 - x^{\beta}} = x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right):$$

deux différentiations successives feront disparoître les signes $\int$ du premier membre, et conduiront à une équation dont il sera facile de tirer s.

Il est visible que le même procédé s'étend à toutes les séries dont le terme général est de la forme

$$(an+b)(cn+e)(fn+g)\ldots\ldots x^{\alpha+(n-1)\beta}.$$

1059. C'est en renversant ce procédé qu'on l'applique aux séries dont le terme général est de la forme

$$\frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{(an+b)(cn+e)(fn+g)\ldots\ldots\ldots\ldots}.$$

Soit d'abord

$$s = \frac{x^{\alpha}}{a+b}\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b};$$

on multipliera seulement par px^r, et on aura

$$psx^r = \frac{px^{\alpha+r}}{a+b}\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{px^{\alpha+(n-1)\beta+r}}{an+b};$$

on différentiera ensuite pour obtenir

$$px^r ds + rpsx^{r-1}dx = \frac{p(\alpha+r)x^{\alpha+r-1}dx}{a+b}\ldots\ldots + \frac{p(\alpha+(n-1)\beta+r)x^{\alpha+(n-1)\beta+r-1}dx}{an+b},$$

et on déterminera r et p de manière à rendre le coefficient du

numérateur égal au dénominateur, quelle que soit n. On fera donc
$an+b=p\alpha+p\beta n-p\beta+pr$, $a=p\beta$, $b=p\alpha-p\beta+pr$,
d'où il résultera $p=\frac{a}{\beta}$; $r=\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}$, et

$$\frac{ax^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}}ds+(a\beta-a\alpha+b\beta)x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}-1}sdx}{\beta dx}=$$

$$x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\ldots\ldots+x^{\frac{na\beta+b\beta-a}{a}}=x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right);$$

on conclura de là, par le secours de l'intégration,

$$\frac{a}{\beta}x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}}s=\int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$$

$$s=\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right).$$

L'intégrale indiquée dans cette formule doit s'évanouir lorsque $x=0$.

Pour avoir la limite de la série proposée, il faut prendre, au lieu de la somme de la progression par quotiens

$$x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}\ldots\ldots\ldots+x^{\frac{na\beta+b\beta-a}{a}},$$

sa limite, et il viendra

$$s=\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int\frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx}{1-x^{\beta}}.$$

Si l'on fait $x=1$, dans la série proposée, et qu'on suppose en même tems $\alpha=\beta=1$, elle deviendra seulement

$$s=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{na+b}.$$

On ne pourra pas établir l'hypothèse de $x=1$, dans les expressions différentielles; mais on fera $\alpha=\beta=1$, dans l'expression intégrale qui

qui se changera en $\frac{1}{ax^{\frac{a}{b}}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$, et qu'il faudra prendre

depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, pour obtenir la somme de la série particulière que nous considérons maintenant. La limite se trouveroit en faisant $\alpha=1$ et $\beta=1$, dans l'expression

$$\frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int\frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx}{1-x^{\beta}},$$ qui répond à la supposition de n

infinie, et d'où il résulteroit $\frac{1}{ax^{\frac{a}{b}}}\int\frac{x^{\frac{b}{a}}dx}{1-x}$, cette intégrale devant

être prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$. Voilà une nouvelle expression de la transcendante indiquée dans le n°. 925.

Passons à la série dont le terme général $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$ renferme deux facteurs à son dénominateur et où, pour abréger, nous avons mis x^n au lieu de $x^{\alpha+(n-1)\beta}$, ce qui ne diminue pas la généralité de l'expression. On aura, relativement à cette série, l'équation

$$px^rs=\frac{px^{1+r}}{(a+b)(c+e)}\cdots\cdots+\frac{px^{n+r}}{(an+b)(cn+e)},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{pd(x^rs)}{dx}=\frac{p(1+r)x^r}{(a+b)(c+e)}\cdots\cdots+\frac{p(n+r)x^{n+r-1}}{(an+b)(cn+e)}.$$

On peut toujours déterminer les nombres p et r de manière à faire disparoître l'un des facteurs du dénominateur, en posant

$pn+pr=an+b$, d'où il suit $p=a$, $r=\frac{b}{a}$, et

$$\frac{ad(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx}=\frac{x^{\frac{b}{a}}}{c+e}\cdots\cdots+\frac{x^{\frac{b}{a}+n-1}}{cn+e}.$$

Maintenant si l'on faisoit $\frac{a\,d(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx}=s'$, on auroit une série qui seroit dans le cas de celle que nous avons traitée plus haut; mais on arrive immédiatement au résultat en la multipliant par $p'x^{r'}$, ce qui conduit à

$$\frac{ap'x^{r'}d(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx}=\frac{p'x^{\frac{b}{a}+r'}}{c+e}\ldots\ldots\ldots+\frac{p'x^{\frac{b}{a}+n-1+r'}}{cn+e},$$

$$\frac{ap'd(x^{r'}(d(x^{\frac{b}{a}}s)))}{dx^2}=\frac{p'\left(\frac{b}{a}+r'\right)x^{\frac{b}{a}+r'-1}}{c+e}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{p'\left(\frac{b}{a}+n+r'-1\right)x^{\frac{b}{a}+n+r'-2}}{cn+e},$$

posant ensuite

$$\frac{p'b}{a}+p'n+p'r'-p'=cn+e,$$

il vient

$$p'=c,\quad r'=1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c},$$

et l'on a pour dernière transformée

$$\frac{acd(x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}d(x^{\frac{b}{a}}s))}{dx^2}=x^{\frac{e}{c}}\ldots\ldots+x^{\frac{e}{c}+n-1}$$

$$=x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

En intégrant deux fois de suite, puis tirant la valeur de s, on trouve

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

et en réduisant la double intégrale à des intégrales simples (n°. 486), il vient

$$s=\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)\,x^{\frac{b}{a}}}.$$

Il faut observer que cette dernière expression se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $bc=ae$, parce que la précédente étant alors

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int\frac{dx}{x}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right),$$

doit se ramener immédiatement à

$$s=\frac{1x\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}dx\,(1x)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{acx^{\frac{b}{a}}};$$

et que dans le cas où $bc=ae$, le produit $(an+b)(cn+e)$ devient $c(an+b)^2$, en y mettant pour e sa valeur.

Il est aisé de voir que si l'on vouloit obtenir la limite de la série proposée, il faudroit mettre sous les signes d'intégration, $\frac{1}{1-x}$ au lieu de $\frac{1-x^n}{1-x}$.

La méthode est générale, et s'étend à toutes les séries dont le dénominateur peut se décomposer en facteurs rationnels et du premier degré par rapport à n. En suivant la marche tracée dans les deux exemples précédens, on trouvera que la série, dont le terme général est

$$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)},$$

a pour somme

$$s=\frac{1}{acfx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1}dx\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right);$$

et réduisant à des intégrales simples, on obtiendra

$$s=\frac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bf-ag)(ef-cg)}+\frac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)(cg-ef)}$$
$$+\frac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)},$$

forme qui présente une loi très-simple, d'après laquelle on peut continuer ces expressions aussi loin qu'on voudra.

Lorsque le terme général sera

$$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)(hn+k)};$$

on aura

$$s=\frac{1}{acfhx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1}dx\int x^{\frac{g}{f}-\frac{k}{h}-1}dx\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

$$=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{ax^{-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)(ak-bh)}+\dfrac{cx^{-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)(cg-ef)(ck-eh)}\\[2ex]+\dfrac{fx^{-\frac{g}{f}}\int x^{\frac{g}{f}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bf-ag)(ef-cg)(fk-gh)}+\dfrac{hx^{-\frac{k}{h}}\int x^{\frac{k}{h}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bh-ak)(eh-ck)(gh-fk)}.\end{array}\right.$$

1060. Ces expressions donnent $\frac{0}{0}$ quand les facteurs du dénominateur du terme général sont égaux ; il est plus simple de chercher immédiatement, en supposant dans les calculs indiqués ci-dessus,

$$a=c=f=\text{etc.}\qquad b=g=h=\text{etc.}$$

les expressions qui conviennent à ce cas, que d'entreprendre de les déduire des précédentes. Lorsque le terme général est $\frac{x^n}{(an+b)^3}$,

on trouve

$$s=\frac{1}{a^2x^{\frac{b}{a}}}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

$$=\frac{(\mathrm{l}x)^2\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-2\,\mathrm{l}x\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)+\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^2\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2a^3x^{\frac{b}{a}}};$$

lorsque ce même terme est $\frac{x^n}{(an+b)^4}$, il vient

$$s=\frac{1}{1.2.3a^4x^{\frac{b}{a}}}\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{l}x)^3\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-3(\mathrm{l}x)^2\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\\ +3\,\mathrm{l}x\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^2\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^3\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right),\end{array}\right.$$

et pour l'expression $\frac{x^n}{(an+b)^m}$, on a en général

$$s=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)a^mx^{\frac{b}{a}}}\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{l}x)^{m-1}\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\frac{m-1}{1}(\mathrm{l}x)^{m-2}\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\\ +\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(\mathrm{l}x)^{m-3}\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^2\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\\ -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(\mathrm{l}x)^{m-4}\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^3\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)+\text{etc.}\end{array}\right.$$

Ces valeurs se simplifient beaucoup lorsqu'on y fait $x=1$, ce qui donne $\mathrm{l}x=0$, en dehors des intégrales seulement; on obtient alors

$$s=\pm\frac{\int x^{\frac{b}{a}}dx(\mathrm{l}x)^{m-1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2.3\ldots.(m-1)a^m},$$

pour la somme de la série dont le terme général est $\frac{1}{(an+b)^m}$, l'intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, le signe $+$ ayant

lieu si m est impaire, et le signe $-$ si m est paire. On comprend le double signe $\pm$ dans la formule, et écrivant $1\frac{1}{x}$ au lieu de $1x$, puisque $1\frac{1}{x} = -1x$, et on a

$$s = \frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx \left(1\frac{1}{x}\right)^{m-1} \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.2.3\ldots(m-1)a^m}.$$

Enfin on obtient les limites des séries proposées en mettant seulement $\frac{1}{1-x}$, au lieu de $\frac{1-x^n}{1-x}$.

1061. La combinaison des méthodes indiquées dans les trois n^{os}. précédens, conduit à la sommation des séries dont le terme général est $\frac{Ax^n}{B}$, les lettres A et B désignant des fonctions rationnelles et entières de n, décomposées en facteurs du premier degré. On fait disparoître successivement les facteurs du numérateur par des intégrations répétées, et ceux du dénominateur par des différentiations. L'exemple suivant suffira pour mettre sur la voie des applications.

Soit $\frac{\alpha n+\beta}{an+b} x^n$ le terme général de la série proposée; on multipliera par px^r les deux membres de l'équation

$$s = \frac{\alpha+\beta}{a+b} x + \frac{2\alpha+\beta}{2a+b} x^2 \ldots + \frac{\alpha n+\beta}{an+b} x^n,$$

et passant ensuite aux différentielles, celle du terme général sera

$$\frac{p(n+r)(\alpha n+\beta) x^{n+r-1} dx}{an+b};$$

on fera donc $pn = an$, $pr = b$, ce qui donnera cette équation

$$\frac{a\, d\left(s x^{\frac{b}{a}}\right)}{dx} = (\alpha+\beta) x^{\frac{b}{a}} + (2\alpha+\beta) x^{\frac{b}{a}+1} \ldots\ldots + (n\alpha+\beta) x^{\frac{b}{a}+n-1},$$

dont le second membre ne renferme plus de dénominateur. De nouvelles opérations, semblables à la précédente, feroient disparoître

les facteurs qui resteroient, si le dénominateur en contenoit plus d'un.

En multipliant la même équation par px^r; et prenant ensuite l'intégrale de chaque terme, celle du terme général sera

$$\frac{ap(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+r+n}}{b+ar+an};$$

le facteur $\alpha n+\beta$ du numérateur disparoîtra si l'on fait

$$a\alpha pn=an, \quad ap\beta=b+ar,$$

d'où il suit $\quad p=\frac{1}{\alpha}, \qquad r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a},$

$$\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}d(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots\ldots\ldots+x^{\frac{\beta}{\alpha}+n},$$

et par conséquent $\quad \frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}d(x^{\frac{b}{a}}s)=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right),$

on tire de là $\quad s=\dfrac{\alpha\int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}}d\left(x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right)}{ax^{\frac{b}{a}}}$

1062. Dans les séries que nous avons considérées ci-dessus; le nombre des facteurs, soit du numérateur, soit du dénominateur, étoit le même pour chaque terme; mais il est une classe de séries qu'Euler désigne sous le nom d'*hypergéométriques*, dans laquelle ce nombre augmente d'un terme à l'autre: la série

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b}x+\frac{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}{(a+b)(2a+b)}x^2\ldots\ldots\ldots+\frac{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(\alpha n+\beta)}{(a+b)\ldots\ldots\ldots(an+b)}x^n$$

est de cette classe. On va voir que leur sommation se ramène à l'intégration d'une équation différentielle.

Le cas le plus simple est celui dans lequel le terme général est de la forme

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(\alpha n+\beta)x^n;$$

par la méthode du n°. 1058 on fait disparoître le dernier facteur

$\alpha n+\beta$, et on ramène la série proposée à ce qu'elle seroit, si l'on en retranchoit le dernier terme. On obtient de cette manière

$$p\int s\,x^r dx=\frac{p(\alpha+\beta)x^{r+2}}{r+2}\ldots\ldots+\frac{p(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)x^{n+r+1}}{n+r+1};$$

posant $p(\alpha n+\beta)=n+r+1$, il vient $p=\frac{1}{\alpha}$, $r=\frac{\beta}{\alpha}-1$, et

$$\frac{1}{\alpha}\int s x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}dx=x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}+(\alpha+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}+2}\ldots+(\alpha+\beta)\ldots(\alpha(n-1)+\beta x)^{\frac{\beta}{\alpha}+n},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\int s x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}dx}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}-1=(\alpha+\beta)x\ldots\ldots+(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(n-1)+\beta)x^{n-1}$$

$$=s-(\alpha+\beta)\ldots(\alpha n+\beta)x^n;$$

et faisant pour abréger $(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)=A$, on a

$$\int s x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}dx=\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}(1+s-Ax^n).$$

Lorsqu'on délivre cette équation du signe $\int$, en la différentiant, elle conduit à

$$\alpha x^2 ds+((\alpha+\beta)x-1)sdx=((\alpha+\beta+\alpha n)Ax^{n+1}-(\alpha+\beta)x)dx,$$

équation du premier degré et du premier ordre, dont l'intégrale donnera l'expression de s.

Il peut arriver que chaque terme de la série proposée contienne deux ou un plus grand nombre de facteurs de plus que celui qui le précède ; il faut alors un nombre d'opérations successives égal à celui qui marque l'accroissement du nombre des facteurs d'un terme à l'autre. Si l'on avoit, par exemple

$$s=(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)x^2+\text{etc.}$$

une première opération semblable à celle qu'on vient d'effectuer ci-dessus, changeroit l'expression

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(2n-1)+\beta)x^n,$$

terme général de cette série, en

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(2n-2)+\beta)x^{\frac{n+\beta-\alpha}{2\alpha}},$$

et

et une seconde opération effectuée de manière à faire disparoître le facteur $(\alpha(2n-2)+\beta)$, réduira le résultat ci-dessus à

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(2n-3)+\beta)x^{n-1},$$

terme qui précède celui qu'on a pris pour le dernier dans la série primitive.

C'est encore par le même procédé qu'on traiteroit les séries dont le terme général est de la forme

$$(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta).(\gamma+\delta)(2\gamma+\delta)\ldots\ldots(\gamma n+\delta)x^n;$$

par une première opération on feroit disparoître le facteur $\alpha n+\beta$, et par une seconde le facteur $\gamma n+\delta$: en suivant la même marche, on s'éleveroit facilement aux séries dont les termes généraux renfermeroient trois ou un plus grand nombre de progressions de facteurs.

1063. Lorsque les facteurs sont au dénominateur, que l'on a, par exemple,

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)},$$

on employe la différentiation; il vient

$$\frac{pd(sx^r)}{dx}=\frac{p(r+1)x^r}{\alpha+\beta}\ldots\ldots+\frac{p(n+r)x^{n+r-1}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots(\alpha n+\beta)},$$

$pn+pr=\alpha n+\beta$, d'où $p=\alpha$, $r=\frac{\beta}{\alpha}$

$$\frac{pd(sx^r)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}dx}-1=\frac{x}{\alpha+\beta}\ldots\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(n-1)+\beta)}$$

$$=s-\frac{x^n}{A}.$$

En développant l'équation différentielle

$$\frac{pd(sx^r)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}dx}-1=s-\frac{x^n}{\beta},$$

on trouvera

$$ds+\frac{\beta dx-xdx}{\alpha x}s=\frac{(A-x^n)dx}{A\alpha},$$

équation qui s'intègre en la multipliant par $e^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, et donne

$$s = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} x^{-\frac{\beta}{\alpha}} \int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx \left(1 - \frac{x^n}{A}\right).$$

Deux opérations semblables à la précédente, effectuées successivement sur la série dont le terme général est

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha(2n-1)+\beta)};$$

ou dans laquelle le dénominateur d'un terme quelconque, renferme deux facteurs de plus que le dénominateur de celui qui le précède, la ramèneront à ce qu'elle seroit si l'on en retranchoit son dernier terme. Il en sera de même d'une série dont le terme général aura un dénominateur composé de deux classes de facteurs, et en général rien n'est plus aisé que de pousser l'application de la méthode aussi loin qu'elle peut aller.

Lorsque les facteurs du dénominateur sont élevés chacun à une même puissance, le calcul mène à des expressions plus simples. Quand le terme général est

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2\ldots\ldots(\alpha n+\beta)^2},$$

on trouve

$$\frac{\alpha^2 d\left(x d\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s\right)\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^2} - 1 = s - \frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2\ldots\ldots(\alpha n+\beta)^2};$$

pour le terme général

$$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^3\ldots\ldots(\alpha n+\beta)^3},$$

on obtient

$$\frac{\alpha^3 d\left(x d\left(x d\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s\right)\right)\right)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^3} - 1 = s - \frac{x^n}{(\alpha+\beta)^3\ldots\ldots(\alpha n+\beta)^3};$$

et ainsi de suite.

1064. Passons maintenant à la série dont le terme général est

$$\frac{(a+b)\ldots\ldots\ldots\ldots(an+b)}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha n+\beta)}x^n:$$

on obtient d'abord, par l'introduction du facteur px^r et l'intégration,

$$p\int sx^r dx = \frac{p(a+b)}{(r+2)(\alpha+\beta)}x^{r+2}\ldots + \frac{p(a+b)\ldots\ldots(an+b)}{(r+n+1)(\alpha+\beta)\ldots(\alpha n+\beta)}x^{r+n+1};$$

posant $apn+pb=r+n+1$, il vient $p=\frac{1}{a}$, $r=\frac{b-a}{a}$, et

$$\frac{\int x^{\frac{b-a}{a}}s\,dx}{a} = \frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{\alpha+\beta}\ldots\ldots + \frac{(a+b)\ldots(a(n-1)+b)x^{\frac{b}{a}+n}}{(\alpha+\beta)\ldots\ldots(\alpha n+\beta)};$$

multipliant ce résultat par px^r, puis prenant sa différentielle, en faisant $bp+apn+apr=a\alpha n+a\beta$, on trouve $p=\alpha$, $r=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}$,

$$\frac{\alpha d\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}}s\,dx\right)}{a x^{\frac{\beta}{\alpha}}dx} - 1 = s - \frac{(a+b)\ldots(an+b)}{(\alpha+\beta)\ldots(\alpha n+\beta)}x^n.$$

Cet exemple montre assez comment il faut opérer sur les autres cas compris dans la classe de séries dont il fait partie.

1065. Depuis le n°. 1062 nous n'avons donné que les sommes des séries proposées; mais il est visible qu'en supprimant dans leurs expressions le dernier terme de la série, on aura sa limite : on trouvera ainsi, pour la seconde série du n°. 1062,

$$\frac{\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}s\,dx}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} - 1 = s,$$

et faisant disparoître le signe d'intégration, on obtiendra une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dont l'intégrale donnera l'expression de s. Si l'on y change x en $-x$, et qu'on prenne le résultat total avec un signe contraire à celui dont il est affecté, on aura la limite de la série

$$(\alpha+\beta)x - (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)x^2 + \text{etc.}$$

Quand $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, la série précédente devient

$$s = 1.x - 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 - \text{etc.}$$

et l'on a l'équation

$$\frac{\int s x^{-1} dx}{x} - 1 = -s,$$

qui donne par la différentiation

$$\frac{s dx}{x} - dx = -x ds - s dx, \text{ ou } ds + \frac{s(x+1)}{x^2} dx = \frac{dx}{x};$$

cette dernière équation a pour intégrale

$$s = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx \ (\text{n}^\circ.\ 547).$$

Nous pouvons aussi déduire des formules ci-dessus l'expression de la limite de la série

$$s' = x - 1 x^2 + 1.2.x^3 - 1.2.3.x^4 + \text{etc.}$$

car, en la comparant à la précédente, on trouve que $s' = x - sx$, d'où il suit $ds' = dx - s dx - x ds$, et l'équation

$$\frac{s dx}{x} - dx = -x ds - s dx,$$

changée par ce moyen en

$$ds' + \frac{s' dx}{x^2} = \frac{dx}{x},$$

a pour intégrale

$$s' = e^{\frac{1}{x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}.$$

Nous ferons remarquer qu'on arrive immédiatement à ces derniers résultats, en combinant ensemble les équations

$$s' = x - 1.x^2 + 1.2.x^3 - 1.2.3.x^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{ds'}{dx} = 1 - 1.2 x + 1.2.3 x^2 - 1.2.3.4 x^3 + \text{etc.}$$

dont la seconde revient à $\frac{ds'}{dx} = \frac{x - s'}{x^2}$.

Si l'on fait $x=1$, après l'intégration, l'expression $s'=e\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ qui répond à cette hypothèse, est propre à faire connoître la limite de la série divergente

$$1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-\text{etc.}$$

dans laquelle est comprise celle dont nous nous sommes occupés déjà, n°. 1047 : on aura

$$1-1+2-6+24-120+\text{etc.}=e\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}.$$

L'intégrale $\int\frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x}$ peut se calculer par les divers moyens indiqués dans les n°s. 470 et suivans.

En ne prenant d'abord de la formule du n°. 480, que les termes multipliés par la première puissance de α, on aura

$$Y_n-Y=\alpha\{\tfrac{1}{2}Y'+Y'_1+Y'_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+Y'_{n-1}+\tfrac{1}{2}Y'_n\},$$

Y', Y'_1, etc. désignant les valeurs successives de la fonction $\frac{e.e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, comprises entre les deux limites $x=a$ et $x=b$ de l'intégrale, et n leur nombre.

En faisant $n=10$, il vient $\alpha=\frac{1}{10}$, à cause que les valeurs extrêmes de x sont 0 et 1 ; et l'on a pour la suite des valeurs de x,

$$\frac{0}{10},\ \frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{10},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{10},\ \frac{7}{10},\ \frac{8}{10},\ \frac{9}{10},\ 1,$$

pour celles de y

$$0,\ \frac{10}{e^{\frac{9}{1}}},\ \frac{10}{2e^{\frac{8}{2}}},\ \frac{10}{3e^{\frac{7}{3}}},\ \frac{10}{4e^{\frac{6}{4}}},\ \frac{10}{5e^{\frac{5}{5}}},\ \frac{10}{6e^{\frac{4}{6}}},\ \frac{10}{7e^{\frac{3}{7}}},\ \frac{10}{8e^{\frac{2}{8}}},\ \frac{10}{9e^{\frac{1}{9}}},\ \frac{10}{10e^{0}},$$

d'où l'on conclut

$$Y_n - Y = \frac{1}{e^{\frac{9}{1}}} + \frac{1}{2e^{\frac{8}{2}}} + \frac{1}{3e^{\frac{7}{3}}} + \frac{1}{4e^{\frac{6}{4}}} + \frac{1}{5e^{\frac{5}{5}}} + \frac{1}{6e^{\frac{4}{6}}} + \frac{1}{7e^{\frac{3}{7}}} + \frac{1}{8e^{\frac{2}{8}}} + \frac{1}{9e^{\frac{1}{9}}} + \frac{1}{20},$$

pour la première valeur approchée de l'intégrale $e\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}$.

Euler, en mettant pour le nombre e sa valeur 2,718281828 a trouvé

$$\frac{1}{e^{\frac{9}{1}}} = 0{,}00012340 \qquad \frac{1}{6e^{\frac{4}{6}}} = 0{,}08556950$$
$$\frac{1}{2e^{\frac{8}{2}}} = 0{,}00915782 \qquad \frac{1}{7e^{\frac{3}{7}}} = 0{,}09306270$$
$$\frac{1}{3e^{\frac{7}{3}}} = 0{,}03232324 \qquad \frac{1}{8e^{\frac{2}{8}}} = 0{,}09735002$$
$$\frac{1}{4e^{\frac{6}{4}}} = 0{,}05578253 \qquad \frac{1}{9e^{\frac{1}{9}}} = 0{,}09942656$$
$$\frac{1}{5e^{\frac{5}{5}}} = 0{,}07357587 \qquad \frac{1}{20} = 0{,}05000000.$$

la somme de ces nombres est 0,59637164. Il est visible qu'il suffit de retrancher ce résultat de l'unité pour obtenir la limite de la série

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \text{etc.}$$

l'on aura par ce moyen 0,40362836, nombre qui s'accorde dans les quatre premières décimales, avec celui du n°. 1047. On porteroit l'exactitude beaucoup plus loin encore en calculant un plus grand nombre de termes de la formule du n°. 480, et sur-tout en augmentant le nombre des valeurs intermédiaires de Y, ou en diminuant α.

L'expression $e\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}$ se transforme en $\int\frac{dv}{1 - lv}$, lorsqu'on

fait $e^{1-\frac{1}{x}} = v$, ou $x = \frac{1}{1-\mathrm{l}\,v}$: les limites de x étant o et 1, celles de v doivent être aussi o et 1. Si l'on intègre par parties la formule $\frac{1}{1-\mathrm{l}\,v}dv$, en opérant sur le facteur dv, il viendra

$$\int \frac{dv}{1-\mathrm{l}\,v} = \frac{dv}{1-\mathrm{l}\,v} - \frac{1.v}{(1-\mathrm{l}\,v)^2} + \frac{1.2.v}{(1-\mathrm{l}\,v)^3} - \frac{1.2.3.v}{(1-\mathrm{l}\,v)^4} + \text{etc.}$$

d'où il résulte la série

$$1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \text{etc.}$$

quand on prend $v = 1$. On obtiendra donc encore la valeur approchée de la limite de cette série en calculant celle de l'intégrale $\int \frac{dv}{1-\mathrm{l}\,v}$ par la méthode du n°. 480 (*).

(*) On ramèneroit à une fraction continue l'expression de s, en appliquant à l'équation différentielle $ds + \frac{s\,dx}{x^2} = \frac{dx}{x}$ la méthode du n°. 598, mais il est bon d'observer que l'on peut aussi déduire immédiatement de la série

$$1 - 1x + 1.2.x^2 - 1.2.3.x^3 + 1.2.3.4.x^4 - \text{etc.}$$

une fraction de cette espèce. En représentant la série proposée par A, Euler fait

$A = \frac{1}{1+B}$, d'où,

$$B = \frac{x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{x}{1+C}$$

$$C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{x}{1+D}$$

$$D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{2x}{1+E}$$

$$E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{2x}{1+F}$$

$$F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{3x}{1+G}$$

$$G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2 - \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{3x}{1+H}$$

$$H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x + \text{etc.}} \ldots\ldots = \frac{4x}{1+J};$$

1066, Passons à la première des séries considérées dans le n°. 1063 dont la somme est

$$s = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} x^{-\frac{\beta}{\alpha}} \int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx \left(1 - \frac{x^n}{A}\right).$$

En y supprimant le dernier terme $\frac{x^n}{A}$, nous aurons pour la limite

$$s = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{x}{\alpha}} x^{-\frac{\beta}{\alpha}} \int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx;$$

l'intégrale $\int e^{-\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ étant développée par parties, en opérant sur

---

La loi de ces expressions fait voir que l'on auroit

$$I = \frac{4x}{1+K}; \quad K = \frac{5x}{1+L}, \quad L = \frac{5x}{1+M}, \text{ etc,}$$

et par ce moyen on auroit

$$s = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}}}$$

cette fraction continue donne successivement, lorsqu'on y fait $\beta = 1$,

$$\frac{0}{1}, \ \frac{1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{4}{7}, \ \frac{8}{13}, \ \frac{20}{34}, \ \frac{44}{73}, \ \frac{124}{209}, \ \frac{300}{501},$$

valeurs qui sont alternativement plus petites et plus grandes que celles de s.

Il est facile de voir que l'on peut, par des procédés analogues au précédent, convertir en fraction continue toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

son

son premier facteur $e^{-\frac{x}{\alpha}}$, produit la série

$$-\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\frac{x}{\alpha}}\left\{1+\frac{\beta}{x}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{x^2}+\frac{\beta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)}{x^3}+\text{etc.}\right\};$$

Cette série s'arrêtera quand β sera un multiple de α; dans ce cas le dernier terme sera $-\alpha\{\beta(\beta-\alpha)\ldots\ldots\alpha\}$, quantité qui, prise avec le signe $+$, donnera la constante qu'il faudra joindre à l'intégrale pour qu'elle s'évanouisse par la supposition de $x=0$: nous conclurons de là que la limite de la série proposée sera alors

$$s=\beta(\beta-\alpha)\ldots\ldots\alpha e^{\frac{x}{\alpha}}-\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}}\left\{1+\frac{\beta}{x}+\frac{\beta(\beta-\alpha)}{x^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Si l'on fait $\beta=0$, il viendra seulement $s=e^{\frac{x}{\alpha}}-1$, résultat qui est en effet la somme de la série

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{1.2\,\alpha^2}+\frac{x^3}{1.2.3\alpha^3}+\text{etc.}$$

dans laquelle l'hypothèse établie change la série proposée; lorsque $\beta=\alpha$ et $\beta=2\alpha$, on trouve successivement

$$s=\frac{\alpha e^{\frac{x}{\alpha}}}{x}-1-\frac{\alpha}{x},\ \text{et}\ s=\frac{2\alpha^2 e^{\frac{x}{\alpha}}}{x^2}-1-\frac{2\alpha}{x}-\frac{2\alpha^2}{x^2}.$$

Il est facile de pratiquer sur les autres classes de séries ce que nous venons de faire sur les précédentes.

1067. Nous allons parvenir dans cet article à une formule fort élégante que Parseval a donnée dans un Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles, et au moyen de laquelle il obtient la limite de la série

$$AA'+BB'+CC'+DD'+\text{etc.}$$

toutes les fois que celles des séries

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

$$A'+B'\frac{1}{x}+C'\frac{1}{x^2}+D'\frac{1}{x^3}+\text{etc.}$$

sont connues. Soient X et X' ces limites; il est visible que le

produit des deux séries ci-dessus renfermera trois espèces de termes : 1°. des termes délivrés de x, qui s'obtiennent en multipliant entr'eux les termes correspondans de chaque série, 2°. des termes contenant des puissances positives de x, 3°. des termes contenant des puissances négatives ; ce produit sera donc de la forme

$$AA'+BB'+CC'+DD'\ldots\ldots+\{\alpha x^m\}+\left\{\beta\frac{1}{x^m}\right\}=XX',$$

en désignant par $\{\alpha x^m\}$ tous les termes affectés des puissances positives de x, et par $\left\{\beta\frac{1}{x^m}\right\}$ tous ceux qui n'en contiennent que de négatives. Cela posé, si dans cette équation l'on fait successivement

$$x=\cos u+\sqrt{-1}\sin u,\quad x=\cos u-\sqrt{-1}\sin u;$$

on obtiendra deux résultats de la forme

$$\left.\begin{array}{l}AA'+BB'+CC'+DD'\ldots+\{\alpha(\cos m u+\sqrt{-1}\sin m u)\}\\ \qquad+\{\beta(\cos -mu+\sqrt{-1}\sin -mu)\}\end{array}\right\}=U'$$

$$\left.\begin{array}{l}AA'+BB'+CC'+DD'\ldots+\{\alpha(\cos m u-\sqrt{-1}\sin m u)\}\\ \qquad+\{\beta(\cos -mu-\sqrt{-1}\sin -mu)\}\end{array}\right\}=U',$$

U et U' désignant ce que deviennent X et X' par ces substitutions ; mais comme

$$\cos -mu=\cos m u,\qquad \sin -m u=-\sin m u;$$

on déduira de ce qui précède, cette nouvelle équation :

$$2(AA'+BB'+CC'+DD'\ldots)+2\{\alpha\cos mu\}+2\{\beta\cos mu\}=U+U',$$

où il s'agit de faire disparoître les termes affectés de $\cos mu$. Or c'est ce qui s'effectue en multipliant chaque terme de l'équation par du et prenant son intégrale, depuis $u=0$, jusqu'à $u=\pi$, ou la demi-circonférence, puisque l'expression $\int du\cos mu=\frac{1}{m}\sin mu$ est nulle entre ces deux limites ; on aura ainsi

$$2\pi(AA'+BB'+CC'+DD'\ldots\ldots)=\int(U+U')\,du,$$

d'où l'on conclura

$$AA'+BB'+CC'+DD'\ldots\ldots=\frac{1}{2\pi}\int(U+U')\,du,$$

l'intégrale $\int (U+U')du$ étant prise depuis $u=0$, jusqu'à $u=\pi$.

Cette formule nous servira dans la suite à intégrer quelques équations différentielles partielles ; à la vérité elle a l'inconvénient d'introduire dans le calcul des imaginaires qui doivent se détruire, et exige par conséquent l'emploi de quelques artifices semblables à ceux dont nous avons fait usage dans l'intégration des équations différentielles du premier degré.

1068. Nous rapprocherons de ce résultat une formule analogue mais moins générale, donnée par Euler.

Si l'on a $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}=X$,
et que la suite des quantités

$$A',\quad B',\quad C',\quad D',\quad E',\ \text{etc.}$$

conduise à des différences constantes, dans un ordre quelconque ; la limite de la série

$$AA'+BB'x+CC'x^2+DD'x^3+EE'x^4+\text{etc.}$$

sera

$$A'X+\frac{x\Delta A'}{1}\,\frac{dX}{dx}+\frac{x^2\Delta^2 A'}{1.2}\,\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{x^3\Delta^3 A'}{1.2.3}\,\frac{d^3X}{dx^3}+\text{etc.}$$

expression qui se terminera lorsque l'on aura $\Delta^n A=0$. On y parvient en formant les équations

$$\alpha A+\alpha Bx+\alpha Cx^2+\alpha Dx^3+\alpha Ex^4+\text{etc.}=\alpha X$$

$$\beta Bx+2\beta Cx^2+3\beta Dx^3+4\beta Ex^4+\text{etc.}=\frac{\beta x}{1}\,\frac{dX}{dx}$$

$$+\ \gamma Cx^2+3\gamma Dx^3+6\gamma Ex^4+\text{etc.}=\frac{\gamma x^2}{1.2}\,\frac{d^2X}{dx^2}$$

$$+\ \delta Dx^3+4\delta Ex^4+\text{etc.}=\frac{\delta x^3}{1.2.3}\,\frac{d^3X}{dx^3}$$

$$+\ \varepsilon Ex^4+\text{etc.}=\frac{\varepsilon x^4}{1.2.3.4}\,\frac{d^4X}{dx^4}$$

etc.

dans lesquelles α, β, γ, δ, ε, etc. désignent des coefficiens indéterminés, et en les ajoutant entr'elles pour comparer leur somme à

$$AA'+BB'x+CC'x^2+DD'x^3+EE'x^4+\text{etc.}$$

on tire de là

$$\left.\begin{array}{l} A'=\alpha \\ B'=\alpha+\beta \\ C'=\alpha+2\beta+\gamma \\ D=\alpha+3\beta+3\gamma+\delta \\ E=\alpha+4\beta+6\gamma+4\delta+\iota \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{et} \left\{\begin{array}{l} \alpha=A' \\ \beta=B'-A'=\Delta A' \\ \gamma=C'-2B'+A'=\Delta^2 A' \\ \delta=D'-3C'+3B'-A'=\Delta^3 A' \\ \iota=E'-4D'+6C'-4B'+A'=\Delta^4 A' \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

d'où il résulte la formule posée ci-dessus. Nous ferons remarquer que si X, au lieu de représenter la limite de la première série, n'est que la somme d'un nombre donné de ses termes, on aura alors la somme d'une portion correspondante de la série proposée.

1069. C'est encore par des intégrales définies que Lagrange est parvenu, dans sa *Théorie des Fonctions analytiques*, à l'expression de la limite d'une portion quelconque de la suite

$$y+\frac{dy}{dx}\,\frac{h}{1}+\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Il avoit trouvé d'abord que si l'on mettoit $x+(1-z)h$, au lieu de x, dans la fonction y et dans ses différentielles, et qu'on désignât les résultats par Y, dY, etc. la limite de la portion

$$\frac{d^my}{dx^m}\,\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}+\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\,\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots\ldots(m+1)}+\text{etc.}$$

qui reste de la série ci-dessus, lorsqu'on en a retranché les m premiers termes, est égale au développement de l'intégrale

$$\frac{h^m}{1.2\ldots(m-1)}\int z^{m-1}dz\,\frac{d^mY}{dx^m},$$

prise depuis $z=0$, jusqu'à $z=1$. Ce résultat est facile à vérifier en l'intégrant par parties; car il se change en

$$\frac{h^m}{1.2\ldots(m-1)}\left\{\frac{z^m}{m}\,\frac{d^mY}{dx^m}-\int\frac{z^m}{m}\,dz\,\frac{d^{m+1}Y}{dx^m dz}\right\}:$$

or il est visible que lorsque $z=1$, on a $\frac{d^mY}{dx^m}=\frac{d^my}{dx}$, et que, quel que soit z, $\frac{d^{m+1}Y}{dx^m dz}=-h\frac{d^{m+1}Y}{dx^{m+1}}$, puisque $\frac{d^mY}{dx^m}$ est une fonction

de $x+(1-z)h$ (n°. 82); il vient par conséquent

$$\frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m}+\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots m}\int z^m dz\,\frac{d^{m+1}Y}{dx^{m+1}},$$

d'où, par une transformation semblable à la précédente, on tireroit le terme $\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$, et ainsi de suite.

Cette expression est présentée d'une manière un peu différente dans la *Théorie des Fonctions analytiques*. Lagrange y suppose que la fonction $f(x-xz)$, se change en $f(x)$, lorsque $x-xz$ devient $(x-xz)+xz$ ou x; et suivant la notation dont nous avons fait usage dans le n°. 5, il obtient cette équation

$$f(x)=f(x-xz)+\frac{xz}{1}f'(x-xz)+\frac{x^2z^2}{1.2}f''(x-xz)+\frac{x^3z^3}{1.2.3}f'''(x-xz)+\text{etc.}$$

équivalente à celle-ci

$$y=Y+\frac{xz}{1}\frac{dY}{dx'}+\frac{x^2z^2}{1.2}\frac{d^2Y}{dx'^2}+\frac{x^3z^3}{1.2.3}\frac{d^3Y}{dx'^3}+\text{etc.}$$

dans laquelle Y désigne ce que devient y, lorsqu'on y change x en $x-xz$, et x' représente $x-xz$. Si l'on fait en premier lieu

$$y=Y+xP,$$

P étant une fonction inconnue de z, et qu'on prenne de part et d'autre les différentielles par rapport à z, il viendra

$$0=\frac{dY}{dz}+x\frac{dP}{dz};$$

or,
$$\frac{dY}{dx'}dx'=\frac{dY}{dx'}(1-z)\,dx-\frac{dY}{dx'}x\,dz,$$

puisque $dx'=(1-z)\,dx-x\,dz$: il suit de là que $\frac{dY}{dz}=-x\frac{dY}{dx'}$, et que par conséquent

$$\frac{dP}{dz}=\frac{dY}{dx'},\text{ ou } P=\int dz\frac{dY}{dx'};$$

mais comme Y se change en y lorsque $z=0$, il faudra que l'intégrale ci-dessus soit nulle lorsque $z=0$.

Supposant ensuite que

$$y=Y+\frac{xz}{1}\frac{dY}{dx'}+x^2Q,$$

et différentiant par rapport à z, il viendra

$$o = \frac{dY}{dz} + x\frac{dY}{dx'} + xz\frac{d^2Y}{dx'dz} + x^2\frac{dQ}{dz},$$

équation qui se réduit à

$$o = -z\frac{d^2Y}{dx'^2} + \frac{dQ}{dz},$$

à cause que $\frac{dY}{dz} = -x\frac{dY}{dx'}$, et $\frac{d^2Y}{dx'dz} = -x\frac{d^2Y}{dx'^2}$; on aura donc

$$\frac{dQ}{dz} = z\frac{d^2Y}{dx'^2}, \text{ et } Q = \int\frac{zdz}{1}\frac{d^2Y}{dx'^2}.$$

Par le même procédé on tire de l'équation

$$y = Y + \frac{xz}{1}\frac{dY}{dx'} + \frac{x^2z^2}{1.2}\frac{d^2Y}{dx'^2} + x^3R, \quad \frac{dR}{dz} = \int\frac{z^2dz}{1.2}\frac{d^3Y}{dx'^3},$$

en faisant les réductions qui peuvent résulter des équations précédentes, et en observant qu'en général $\frac{d^mY}{dx'^{m-1}dz} = -x\frac{d^mY}{dx'^m}$.

La formule générale, qui renferme toutes les précédentes, est visiblement

$$y = Y + \frac{xz}{1}\frac{dY}{dx'}\ldots + \frac{(xz)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}Y}{dx'^{m-1}} + x^m\int\frac{z^{m-1}dz}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^mY}{dx'^m},$$

l'intégrale devant être nulle lorsque $z = o$.

Quand on suppose $z = 1$, les fonctions Y, $\frac{dY}{dx'}$, $\frac{d^2Y}{dx'^2}$, etc. ne sont autre chose que ce que deviennent y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. lorsque $x = o$, puisque dans la première hypothèse, la quantité $x - xz$ se réduit à o. La formule ci-dessus donne donc, dans ce cas, pour le développement de la fonction y, suivant les puissances de x, jusqu'à la m^{eme} inclusivement

$$y_o + \frac{x}{1}\frac{dy}{dx}\ldots + \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + x^m\int\frac{z^{m-1}dz}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^mY}{dx'^m};$$

l'intégrale qui termine ce résultat étant prise depuis $z = o$, jusqu'à $z = 1$.

Maintenant si l'on change x en h, x' en $h' = (1-z)h$, il viendra

$$y_o + \frac{h}{1}\frac{dy}{dh} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dh^2}\ldots + \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}y}{dh^{m-1}} + h^m\int\frac{z^{m-1}dz}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^mY}{dh'^m};$$

puis supposant que y, au lieu de représenter une fonction de h seule, en désigne une de $x+h$, le premier terme y_0 sera une fonction de x seul, les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dh}$, $\frac{d^2y}{dh^2}$, etc. calculés, en faisant $h=0$, après la différentiation, se changeront en $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. et enfin il faudra substituer $x+h'$, ou $x+(1-z)h$, au lieu de x, pour passer de y à Y: on aura ainsi

$$y+\frac{h}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+h^m\int\frac{z^{m-1}dz}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^mY}{dx'^m},$$

en observant que $\frac{d^mY}{dh'^m}=\frac{d^mY}{dx'^m}$. Cette formule qui représente le développement d'une fonction de $x+h$, poussé jusqu'au m^{ieme} terme, est la même que celle que nous avons donnée en premier lieu.

Nous aurions pu y parvenir immédiatement en mettant dans y, $x+(1-z)h$, ou $x+h-hz=x'$, au lieu de x, ce qui auroit fait de Y une fonction de $x+h-hz$; désignant alors par y_1, ce que devient y quand on y change x en $x+h$, et développant y_1, suivant les puissances de hz, il seroit venu

$$y_1=Y+\frac{hz}{1}\frac{dY}{dx'}+\frac{h^2z^2}{1.2}\frac{d^2Y}{dx'^2}+\frac{h^3z^3}{1.2.3}\frac{d^3Y}{dx'^3}+\text{etc.}$$

d'où l'on auroit déduit les quantités P, Q, R, etc. comme ci-dessus: mais nous avons préféré de traduire littéralement, dans l'algorithme différentiel, l'un des résultats les plus remarquables qu'offre la *Théorie des Fonctions analytiques*, pour montrer que la notation ordinaire ne lui fait rien perdre de sa simplicité et de son élégance.

1070. L'intégrale $h^m\int\frac{z^{m-1}dz}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^mY}{dx'^m}$ donne la valeur rigoureuse du reste de la série; mais si l'on ne vouloit avoir que des limites entre lesquelles fut comprise cette valeur, on trouveroit, par les considérations du n°. 475, que si L et l désignent la plus grande et la plus petite valeur que prend la fonction $\frac{d^mY}{dx'^m}$, depuis $z=0$,

jusqu'à $z=1$, l'intégrale $\int z^{m-1}dz\frac{d^mY}{dx'^m}$ seroit moindre que $\frac{L}{m}$, et plus grande que $\frac{l}{m}$.

Il est évident qu'il doit y avoir entre L et l une valeur λ qui rende la fraction $\frac{\lambda}{m}$ exactement égale à $\int z^{m-1}dz\frac{d^mY}{dx'^m}$, et que cette valeur répond aussi à une valeur de z comprise entre o et 1; mais toutes les valeurs que reçoit une fonction de $x+(1-z)h$, entre les limites $z=0$, $z=1$, sont visiblement les mêmes que celles que prendroit une semblable fonction de $x+h$, entre les limites x et $x+h$; si donc on désigne par u la valeur de h, qui correspond à λ, et par y_u, ce que devient y, lorsque l'on y met $x+u$, au lieu de x, on aura $\lambda=\frac{d^my_u}{dx^m}$. On conclura de là, ces développemens partiels et rigoureux de la fonction y, lorsqu'on change x en $x+h$:

$$y_1=y+\frac{h}{1}\frac{dy_u}{dx}$$

$$y_1=y+\frac{h}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y_u}{dx^2}$$

$$y_1=y+\frac{h}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y_u}{dx^3}$$

....

$$y_1=y+\frac{h}{1}\frac{dy}{dx}\ldots\ldots\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{d^my_u}{dx^m},$$

en observant que x doit être remplacé par $x+u$ dans le dernier terme seulement, et que l'indéterminée u est comprise entre les limites o et h.

Pour mieux faire sentir l'usage de ces formules, nous supposerons que $y=x^n$; et en développant jusqu'au m^{eme} terme, il viendra

$$x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}h\ldots\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+2)}{1.2\ldots\ldots\ldots(m-1)}x^{n-m+1}h^{m-1}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots m}(x+u)^{n-m}h^m.$$

Il est évident que la valeur de $(x+u)^{n-m}$ est nécessairement comprise entre

entre x^{n-m} et $(x+h)^{n-m}$, et que par conséquent la somme des termes, qui dans le développement de $(x+h)^n$ suivent le m^{eme}, est comprise entre

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots m}x^{n-m}h^m \text{ et } \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots m}(x+h)^{n-m}h^m.$$

Après cet exemple Lagrange ajoute:

« La perfection des méthodes d'approximation, dans lesquelles » on employe les séries, dépend non-seulement de la convergence » des séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui » résulte des termes qu'on néglige, et à cet égard on peut dire que » presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage » dans la solution des problêmes géométriques et méchaniques, sont » encore très-imparfaites. Le théorême précédent pourra servir dans » beaucoup d'occasions à donner à ces méthodes la perfection qui » leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les » employer ». (*Théorie des Fonctions analytiques*, page 50.)

1071. Avant que le Calcul intégral fût porté au degré de perfection qu'il a acquis de nos jours, Wallis et Stirling avoient employé l'interpolation des séries à évaluer des intégrales qui ne pouvoient s'obtenir que pour des exposans entiers. Wallis, par exemple, sachant quarrer les courbes dont les ordonnées étoient exprimées par De l'interpolation des séries.

$$(1-x^2)^0, \quad (1-x^2)^1, \quad (1-x^2)^2, \quad (1-x^2)^3, \text{ etc.}$$

inventa la Méthode d'interpolation pour en déduire l'aire des courbes dont les ordonnées étoient

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \quad \text{etc.}$$

fonctions que l'on peut regarder comme les termes intermédiaires de la première suite; et il parvint de cette manière à la singulière expression de la circonférence du cercle que nous avons rapportée n°. 945. Stirling continua et perfectionna les travaux de Wallis; mais Euler imagina de renverser la question et d'appliquer la connoissance de l'intégrale à l'interpolation de la série, et c'est ce que nous allons faire d'après lui. Nous avons déjà donné dans le n°. 964

un exemple de cette recherche, mais nous allons la reprendre de nouveau.

Soit en premier lieu l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$, de laquelle on déduit par le développement de $(1-x)^n$ la série

$$\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{n\,x^{m+2}}{1.(m+2)}+\frac{n(n-1)x^{m+3}}{1.2.(m+3)}+\frac{n(n-1)(n-2)x^{m+4}}{1.2.3(m+4)}+\text{etc.}$$

qui s'évanouit lorsque $x=0$, et qui, lorsque $x=1$, devient

$$\frac{1}{m+1}-\frac{n}{1(m+2)}+\frac{n(n-1)}{1.2(m+3)}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3(m+4)}+\text{etc.}$$

Si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc. on aura

$$\frac{1}{m+1},$$

$$\frac{1}{m+1}-\frac{1}{1(m+2)}=\frac{1}{(m+1)(m+2)};$$

$$\frac{1}{m+1}-\frac{2}{1(m+2)}+\frac{2.1}{1.2(m+3)}=\frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)};$$

etc.

en suivant cette loi, on voit que le terme général de la série, lorsque n est un nombre entier, a pour expression

$$\frac{1.2\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)},$$

et telle est aussi la valeur de l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$, prise entre les limites 0 et 1, ainsi qu'on peut s'en assurer immédiatement en intégrant par parties relativement au facteur $x^m dx$, ce qui donne

$$\int x^m dx(1-x)^n=\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n+\frac{nx^{m+2}}{(m+1)(m+2)}(1-x)^{n-1}$$
$$+\frac{n(n-1)x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\cdots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots 1x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)};$$

toute cette série s'évanouit lorsque $x=0$, et se réduit à son dernier terme $\quad\frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}$, lorsque $x=1$.

La loi de continuité qui lie tous les résultats que l'on tire d'une même formule, fait voir que si l'on donne aux exposans m et n des valeurs fractionnaires, l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$, qui devient

alors transcendante, doit exprimer les termes intermédiaires de la série ci-dessus. De même l'intégrale $\int p\,dx$, dans laquelle p désigne une fonction de x et de n, étant prise de manière à s'évanouir lorsque $x=0$, peut représenter le terme général d'une série dont n seroit l'indice. Ce seroit une découverte bien importante pour l'Analyse, de savoir revenir de la série à l'intégrale qui en exprime le terme général, sur-tout si l'on avoit des procédés sûrs et faciles pour obtenir dans tous les cas la valeur approchée d'une intégrale. Malheureusement l'Analyse n'offre encore aucun de ces moyens, et l'on a presque toujours déduit les séries des intégrales par le moyen des valeurs algébriques qu'elles fournissent. Voici les principaux résultats qu'Euler tire de la formule $\int x^m dx\,(1-x)^n$.

En faisant d'abord $m=\frac{1}{2}$, il obtient la série

$$\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\ldots\ldots\ldots+\frac{2.4.6\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)},$$

et $\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^n$ pour l'expression intégrale de son terme général, d'où il conclut que le terme général, qui répond à l'indice $\frac{1}{2}$, est égal à $\int dx\sqrt{x-x^2}$, c'est-à-dire, à l'aire du cercle dont le diamètre est 1.

On a également, par ce qui précède,

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}=\frac{1}{\int x^m dx(1-x)^n};$$

si dans cette équation l'on change $m+n$ en m, et par conséquent $m+1$ en $m-n+1$, elle deviendra

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=\frac{1}{\int x^{m-n}dx(1-x)^n},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}=\frac{1}{(m+1)\int x^{m-n}dx(1-x)^n}.$$

Voilà l'expression du coefficient numérique du terme général de la puissance n du binome.

En se servant de l'expression $\int x^m dx(1-x^n)^p$, intégrée par parties

relativement au premier facteur $x^m dx$, on obtient ce résultat

$$\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x^n)^p+\frac{pn}{(m+1)(m+n+1)}x^{m+n+1}(1+x^n)^{p-1}$$
$$+\frac{pn(pn-n)}{(m+1)(m+n+1)(m+2n+1)}x^{m+2n+1}(1-x^n)^{p-2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+\frac{pn(pn-n)(pn-2n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+n+1)\ldots\ldots(m+pn+1)}x^{m+pn+1},$$

qui se réduit à

$$\frac{pn(pn-n)(pn-2n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+n+1)\ldots\ldots(m+pn+1)},$$

lorsque $x=1$.

Si l'on met $m-1$ au lieu de m, et qu'on écrive les facteurs du numérateur dans un ordre inverse, on aura ce résultat aussi simple que remarquable

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p=\frac{n^p}{m}\cdot\frac{1}{m+n}\cdot\frac{2}{m+2n}\cdot\frac{3}{m+3n}\cdot\ldots\ldots\frac{p}{m+pn}.$$

Il est visible que les conditions de l'intégration, supposent que les nombres $m-1$ et n soient positifs ; car sans cela les parties du développement qui doivent disparoître lorsque $x=0$ et lorsque $x=1$, deviendroient infinies.

On tire de l'équation ci-dessus

$$1.2\ldots\ldots p=m(m+n)\ldots\ldots(m+pn)\int\frac{x^{m-1}dx(1-x^n)^p}{n^p},$$

et faisant $n=0$, il vient

$$1.2\ldots\ldots p=m^{p+1}\int\frac{x^{m-1}dx(1-x^0)^p}{0^p};$$

supposant alors sous le signe $\int$ que n est une quantité très-petite k (n°. 139), on trouvera que

$$x^k=e^{k1x}=1+k1x,\quad (1-x^k)^p=k^p(-1x)^p=k^p\left(1\frac{1}{x}\right)^p;$$

ainsi

$$1.2\ldots\ldots p=m^{p+1}\int x^{m-1}dx\left(1\frac{1}{x}\right)^p,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons déduit immédiatement de l'intégrale $\int x^m dx(1x)^s$ dans le n°. 428.

On simplifie un peu cette expression en changeant x^m en x, et par

conséquent $mx^{m-1}dx$ en dx, $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{\frac{1}{x^m}}$, $l\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{m}l\frac{1}{x}$: il résulte de là que

$$1.2. \ldots\ldots p = \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^p.$$

Il suit évidemment de ce qu'on vient de voir que

$$(m+n)(m+2n)\ldots\ldots(m+pn) = \frac{n^p}{m}\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p}.$$

1072. En rapportant à la notation de Vandermonde (n°. 902), les divers résultats obtenus ci-dessus, nous aurons

1°. $[p]^p = \int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^p$,

2°. $[m+pn, n]^p = n^p\left[\frac{m}{n}+p\right]^p = \frac{n^p}{m}\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p}$,

3°. $\frac{[p]^p}{[m+pn, n]^p} = n^{-p}[p]^p\left[\frac{m}{n}\right]^{-p} = \frac{m}{n^p}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p$.

Ces théorêmes donnent les expressions des puissances du second ordre en intégrales définies, et fournissent par conséquent les moyens de trouver les puissances fractionnaires de cet ordre. Il est bon d'observer que le dernier théorême rentre dans les formules du n°. 964.

1073. Par la combinaison de ces formules on obtiendroit un grand nombre de résultats particuliers, fort intéressans, mais qui n'offrant aucune difficulté, se présenteront d'eux-mêmes au lecteur intelligent lorsqu'il en aura besoin. En prenant des expressions intégrales plus composées, on étendra ces recherches à des séries nouvelles; on pourra même, pour plus de généralité, considérer des intégrales doubles, triples, etc.

$$\int q\,dx \int p\,dx, \quad \int r\,dx \int q\,dx \int p\,dx, \text{ etc.}$$

Euler donne pour exemple de la première forme, l'expression $\int\frac{dx}{x}\int x^m dx(1-x)^n$, dont le développement en série est

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} - \frac{nx^{m+2}}{1.(m+2)^2} + \frac{n(n-1)x^{m+3}}{1.2.(m+3)^2} + \text{etc.}$$

ce développement pris entre les limites o et 1, et en faisant successivement $n=0, =1, =2, =3$, etc. donne lieu à la suite

$$\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{(m+2)^2-(m+1)^2}{(m+2)^2(m+1)^2}+\frac{(m+3)^2(m+2)^2-2(m+3)^2(m+1)^2+(m+2)^2(m+1)^2}{(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2}$$
$$+\frac{(m+4)^2(m+3)^2(m+2)^2-3(m+4)^2(m+3)^2(m+1)^2+3(m+4)^2(m+2)^2(m+1)^2-(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2}{(m+4)^2(m+3)^2(m+2)^2(m+1)^2}$$
$$+\text{ etc.}$$

dont la loi est très-évidente, Si l'on fait $m=0$, on aura la suite

$$\frac{1}{1}+\frac{4-1}{4.1}+\frac{9.4-2.9.1+4.1}{9.4.1}+\frac{16.9.4-3.16.9.1+3.16.4.1-9.4.1}{16.9.4.1}+\text{ etc,}$$

dont les différences forment la suite

$$-\frac{1}{4.1},\quad -\frac{9-4}{9.4.1},\quad -\frac{16.9.-2.16+9.4}{16.9.4.1},\ \text{etc.}$$

et dont la somme $\int\frac{dx}{x}\int dx(1-x)^n$ se change en

$\int\frac{dx}{x}\left(\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)$, lorsqu'on effectue la première intégration.

1074. Euler parvient, au moyen des résultats ci-dessus, à une interpolation très-digne de remarque, c'est celle des fonctions différentielles. De même qu'entre les puissances entières, on insère par l'extraction des racines des puissances fractionnaires, de même aussi l'on peut concevoir des termes intermédiaires dans la série

$$V,\quad dV,\quad d^2V,\quad d^3V,\ldots\ldots. d^nV,$$

des différentielles d'une même fonction, et désigner ces termes par un indice fractionnaire qui marque le rang qu'ils occupent dans la série proposée. Il ne sera pas plus possible d'interpréter ces quantités par des différentiations successives, que d'expliquer les puissances fractionnaires par des multiplications répétées; mais les formules $d^{\frac{1}{2}}V$ et $V^{\frac{1}{2}}$ seront des expressions formées par analogie, l'une dans la série des différentielles, l'autre dans celle des puissances. L'Analyse offre une foule d'expressions de ce genre, qui tiennent presque toutes aux théories les plus importantes et les plus délicates; et les réflexions que j'ai exposées dans le n°. 965, me portent à croire que leur considération peut contribuer beaucoup aux progrès de la science du calcul.

Soit pour exemple $V = v^m$; lorsque n est un nombre entier, on a, quelle que soit m,

$$d^n(v^m) = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)v^{m-n}dv^n = \frac{\overset{m}{[m]}}{\underset{}{\overset{m-n}{[m-n]}}}v^{m-n}dv^n;$$

mettant pour $\overset{m}{[m]}$ et $\overset{m-n}{[m-n]}$ les expressions données par les formules du n°. 1072, on trouvera

$$d^n(v^m) = v^{m-n}dv^n \frac{\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^m}{\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{m-n}}.$$

Ce résultat est susceptible d'une vérification immédiate, en s'assurant qu'il rentre dans ceux que l'on connoît pour les cas où n est un nombre entier positif.

Si l'on fait $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$, il viendra

$$d^{\frac{1}{2}}v = \sqrt{vdv}\frac{\int dx\,1\frac{1}{x}}{\int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{vdv}}{2\sqrt{\pi}},$$

en observant qu'entre les limites 0 et 1,

$$\int dx\,1\frac{1}{x} = 1; \quad \int dx\left(1\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \overset{\frac{1}{2}}{[\tfrac{1}{2}]} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 (n°. 964).

C'est ainsi que l'on parviendroit à l'équation primitive de la courbe correspondante à l'équation différentielle

$$y\,d^{\frac{1}{2}}v = v\sqrt{dy},$$

dans laquelle dv est supposée constante. Au moyen de la valeur précédente de $d^{\frac{1}{2}}v$, on la transformeroit d'abord en $\frac{y\sqrt{vdv}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = v\sqrt{dy}$; et quarrant ensuite chacun de ses membres, on obtiendroit $\frac{y^2dv}{\frac{1}{4}\pi} = v\,dy$, d'où l'on concluroit

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi}1v = C - \frac{1}{y}, \text{ ou } y1v = \tfrac{1}{4}C\pi y - \tfrac{1}{4}\pi.$$

1075. L'interpolation dont nous venons de donner un exemple, s'opère facilement sur toutes les fonctions qui sont données par des intégrales définies; et elle fournit en même tems des expressions fort simples des différentielles de certaines fonctions du genre de celles que nous avons examinées dans les n°s. 953 et suivans : de l'équation $[p\overset{p}{]}=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$, par exemple, on conclut sans difficulté les suivantes (note du n°. 552),

$$d.[p\overset{p}{]}=dp\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(ll\frac{1}{x}\right),\quad d^2.[p\overset{p}{]}=dp^2\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(ll\frac{1}{x}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d^n.[p\overset{p}{]}=dp^n\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(ll\frac{1}{x}\right)^n.$$

Les différences s'obtiennent d'une manière analogue, en observant que $\Delta^n\int X\,dx=\int\Delta^n(X\,dx)$, il vient alors

$$\Delta[p\overset{p}{]}=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(l\frac{1}{x}-1\right),\quad \Delta^2.[p\overset{p}{]}=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(l\frac{1}{x}-1\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta^n.[p\overset{p}{]}=\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p\left(l\frac{1}{x}-1\right)^n,$$

en supposant que $\Delta p=1$.

Nous ne nous arrêterons pas à donner les formules qui répondent aux intégrales et aux sommes de la fonction proposée; mais nous terminerons cet article en remarquant que le procédé qu'il contient s'étend à toutes les fonctions que l'on peut obtenir par le moyen des intégrales définies, et par conséquent à toutes celles dont nous nous sommes occupés depuis le commencement de ce Chapitre. C'est en ramenant à des expressions de ce genre la fonction x^m, que Laplace en a donné les différentielles et les différences par des formules très-élégantes et que nous ferons connoître, lorsque nous montrerons la manière d'appliquer les intégrales définies à l'intégration des équations différentielles et aux différences.

Recherches des valeurs des intégrales définies.

1076. Lorsque p est un nombre fractionnaire, l'intégrale $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^p$, sur laquelle nous sommes tombés en cherchant l'expression générale de $[p\overset{p}{]}$, est du nombre des transcendantes dont on ne

ne connoît pas la nature, et qu'il est très-difficile d'obtenir par approximation; cependant il suit du n°. 964, que dans le cas où $p=\frac{1}{2}$, on a, entre les limites 0 et 1, $\int dx\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, valeur très-simple, mais qui ne convient qu'à l'intégrale définie: l'Analyse n'offre jusqu'à présent aucun moyen pour arriver à la valeur exacte de la même intégrale prise indéfiniment. La formule $\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{r}$ n'est pas la seule qui présente cette singularité; Euler en a trouvé un grand nombre d'autres, mais par des méthodes très-particulières et très-diverses. On feroit un volume entier, si l'on entreprenoit d'extraire les nombreux Mémoires qu'il a publiés sur cette matière; nous ne pouvons exposer dans cet ouvrage que les principaux résultats qu'il a obtenus, et donner une idée des méthodes les plus générales dont il a fait usage pour y parvenir: l'indication exacte de ses Mémoires, que l'on trouvera dans la Table, suppléera à ce que nous omettrons.

Les moyens qu'a employés Euler, pour trouver la valeur des intégrales définies, peuvent être rangés en trois classes; dans la première sont ceux où il développe en tout ou en partie l'intégrale proposée. Il arrive souvent que la substitution des limites de x, simplifie le résultat et le ramène à une série dont la fonction génératrice est connue, ou à une autre intégrale dont on a la valeur. Il est visible que ce moyen peut être utilement modifié par le secours des transformations. La seconde classe comprend les relations nouvelles qui se déduisent des produits et des quotiens des intégrales définies; à la troisième appartiennent tous les résultats qui s'obtiennent en différentiant l'intégrale proposée, par rapport à des quantités qui n'y étoient pas d'abord supposées variables. Nous avons déjà montré dans le n°. 506, que ce moyen peut mener à des résultats difficiles à obtenir *à priori*.

1077. On voit à la simple inspection des cas particuliers de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, rapportés dans le n°. 392, que ces expressions se réduisent à un seul terme lorsqu'on les prend entre les limites $x=0$

et $x=1$; l'arc A devenant égal à la demi-circonférence, on a ces deux suites

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}, \qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1;$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.\pi}{2.2}, \qquad \int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3},$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3\pi}{2.4.2}, \qquad \int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4}{3.5},$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5\pi}{2.4.6.2}, \qquad \int\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},$$

$$\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.7\pi}{2.4.6.8.2}, \qquad \int\frac{x^9dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9},$$

etc.

et d'après le tableau de la page 40 du premier volume, on a en général

$$\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1.3.5.......(2r-1)}{2.4.6...........2r}\frac{\pi}{2},$$

$$\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2.4.6...........2r}{3.5.7.......(2r+1)},$$

d'où il suit

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}.$$

Ce dernier résultat en fournit une infinité d'autres de même espèce, lorsqu'on y fait $x=z^n$; par cette transformation on obtient

$$n^2\int\frac{z^{2nr+n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}.\int\frac{z^{2nr+2n-1}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{2r+1}\frac{\pi}{2}\ (*),$$

et posant pour abréger $2nr+n-1=p$, il viendra

$$\int\frac{z^pdz}{\sqrt{1-z^{2n}}}.\int\frac{z^{p+n}dz}{\sqrt{1-z^{2n}}}=\frac{1}{n(p+1)}\frac{\pi}{2};$$

(*) Désormais l'expression $\int A.\int B.\int C$ sera celle que nous employerons au lieu de $(\int A)(\int B)(\int C)$, et qu'il faudra bien distinguer de $\int A\int B\int C$, équivalente à $\int(A(\int B(\int C)))$.

les limites de z étant encore les mêmes que celles de x, parce qu'on suppose que l'exposant n est positif. Cette dernière formule renferme des valeurs de produits dont on ne peut intégrer séparément aucun des facteurs ; pour en donner un exemple, nous prendrons $p=0$, $n=2$, et nous aurons

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

La formule $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{x-x^2}}$, en y faisant $x=z^2$, se charge en $2\int\frac{z^{2m}dz}{\sqrt{1-z^2}}$; et l'on en trouve les valeurs entre $z=0$ et $z=1$ par ce qui précède.

A l'aide de ces résultats on parvient à des séries fort simples pour l'intégrale

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}\left\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{etc.}\right\},$$

en substituant au lieu des intégrales

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^{m+4}dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{etc.}$$

leurs valeurs prises entre les limites 0 et 1. Si l'on fait, par exemple, $m=0$, on trouvera

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1.9}{4.16}-\frac{1.9.25}{4.16.36}+\frac{1.9.25.49}{4.16.36.64}-\text{etc.}\right).$$

Nous renvoyons au n°. 503, pour la valeur de l'intégrale $\int\frac{dx\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, prise entre les limites 0 et 1.

1078. Les formules de réduction, rapportées dans le tableau de la page 40 du premier volume, donnent un grand nombre de

résultats analogues aux précédens. On a par celles qui sont marquées II et III,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m-n}(1-x^n)^{\frac{p}{q}+1}-q(m-n)\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{-(mq+np)}$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{qx^{m}(1-x^n)^{\frac{p}{q}}+pn\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}-1}}{mq+np},$$

et entre les limites $x=0$ et $x=1$, cela se réduit à

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{q(m-n)\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{(mq+np)};$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{pn\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}-1}}{mq+np}.$$

La seconde de ces formules ramenera de $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}$ à $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et la première conduira de $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ à $\int x\,dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1$, ou à $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}$, selon que m sera paire ou impaire ; il n'entrera donc dans l'expression de l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}$ que la seule transcendante π. On trouvera sans peine que

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et comme on a vu dans le n°. précédent, que si m est impaire

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(m-2)(m-4)\ldots.5.3.1}{(m-1)(m-3)\ldots.6.4.2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et que si m est paire

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(m-2)(m-4)\ldots\ldots6.4.2}{(m-1)(m-3)\ldots\ldots7.5.3},$$

il s'ensuit que dans le premier cas

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\ldots5.3.1}{(m-1)(m-3)\ldots6.4.2}\frac{\pi}{2},$$

et que dans le second

$$\int x^{m-1}dx(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}=\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots\ldots5.3.1}{(m+2r-1)(m+2r-3)\ldots(m+3)(m+1)}\cdot\frac{(m-2)(m-4)\ldots6.4.2}{(m-1)(m-3)\ldots5.3.1}.$$

On peut multiplier ces formules autant qu'on le voudra. Si l'on a, par exemple, $n=3$, $\frac{p}{q}=r-\frac{1}{3}$, $\frac{p}{q}=r-\frac{2}{3}$, on ramenera les deux intégrales

$$\int x^{n-1}dx(1-x^3)^{r-\frac{1}{3}}; \quad \int x^{n-1}dx(1-x^3)^{r-\frac{2}{3}},$$

aux six formules

$$A=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}, \qquad B=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}}; \qquad C=\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1}{2},$$

$$A'=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}, \qquad B'=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}; \qquad C'=\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=1.$$

parmi lesquelles il n'y a qu'une seule transcendante distincte.

Par des comparaisons semblables à celles que nous avons faites dans le n°. précéd. Euler parvient aux relations suivantes

$$\int\frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{AC'}{3n+1}=\frac{1}{3n+1}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$\int\frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{A'B}{3n+1}=\frac{1}{3n+1}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$\int\frac{x^{3n+2}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{3n+1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2B'C}{3n+2}=\frac{1}{3n+2}\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)^2}};$$

Les quantités A, B, C, A', B', C', ne contenant point n, les équations ci-dessus subsisteront encore si l'on y met à la place de $3n$ un nombre quelconque; en écrivant $\lambda-1$, à la place de $3n$ dans la première, et dans la seconde, et $\lambda-2$ dans la troisième, la comparaison des deux derniers résultats donnera

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

De ces trois résultats, Euler en tire encore d'autres, en y faisant $x=z^n$, n étant un nombre quelconque, et posant $n\lambda=m$.

1079. Puisque la formule $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}}$ peut toujours se ramener à une autre dans laquelle l'exposant de x, hors de la parenthèse, soit moindre que n, et celui de la parenthèse une fraction négative, il suffit de considérer les transcendantes contenues dans l'expression $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$, en y supposant $m-1<n$ et $p<n$, les nombres m, n et p étant d'ailleurs entiers et positifs. Si l'on fait d'abord $1-x^n=y^n$, on aura

$$x^m=(1-y^n)^{\frac{m}{n}},\quad mx^{m-1}dx=-my^{n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

d'où il résultera

$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=-\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$; mais en observant que les limites $x=0$ et $x=1$, répondent à $y=1$, $y=0$, on changera le signe de la seconde intégrale en changeant l'ordre de ses limites, et l'on en conclura que

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}},$$

lorsqu'on prend l'une et l'autre intégrale entre les limites 0 et 1. Rien n'empêchant qu'on n'écrive dans le second membre x à la place de y, on voit par là que l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$, prise entre les limites 0 et 1, conserve la même valeur lorsque l'on y permute les exposans m et p; si donc on fait pour abréger,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\varphi(m,p),\quad \int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=\varphi(p,m),$$

on aura cette équation remarquable

$$\varphi(m,p)=\varphi(p,m)\ldots\ldots\ldots(1).$$

Maintenant en faisant usage de la formule II du tableau de la page 40 du deuxième volume, on aura

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{m-n}{m+p-n}\int x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}};$$

substituant m à $m-n$, il viendra

$$\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m}{m+p}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

d'où l'on tirera

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m+p}{m}\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}.$$

En répétant la réduction que présente cette dernière équation, on obtiendra

$$\int x^{m-1}dx.X = \frac{(m+p)(m+p+n)(m+p+2n)\ldots(m+p+in)}{m\quad(m+n)\quad(m+2n)\ldots\ldots(m+in)}\int x^{m+(i+1)n-1}dx.X,$$

en posant $(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = X$; de même

$$\int x^{r-1}dx.X = \frac{(r+p)(r+p+n)(r+p+2n)\ldots(r+p+in)}{r\quad(r+n)\quad(r+2n)\ldots\ldots(r+in)}\int x^{r+(i+1)n-1}dx.X.$$

Or, plus le nombre i augmente, plus le rapport des différentielles

$$x^{m+(i+1)n-1}dx.X, \qquad x^{r+(i+1)n-1}dx.X,$$

approche de l'unité qu'il a pour limite; il en est de même des intégrales, puisqu'elles sont prises dans la même étendue, ou sont composées du même nombre d'élémens (n°. 471); passant donc à cette limite, en supposant i infini, on aura

$$\frac{\int x^{m-1}dx.X}{\int x^{r-1}dx.X} = \frac{\varphi(m,p)}{\varphi(r,p)} = \frac{(m+p)(m+p+n)\ldots}{m\quad(m+n)\ldots} \times \frac{r(r+n)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(r+p)(r+p+n)\ldots}:$$

remplaçons à présent r par $m+q$, il viendra

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,p)} = \frac{(m+p)(m+p+n)\ldots\ldots}{m(m+n)\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \frac{(m+q)(m+q+n)\ldots\ldots\ldots}{(m+q+p)(m+q+p+n)\ldots},$$

équation dont le second membre demeure le même, lorsqu'on échange entr'elles les lettres p et q. Il suit de là que

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,p)} = \frac{\varphi(m,q)}{\varphi(m+p,q)}\ldots\ldots(2).$$

Les équations (1) et (2) renferment implicitement toutes les propriétés que nous avons à faire connoître relativement à la fonction φ; mais avant d'entrer dans ce détail, examinons les cas dans lesquels cette

fonction a une valeur algébrique, ou ne dépend que de la circonférence du cercle.

1080. Lorsque $p=n$, on a seulement $\int x^{m-1}dx$, d'où l'on tire $\varphi(m,n)=\frac{1}{m}$, et en vertu de l'équation $\varphi(m,p)=\varphi(p,m)$, on en conclut que $\varphi(n,p)=\frac{1}{p}$ ....(3).

Quand $m+n=p$, on rend l'intégrale $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$ rationnelle, en faisant $\frac{x}{\sqrt[n]{1-x^n}}=z$, d'où il résulte

$$\frac{x^m}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=z^m,\quad x^n=\frac{z^n}{1+z^n},\quad n\,\mathrm{l}x=n\,\mathrm{l}z-\mathrm{l}(1+z^n)$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}-\frac{z^{n-1}dz}{1+z^n}=\frac{dz}{z(1+z^n)};$$

avec ces expressions on obtient

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^m}}=\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n};$$

Les valeurs de z qui correspondent à $x=0$, et à $x=1$, étant 0 et l'infini, ces dernières seront les limites de l'intégrale $\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$, qui, d'après le n°. 373, ne dépend que des arcs de cercles et des logarithmes. L'expression que nous en avons donnée se simplifie beaucoup lorsqu'on l'étend entre ces limites; elle se réduit alors à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, ainsi que nous le verrons plus bas. On conclut de là

que $\varphi(m,n-m)=\varphi(n-m,n)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ ....(4).

3°. Si dans l'équation (2) on fait $q=n-m-p$, on en déduira $\varphi(m,p).\varphi(m+p,n-m-p)=\varphi(m,n-m-p).\varphi(n-p,p)$; changeant

changeant ensuite dans la même équation (2), p en $n-m-p$, et q en $n-m$, elle deviendra

$$\varphi(m,n-m-p)\varphi(n-p,n-m)=\varphi(m,n-m)\varphi(n,n-m-p):$$

multipliant cette équation et la précédente, membre à membre, et supprimant le facteur commun $\varphi(m,n-m-p)$, on aura

$$\begin{aligned}&\varphi(m,p)\varphi(m+p,n-m-p)\varphi(n-p,n-m)\\ =&\varphi(n-p,p)\varphi(m,n-m)\varphi(n,n-m-p).\end{aligned}$$

Or, d'après les équations (3) et (4)

$$\begin{aligned}\varphi(n,n-m-p) &= \frac{1}{n-m-p}\\ \varphi(m+p,n-m-p) &= \frac{\pi}{n\sin\frac{(m+p)\pi}{n}}\\ \varphi(m,n-m) &= \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\\ \varphi(n-p,p) &= \frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}};\end{aligned}$$

substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle donnera

$$\varphi(m,p)\varphi(n-p,n-m)=\frac{\pi\sin\frac{(m+p)\pi}{n}}{n(n-m-p)\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{p\pi}{n}}\ldots\ldots(5);$$

cette équation nous fait voir que la valeur $\varphi(n-p,n-m)$ ne dépend que de celle de $\varphi(m,p)$ et des fonctions circulaires. Legendre, à qui l'on doit cette remarque, et les suivantes, regarde la formule $\varphi(n-p,n-m)$, comme le *complément* de $\varphi(m,p)$, parce que les exposans de l'une réunis à leurs correspondans de l'autre, font la même somme n.

L'équation (5) nous conduit à deux résultats particuliers qu'il est bon de connoître : lorsque $p=m$, on a

$$\varphi(m,m)\varphi(n-m,n-m)=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

et quand $m = n - 2p$, il vient

$$\varphi(n-2p,p)\,\varphi(n-p,2p) = \frac{\pi}{np\sin\frac{2p\pi}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

L'équation (2) peut aussi se transformer en

$$\varphi(m,p)\,\varphi(m+p,n-m) = \varphi(m,n-m)\,\varphi(n,p);$$

en y changeant q en $n-m$; et mettant alors les valeurs des formules du second membre, on obtient

$$\varphi(m,p)\,\varphi(m+p,n-m) = \frac{\pi}{np\sin\frac{m\pi}{n}} \ldots\ldots\ldots (8);$$

la supposition de $p=m$ change cette dernière en

$$\varphi(m,m)\,\varphi(2m,n-m) = \frac{\pi}{nm\sin\frac{m\pi}{n}} \ldots\ldots\ldots (9):$$

ce résultat étant comparé à l'équation (7), conduit à

$$\varphi(p,p) = \varphi(n-2p,p).2\cos\frac{p\pi}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Maintenant que nous avons fait dépendre les valeurs de

$$\varphi(n-p,n-p), \quad \varphi(n-2p,p), \quad \varphi(n-p,2p),$$

de celle de $\varphi(p,p)$, ou de $\varphi(m,m)$, il faut chercher à simplifier, autant qu'il est possible, la forme de cette fonction.

1081. Pour cela faisons $1 - x^n = \frac{z^n}{4x^n}$; il viendra

$$x^n = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-z^n}, \quad x^{n-1}dx = \mp\frac{z^{n-1}dz}{4\sqrt{1-z^n}},$$

$$\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}} = \frac{z^{n-m}}{4^{1-\frac{m}{n}}x^{n-m}}; \quad x^{n-m}\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}} = \frac{2^{\frac{2m}{n}}z^{n-m}}{4},$$

$$\frac{x^{n-1}dx}{x^{n-m}\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} = \mp\frac{z^{n-1}dz}{2^{\frac{2m}{n}}z^{n-m}\sqrt{1-z^n}},$$

d'où on tirera

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} = \mp 2^{-\frac{2m}{n}}\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1-z^n}}.$$

Les limites de l'intégrale en z s'obtiennent en considérant l'équation $4x^n(1-x^n)=z^n$; si l'on y suppose $x=0$ et $x=1$, il vient, dans l'un et l'autre cas, $z=0$, ce qui ne donne que la même limite; mais on en trouve deux en prenant l'intégrale relative à x en deux fois; savoir, depuis $x=0$, jusqu'à la valeur de x, qui répond à $z=1$, et depuis cette dernière jusqu'à $x=1$, d'où résulte $z=0$: or la valeur de x, qui répond à $z=1$, est $x^n=\frac{1}{2}$, ou $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Prendre ainsi l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, et ensuite depuis $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ jusqu'à $x=1$, ce sera la même chose que de prendre l'intégrale $\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1-z^n}}$, depuis 0 jusqu'à 1, et depuis 1 jusqu'à 0, ou prendre le double de sa valeur entre les limites $z=0$ et $z=1$. Il suit de là que

$$\varphi(m,m)=2^{1-\frac{2m}{n}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1-z^n}}=2^{1-\frac{2m}{n}}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\dots\dots(11),$$

puisqu'il est indifférent d'écrire x pour z.

Ce résultat ramène à un grand degré de simplicité les valeurs de $\varphi(1,1)$, $\varphi(2,2)$, $\varphi(3,3)$, etc.

Si on compare les équations (6) et (11), il en naîtra cette relation remarquable

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\cdot\int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}\dots\dots(12).$$

Si l'on fait $1-x^n=x^n z^n$, on aura une transformée qui, dans le cas où n sera paire, et où $m+p=\frac{1}{2}n$, donnera

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,m)=\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(13).$$

La transformation que nous avons opérée plus haut, par la

supposition de $1-x^n=\frac{z^n}{4x^{2n}}$, nous donne pour le cas de n paire, et lorsque $m-p=\frac{1}{2}n$,

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n+p,p)=2^{-\frac{2p}{n}}\int\frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}n}}}$$

$$=2^{-\frac{2p}{n}}\int\frac{x^{2p-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14);$$

le dernier résultat s'obtient en écrivant dans le précédent x^2 au lieu de x : n étant toujours paire, on auroit immédiatement

$$\varphi(m,\tfrac{1}{2}n)=\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15).$$

On obtient encore une transformée utile, en faisant $1-x^n=\frac{1}{4}z^n x^{2n}$, ou $x^{-n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+z^n}$, lorsque $m+2p=n$; il vient pour ce cas qui suppose $p<\frac{1}{2}n$,

$$\varphi(n-2p,p)=2^{-\frac{2p}{n}}\int\frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16),$$

l'intégrale étant prise, depuis $z=0$, jusqu'à z infini. En combinant ce résultat avec l'équation (10), et changeant p en m, on trouve

$$\varphi(m,m)=2^{1-\frac{2m}{n}}\cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17),$$

et en comparant celui-ci avec l'équation (11), on en déduit

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}=\cos\frac{m\pi}{n}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18),$$

en observant que m soit toujours moindre que $\frac{1}{2}n$.

Cette dernière équation nous offre une particularité remarquable. Si l'on fait dans le premier membre $x=1-y^2$, et $z=y^2-1$ dans le

second, on obtient également pour l'une et l'autre intégrale

$$\int \frac{(1-y^2)^{m-1}dy}{\sqrt{n-\frac{n(n-1)}{2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}y^4-\text{etc.}}},$$

quand l'exposant n est impair; mais la première doit être prise, depuis $y=0$, jusqu'à $y=1$, et la seconde, depuis $y=1$, jusqu'à y infini. Il suit de là que si l'on désigne par P le premier résultat, et par P' le second, on aura

$$P=P'\cos\frac{m\pi}{n},$$

c'est-à-dire, que les deux parties de la même intégrale sont entr'elles dans le rapport de $\cos\frac{m\pi}{n}$ à 1.

Les équations (13) et (17) combinées donnent

$$\varphi(m,m)=2^{1-\frac{2m}{n}}\cos\frac{m\pi}{n}\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19);$$

et comme en vertu de l'équation (1), la fonction $\varphi(\frac{1}{2}n-m,m)$ est la même que $\varphi(m,\frac{1}{2}n-m)$, il est visible que dans le cas où n est paire, toutes les valeurs que peut prendre le second membre de l'équation ci-dessus répondent à celles de m, depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{4}n$.

Si l'on met $\frac{1}{2}n-m$, à la place de m, dans l'équation (19), il vient

$$\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,\tfrac{1}{2}n-m)=2^{\frac{2m}{n}}\sin\frac{m\pi}{n}\varphi(m,\tfrac{1}{2}n-m),$$

d'où on déduit

$$\varphi(m,m)=2^{1-\frac{4m}{n}}\cot\frac{m\pi}{n}\varphi(\tfrac{1}{2}n-m,\tfrac{1}{2}n-m)\ldots\ldots\ldots\ldots(20),$$

équation qui donnera la valeur de $\varphi(m,m)$, pour tous les cas, lorsqu'on la connoîtra pour ceux dans lesquels m ne surpasse pas $\frac{1}{4}n$.

Si dans l'équation (13) on change aussi m en $\frac{1}{2}n-m$, on aura en vertu de l'équation (1), celle-ci

$$\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}=\int\frac{z^{\frac{1}{2}n-m-1}dz}{\sqrt{1+z^n}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21),$$

dont le second membre résulte immédiatement du premier, en écrivant $\frac{1}{z}$ au lieu de z; et en la comparant à l'équation (18), on en conclura la suivante

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \cot \frac{m\pi}{n} \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-m-1}dx}{\sqrt{1-x^n}}.$$

Les relations multipliées que nous venons d'obtenir diminuent considérablement le travail qu'exige l'évaluation des transcendantes comprises dans la formule $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$; mais elles ne sont pas les seules qui puissent avoir lieu. Ce n'est encore là que les premiers apperçus d'une théorie qui doit s'étendre à beaucoup d'autres formules, et pour laquelle il faut peut-être de nouveaux signes; car on ne sauroit voir dans ce qui précède et dans ce qu'a écrit Euler sur la même matière, que les résultats de tentatives nombreuses, dirigées sans doute avec une grande sagacité, mais n'offrant pas encore cette liaison et cet ensemble qui constituent les méthodes directes et générales.

1082. Reprenons maintenant la discussion des différens cas que peut présenter l'évaluation de la fonction $\varphi(m,p)$, pour une même valeur de n.

1°. Soit $n=2$; nous aurons seulement ces trois fonctions

$$\begin{array}{ll} \varphi(1,1), & \\ \varphi(2,1), & \varphi(2,2); \end{array}$$

et d'après les équations (3) et (4),

$$\varphi(2,1)=1, \quad \varphi(2,2)=\tfrac{1}{2};$$

$$\varphi(1,1)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

2°. Soit $n=3$; nous aurons les fonctions

$$\begin{array}{lll} \varphi(1,1), & & \\ \varphi(2,1), & \varphi(2,2), & \\ \varphi(3,1), & \varphi(3,2), & \varphi(3,3), \end{array}$$

en excluant les fonctions $\varphi(1,2)$, $\varphi(1,3)$, etc. qui sont identiques avec $\varphi(2,1)$, $\varphi(3,1)$, etc. L'équation (2), lorsqu'on y fait $m=1$, $p=1$, $q=2$, donne en changeant $\varphi(1,2)$ en $\varphi(2,1)$,

$$\varphi(1,1)\varphi(2,2)=\varphi(2,1)\varphi(3,1),$$

d'où on tire la valeur de $\varphi(2,2)$, au moyen de celles de $\varphi(1,1)$, $\varphi(2,1)$, $\varphi(3,1)$. Les deux dernières sont connues ; l'une dépend de la quadrature du cercle, en vertu de l'équation (4), et l'autre est déterminée par l'équation (5) : en représentant donc par A la transcendante $\varphi(1,1)$, et faisant pour abréger

$\varphi(2,1)=\dfrac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\alpha$, nous aurons

$$\varphi(3,1)=1,\quad \varphi(3,2)=\tfrac{1}{2},\quad \varphi(3,3)=\tfrac{1}{3},$$
$$\varphi(2,1)=\alpha,\quad \varphi(2,2)=\frac{\alpha}{A},$$
$$\varphi(1,1)=A,$$

d'où l'on voit que tous les cas que peut présenter l'intégrale $\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-p}}}$, ne dépendent que de la seule transcendante $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$ égale à $2^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$, ou à $2^{-\frac{1}{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^3}}$, en vertu des équations (11) et (16), et comprise dans les fonctions elliptiques (n°s. 404, 422, 505).

3°. Soit $n=4$; nous aurons les dix fonctions

$$\varphi(1,1),$$
$$\varphi(2,1),\quad \varphi(2,2),$$
$$\varphi(3,1),\quad \varphi(3,2),\quad \varphi(3,3),$$
$$\varphi(4,1),\quad \varphi(4,2),\quad \varphi(4,3),\quad \varphi(4,4);$$

l'équation (2) donne ces relations

$$\varphi(1,1)\varphi(2,2)=\varphi(2,1)\varphi(3,1),$$
$$\varphi(1,1)\varphi(3,2)=\varphi(3,1)\varphi(4,1),$$
$$\varphi(2,1)\varphi(3,3)=\varphi(3,1)\varphi(4,2).$$

On a par l'équation (3) les fonctions dans lesquelles le premier

nombre est 4; l'équation (4) ramène à la quadrature du cercle toutes celles dans lesquelles la somme des deux nombres est égale à 4: il ne reste donc à déterminer que les quatre fonctions

$$\varphi(1,1),\quad \varphi(2,1),\quad \varphi(3,2),\quad \varphi(3,3),$$

et au moyen des relations ci-dessus, on fera dépendre les trois dernières de la première; mais nous observerons que les équations (6) et (7) donneront immédiatement $\varphi(3,3)$ par $\varphi(1,1)$, et $\varphi(2,1)$ par $\varphi(2,2)$. La seule transcendante $\varphi(1,1)$ suffira donc encore pour ce cas; elle se ramène, d'après les équations (12) et (17), à $2^{\frac{1}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ et à $\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}$, et rentre ainsi dans les transcendantes elliptiques. En désignant par A, comme le fait Euler, la transcendante $\varphi(2,1)$, et par α et β les fonctions $\varphi(3,1)$, $\varphi(2,2)$, qui se rapportent à la quadrature du cercle, on formera ce tableau

$$\varphi(4,1)=1,\quad \varphi(4,2)=\tfrac{1}{2},\quad \varphi(4,3)=\tfrac{1}{3},\quad \varphi(4,4)=\tfrac{1}{4},$$
$$\varphi(3,1)=\alpha,\quad \varphi(3,2)=\frac{\beta}{A},\quad \varphi(3,3)=\frac{\alpha}{2A},$$
$$\varphi(2,1)=A,\quad \varphi(2,2)=\beta,$$
$$\varphi(1,1)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

4°. Soit $n=5$; la fonction $\varphi(m,p)$ présentera pour ce cas quinze formes diverses, en excluant les permutations données par $\varphi(p,m)$; l'équation (2) fournit pour ce cas, les relations

$$\varphi(2,1)\varphi(3,3)=\varphi(3,2)\varphi(5,1),$$
$$\varphi(3,1)\varphi(4,2)=\varphi(3,2)\varphi(5,1),$$
$$\varphi(2,2)\varphi(4,3)=\varphi(3,2)\varphi(5,2).$$
$$\varphi(3,1)\varphi(4,4)=\varphi(4,1)\varphi(5,3),$$

qui, jointes à celles que nous avons employées pour le cas de $n=4$, donnent le moyen de déterminer six fonctions, à quoi réunissant les cinq fonctions de la forme $\varphi(5,p)$, égales à $\frac{1}{p}$, en vertu de l'équation (3), puis les fonctions $\varphi(3,2)=\alpha$ et $\varphi(4,1)=\beta$, dépendantes du cercle à cause que $m+p=5$, il restera seulement deux

deux transcendantes irréductibles. Choisissant les fonctions $\varphi(3,1)=A$, $\varphi(2,2)=B$, on aura le tableau suivant

$$\varphi(5,1)=1,\quad \varphi(5,2)=\tfrac{1}{2},\quad \varphi(5,3)=\tfrac{1}{3},\quad \varphi(5,4)=\tfrac{1}{4},\quad \varphi(5,5)=\tfrac{1}{5},$$

$$\varphi(4,1)=\alpha,\quad \varphi(4,2)=\frac{\beta}{A},\quad \varphi(4,3)=\frac{\beta}{2B},\quad \varphi(4,4)=\frac{\alpha}{3A},$$

$$\varphi(3,1)=A,\quad \varphi(3,2)=\beta,\quad \varphi(3,3)=\frac{\beta^2}{\alpha B},$$

$$\varphi(2,1)=\frac{\alpha B}{\beta},\quad \varphi(2,2)=B,$$

$$\varphi(1,1)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

Ce tableau montre que l'on auroit pu également prendre les fonctions $\varphi(2,2)$ et $\varphi(1,1)$ pour y rapporter les autres. Les équations *(6)*, *(9)* et *(10)*, offrent les moyens de rappeler immédiatement

$$\varphi(4,4),\quad \varphi(4,2),\quad \varphi(3,1) \text{ à } \varphi(1,1),$$
$$\varphi(3,3),\quad \varphi(4,3),\quad \varphi(2,1) \text{ à } \varphi(2,2);$$

et d'après les équations *(11)* et *(17)*, on a

$$\varphi(1,1)=2^{\frac{1}{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}=2^{\frac{1}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^5}},$$

$$\varphi(2,2)=2^{\frac{1}{5}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^5}}=2^{\frac{1}{5}}\cos\frac{2\pi}{5}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^5}}.$$

En continuant cette énumération, et ne faisant usage que des relations particulières que fournit immédiatement l'équation *(2)*, Euler a trouvé que les différens cas la de formule $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, pouvoient se ramener en général aux suivans :

$$\varphi(n-2,1),\quad \varphi(n-3,2),\quad \varphi(n-4,3),\quad \varphi(n-5,4), \text{ etc.}$$

dont le nombre, lorsqu'on exclut comme on le doit les permutations des exposans m et p, est $\frac{n-1}{2}$, quand n est impaire, et $\frac{1}{2}n-1$,

quand n est paire. Dans le premier cas, les remarques de Legendre rapportées précédemment, fournissent le moyen d'exprimer les diverses transcendantes ci-dessus par d'autres de la forme $\varphi(m,m)$, et dans le second elles réduisent le nombre des mêmes transcendantes à $\frac{n}{4}$, ou $\frac{n-2}{4}$, en faisant dépendre $\varphi(m,m)$ de $\varphi(\frac{1}{2}n-m, \frac{1}{2}n-m)$ par l'équation (20). Avec ces formules, Legendre a ramené aux transcendantes elliptiques, celles qui répondent aux cas où $n=3$, $n=6$, $n=8$, $n=12$.

1083. Pour obtenir par des séries convergentes la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, Euler la partage en deux parties, l'une prise entre les limites $x=0$ et $x^n=\frac{1}{2}$, et l'autre entre $x^n=\frac{1}{2}$ et $x=1$; nommant M la première, P la seconde, et formant la série par le développement de $\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$, suivant les puissances ascendantes de x, il trouve

$$P=\frac{1}{\sqrt[n]{2^m}}\left\{\frac{1}{m}+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{1}{n+m}+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{1}{2n+m}\right.$$
$$\left.+\frac{n-p}{2n}\cdot\frac{2n-p}{4n}\cdot\frac{3n-p}{6n}\cdot\frac{1}{3n+m}+\text{etc.}\right\},$$

résultat dont chaque terme est moindre que la moitié de celui qui le précède. Faisant ensuite $1-x^n=y^n$, il change la formule proposée en $-\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$ (n°. 1079), qu'il faut prendre entre les limites $y^n=\frac{1}{2}$ et $y^n=0$; et l'ordre de ces limites étant renversé, il vient $P=\int y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$, ou

$$P=\frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left\{\frac{1}{p}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+p}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{1}{2n+p}\right.$$
$$\left.+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\cdot\frac{1}{3n+p}+\text{etc.}\right\},$$

puis enfin $\varphi(m,p)=M+P$.

Lorsque $m=p$, les séries M et P deviennent identiques, et l'on a seulement

$$\varphi(m,m)=\frac{2}{\sqrt[n]{2^m}}\left\{\frac{1}{m}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{1}{n+m}+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{1}{2n+m}\right.$$
$$\left.+\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{4n}\cdot\frac{3n-m}{6n}\cdot\frac{1}{3n+m}+\text{etc.}\right\}.$$

Soit pour exemple la fonction $\varphi(2,2)$, de laquelle dépend $\varphi(m,p)$, lorsque $n=3$; on obtiendra

$$\varphi(2,2)=2^{\frac{1}{3}}\left\{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{1}{11}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{4}{12}\cdot\tfrac{7}{18}\cdot\tfrac{10}{24}\cdot\tfrac{1}{14}+\text{etc.}\right\}$$
$$=0,54325\sqrt[3]{2}=0,68445.$$

De cette valeur et du tableau qui contient toutes celles de $\varphi(m,p)$, pour le cas où $n=3$, on déduira

$\varphi(1,1)=2,22582$, $\varphi(1,2)=1,20618$, $\varphi(2,2)=0,68445$.

1084. Montrons à présent comment on peut s'assurer que l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, prise entre les limites $x=0$ et x infini, revient à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. On a en général (n°. 375), $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}\right)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}\right)$$

....

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{rm\pi}{n}\,\mathrm{l}\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{rm\pi}{n}\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x\sin\frac{r\pi}{n}}{1-x\cos\frac{r\pi}{n}}\right),$$

r désignant le nombre impair qui précède n ; et si n est impaire, il faudra ajouter à cette expression $+\frac{1}{n}l(1+x)$, ou $-\frac{1}{n}l(1+x)$, selon que m sera impaire ou paire. On voit par le développement ci-dessus que l'intégrale proposée s'évanouit lorsque $x=0$; il suffit donc de trouver ce qu'elle devient quand on y fait x infini, et pour cela nous allons considérer séparément la partie logarithmique et la partie circulaire.

1°. quand x est infini, $\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}$ se réduit à $x-\cos\frac{r\pi}{n}$, et l'on a par conséquent

$$l\sqrt{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}=l\left(x-\cos\frac{r\pi}{n}\right)=lx+l\left(1-\frac{1}{x}\cos\frac{r\pi}{n}\right)=lx,$$

à cause que $\frac{1}{x}\cos\frac{r\pi}{n}$ s'évanouit. Si, pour abréger, on pose $\frac{\pi}{n}=\omega$, la réunion des fonctions logarithmiques formera la série

$$-\frac{2lx}{n}\{\cos m\omega+\cos 3m\omega+\cos 5m\omega\ldots\ldots\ldots+\cos rm\omega\},$$

avec l'*appendice* $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$, si n est impaire. Cette série est comprise dans celles dont on a donné la somme n°. 950. Pour employer les formules de ce n°. il faut y changer x en $r-1$, q en $m\omega$, faire $h=2$ et $p=m\omega$; on trouvera

$$S\cos rm\omega=\frac{\sin(r+1)m\omega}{2\sin m\omega},\ -\frac{2lx}{n}S\cos rm\omega=-\frac{\sin(r+1)m\omega}{\sin m\omega}\cdot\frac{lx}{n}.$$

Dans le cas où n est paire, on a $r=n-1$; et le résultat que l'on vient d'obtenir se réduit par conséquent à zéro, à cause que m est nécessairement un nombre entier.

Si n est impaire, il faudra tenir compte de l'appendice $\pm\frac{lx}{n}$, mais on aura alors $r=n-2$ et

$$-\frac{2lx}{n}S\cos rm\omega=-\frac{\sin(n-1)m\omega}{\sin m\omega}\frac{lx}{n}=-\frac{\sin(m\pi-m\omega)}{\sin m\omega}\frac{lx}{n};$$

or, $\sin(m\pi - m\omega) = \pm \sin m\omega$, selon que m est impaire ou paire; il viendra en conséquence

$$-\frac{2\,\mathrm{l}\,x}{n} S \cos r m \omega = \mp \frac{\mathrm{l}\,x}{n} \frac{\sin m\omega}{\sin m\omega} \pm \frac{\mathrm{l}\,x}{n},$$

ce qui se réduit encore à zéro.

La partie logarithmique de l'intégrale cherchée s'évanouissant ainsi dans tous les cas, il faut examiner ce que deviennent les fonctions circulaires qu'elle contient. Leur terme général est

$$\frac{2}{n} \sin r m \omega \,.\, \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x \sin r\omega}{1 - x \cos r\omega}\right);$$

l'arc indiqué s'évanouit lorsque $x = 0$; il est égal au quart de la circonférence quand $x = \frac{1}{\cos r\omega}$, et il a pour tangente $-\frac{\sin r\omega}{\cos r\omega} = -\text{tang}\, r\omega$, quand x est infini. Dans ce dernier cas il est donc égal à $\pi - r\omega$: on a donc pour la valeur complète de l'intégrale cherchée, la série

$$\frac{2}{n}\{(\pi - \omega)\sin m\omega + (\pi - 3\omega)\sin 3m\omega + (\pi - 5\omega)\sin 5m\omega + \text{etc.}\},$$

qui se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{2}{n}\pi\,\{\sin m\omega + \sin 3m\omega + \sin 5m\omega + \text{etc.}\},$$

$$-\frac{2\omega}{n}\{\sin m\omega + 3\sin 3m\omega + 5\sin 5m\omega + \text{etc.}\}.$$

La limite de la première, déduite des formules du n°. 950, donne

$$\frac{2}{n}\pi S \sin r m \omega = \frac{\pi}{n}\,\frac{1 - \cos(r+1)m\omega}{\sin m\omega};$$

celle de la seconde se tireroit des formules du n°. 909; mais on y parvient immédiatement en différentiant, par rapport à ω, l'expression de $S\cos r m\omega$, rapportée plus haut: on trouve ainsi

$$-m\{\sin m\omega + 3\sin 3m\omega + 5\sin 5m\omega + \text{etc.}\} =$$
$$\frac{m(r+1)\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} - \frac{m\sin(r+1)m\omega\cos m\omega}{2(\sin m\omega)^2},$$

d'où l'on conclut

$$S r \sin r m \omega = -\frac{(r+1)\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} + \frac{\sin(r+1)m\omega \cos m\omega}{2(\sin m\omega)^2}$$

$$= -\frac{r\cos(r+1)m\omega}{2\sin m\omega} + \frac{\sin r m\omega}{2(\sin m\omega)^2}.$$

Maintenant si n est un nombre pair, on aura $r = n - 1$,

$$\cos(r+1)m\omega = \cos n m\omega = \cos m\pi,$$
$$\sin(r+1)m\omega = \sin m\pi = 0,$$

$$S\sin r m\omega = \frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega}, \qquad S r\sin r m\omega = -\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega},$$

enfin

$$\frac{2\pi}{n} S\sin r m\omega - \frac{2\omega}{n} S r\sin r m\omega = \frac{2\pi}{n}\,\frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega} + \frac{2\omega}{n}\,\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega}$$

$= \frac{\pi}{n\sin m\omega}$, à cause de $n\omega = \pi$.

Lorsque n est un nombre impair, il vient $r = n - 2$,

$$\cos(r+1)m\omega = \cos(m\pi - m\omega) = \cos m\pi\cos m\omega,$$
$$\sin(r+1)m\omega = \sin(m\pi - m\omega) = -\cos m\pi\sin m\omega,$$

d'où on tire

$$\frac{2\pi}{n} S\sin r m\omega - \frac{2\omega}{n} S r\sin r m\omega =$$

$$\frac{\pi(1-\cos m\pi\cos m\omega)}{n\sin m\omega} + \frac{\omega(n-1)\cos m\pi\cos m\omega}{n\sin m\omega} + \frac{\omega\cos m\pi\cos m\omega}{n\sin m\omega},$$

ce qui se réduit à $\frac{\pi}{n\sin m\omega}$, en observant que $n\omega = \pi$.

On voit donc que dans tous les cas, l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, prise entre les limites $x = 0$ et x infini, est égale à $\frac{\pi}{n\sin m\omega}$, ou à $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, ainsi que nous l'avons annoncé, n°. 1080.

1085. Ce résultat conduit à une sommation remarquable. On a vu dans le n°. 1080, que

$$\varphi(n-m,m)=\int\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$; si on développe en série ordonnée suivant les puissances de x, la quantité $\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$, qu'on intègre après avoir multiplié par $x^{n-m-1}dx$, et qu'on fasse ensuite $x=1$, il viendra

$$\frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{n-m}+\frac{n-m}{n(2n-m)}+\frac{(n-m)(2n-m)}{n.2n(3n-m)}$$
$$+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n.2n.3n(4n-m)}+\text{etc.}$$

1086. L'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ peut se développer aussi en produits indéfinis. On a trouvé dans le n°. 1079 que

$$\frac{\int x^{m-1}dx\,X}{\int x^{r-1}dx\,X}=\frac{(m+p)(m+p+n)\ldots}{m(m+n)\ldots\ldots\ldots\ldots}\times\frac{r(r+n)\ldots\ldots\ldots\ldots}{(r+p)(r+p+n)\ldots},$$

ce qu'on peut écrire ainsi

$$\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}}{\int x^{r-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}}=\frac{r}{m}\,\frac{(m+p)(r+n)(m+p+n)\ldots\ldots}{(m+n)(r+p)(r+p+n)\ldots\ldots};$$

on rendra possible l'intégration de la formule qui est au dénominateur en faisant $r=n$, et, entre les limites $x=0$ et $x=1$, on aura

$$\int x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{1}{p},$$

d'où l'on déduira

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{n}{mp}\cdot\frac{2n(m+p)}{(m+n)(p+n)}\cdot\frac{3n(m+p+n)}{(m+2n)(p+2n)}\cdot\frac{4n(m+p+2n)}{(m+3n)(p+3n)}\cdot\text{etc.}$$

On pourroit obtenir un pareil développement de l'intégrale $x^{m-1}dx(1-x^n)^p$, et l'on auroit par ce moyen l'expression en produits indéfinis, des produits limités qui composent le développement que nous en avons donné dans le n°. 1071. Il est visible que cette transformation revient à celle qui a été effectuée sur les puissances du second ordre dans le n°. 962.

Les facteurs du second membre du résultat ci-dessus étant grouppés dans l'ordre suivant

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{n(m+p)}{p(m+n)}\cdot\frac{2n(m+p+n)}{(p+n)(m+2n)}\cdot\frac{3n(m+p+2n)}{(p+2n)(m+3n)}\cdot\frac{4n(m+p+3n)}{(p+3n)(m+4n)}.\text{etc.}$$

on en tirera par la supposition de $m+p=n$,

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{n^2}{n^2-m^2}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-m^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-m^2}\cdot\frac{16n^2}{16n^2-m^2}.\text{etc.}$$

et mettant pour l'intégrale $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}$ sa valeur $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$,

on obtiendra l'équation

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{4n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{9n^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{m^2}{16n^2}}.\text{etc.}$$

de laquelle on conclura

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\text{etc.}$$

Si l'on change l'arc $\frac{m\pi}{n}$ en $\frac{\pi}{2}-\frac{m\pi}{n}=\frac{n-2m}{2n}\pi$, on aura $\sin\frac{n-2m}{2n}\pi=\cos\frac{m\pi}{n}$; substituant $\frac{n-2m}{2}$, ou $\frac{1}{2}-\frac{m}{n}$, au lieu de $\frac{m}{n}$, dans le produit précédent, décomposé en facteurs simples, il viendra

cos

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{n}\right)\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{m}{n}\right)}{1.1}\,\frac{\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{m}{n}\right)}{2.2}\,\frac{\left(\frac{5}{2}+\frac{m}{n}\right)\left(\frac{7}{2}-\frac{m}{n}\right)}{3.3}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{\left(1-\frac{2m}{n}\right)}{2}\frac{\left(1+\frac{2m}{n}\right)\left(3-\frac{2m}{n}\right)}{2}\,\frac{\left(3+\frac{2m}{n}\right)\left(5-\frac{2m}{n}\right)}{4}\,\frac{\left(5+\frac{2m}{n}\right)\left(7-\frac{2m}{n}\right)}{6}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.3.5.5.7.7\text{ etc.}}{2.2.4.4.6.6.8\text{ etc.}}\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\text{ etc.}$$

résultat qui se réduit à

$$\cos\frac{m\pi}{n}=\left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right)\text{ etc.}$$

lorsqu'on met pour $\frac{\pi}{2}$ la valeur rapportée dans le n°. 945.

Si l'on fait $\frac{m\pi}{n}=u$, dans les deux produits que nous venons d'obtenir pour le sinus et le cosinus, on aura

$$\sin u=u\left(1-\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{16\pi^2}\right)\text{ etc.}$$

$$\cos u=\left(1-\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{49\pi^2}\right)\text{ etc.}$$

ce qui revient à

$$\sin u = u\left(1-\frac{u}{\pi}\right)\left(1+\frac{u}{\pi}\right)\left(1-\frac{u}{2\pi}\right)\left(1+\frac{u}{2\pi}\right)\left(1-\frac{u}{3\pi}\right)\left(1+\frac{u}{3\pi}\right)\text{ etc.}$$

$$\cos u = \left(1-\frac{2u}{\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{\pi}\right)\left(1-\frac{2u}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2u}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2u}{5\pi}\right)\text{etc.}$$

La première de ces expressions met en évidence la propriété qu'a le sinus de s'évanouir toutes les fois que l'arc devient égal à un multiple de π, soit positif, soit négatif, puisque les facteurs qui la composent s'annullent successivement lorsque

$u=\pi$, $u=-\pi$, $u=2\pi$, $u=-2\pi$, $u=3\pi$, $u=-3\pi$, etc.

Il est visible que si l'on avoit voulu exprimer analytiquement cette propriété, on en auroit déduit la même formule que ci-dessus. L'expression du cosinus satisfait de même aux loix que suit la

la marche de cette fonction, puisqu'il y a toujours un de ses facteurs qui s'évanouit lorsque $u = \pm \frac{2i+1}{2}\pi$.

Digression sur les expressions des sinus et des cosinus en produits indéfinis.

1087. Les expressions dont nous nous occupons maintenant sont dues à Euler, qui en a tiré de nombreuses conséquences : elles donnent immédiatement les logarithmes népériens des sinus et des cosinus ; car en faisant $u = \frac{m\pi}{2n}$, on en tire

$$\mathrm{l}\sin\frac{m\pi}{2n} = \mathrm{l}\pi + \mathrm{l}\frac{m}{2n} + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{36n^2}\right) + \text{etc.}$$

$$\mathrm{l}\cos\frac{m\pi}{2n} = \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right) + \mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{49n^2}\right) + \text{etc.}$$

Si l'on développe en séries, les logarithmes indiqués, à partir seulement de $\mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right)$ pour le sinus, et de $\mathrm{l}\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right)$ pour le cosinus, on aura, en ordonnant par rapport aux puissances de $\frac{m}{n}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\sin\frac{m\pi}{2n} = {} & \mathrm{l}m + \mathrm{l}(2n - m) + \mathrm{l}(2n + m) - 3\,\mathrm{l}n + \mathrm{l}\pi - 18 \\ & - \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{12^4} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{12^6} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{12^8} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\mathrm{l}\cos\frac{m\pi}{n}=\mathrm{l}(n-m)+\mathrm{l}(n+m)-2\,\mathrm{l}n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

les coefficiens des puissances de $\frac{m}{n}$ dans ces séries étant les termes de la série générale $S\frac{1}{x^p}$, se calculeront par les formules du n°. 942, en faisant usage de la remarque du n°. 938, ou par des procédés que nous indiquerons plus bas.

1088. Les mêmes expressions donnent les facteurs des séries

$$\frac{u}{1}-\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^5}{1.2.3.4.5}-\frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.}$$
$$1-\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^4}{1.2.3.4}-\frac{u^6}{1.2.3.4.3.6}+\text{etc.}$$

qui sont en même tems les développemens de $\sin u$ et de $\cos u$; et ceux des expressions

$$\frac{e^{u\sqrt{-1}}-e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},\quad \frac{e^{\sqrt{-1}}+e^{-u\sqrt{-1}}}{2}.$$

Changeons maintenant $u\sqrt{-1}$ en u et u en $-u\sqrt{-1}$; il viendra

$$\frac{e^u-e^{-u}}{2}=\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^3}{1.2.3}+\frac{u^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}$$
$$=u\left(1+\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{16\pi^2}\right)\text{etc.}$$
$$\frac{e^u+e^{-u}}{2}=1+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^4}{1.2.3.4}+\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.}$$
$$=\left(1+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{49\pi^2}\right)\text{etc.}$$

On peut encore, à l'aide de ces formules, décomposer aussi en facteurs l'expression $\frac{e^{+x} \pm e^{\pm y}}{2}$; car on a

$$1°.\ \frac{e^x+e^y}{2} = e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{x+y}{2}}\left(1+\frac{(x-y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{25\pi^2}\right) \text{etc.}$$

$$2°.\ \frac{e^x+e^{-y}}{2} = e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}}+e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{x-y}{2}}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right) \text{etc.}$$

$$3°.\ \frac{e^x-e^y}{2} = e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{x+y}{2}}\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-y)^2}{36\pi^2}\right) \text{etc.}$$

$$4°.\ \frac{e^x-e^{-y}}{2} = e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right) \text{etc.}$$

Si l'on fait dans ces résultats $y=0$, il viendra

$$\frac{e^x+1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right) \text{etc.}$$

$$\frac{e^x-1}{2} = e^{\frac{1}{2}x}\,\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right) \text{etc.}$$

Multipliant entr'elles les quantités $e^x \pm e^{-x}$ et $e^y \pm e^{-y}$, on aura

1°. $(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y}) = e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-(x-y)}+e^{-(x+y)}$,

2°. $(e^x+e^{-x})(e^y-e^{-y}) = e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-(x-y)}-e^{-(x+y)}$,

3°. $(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y}) = e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-(x-y)}+e^{-(x+y)}$,

et faisant pour abréger $x+y=u$, $x-y=v$; on conclura de ce qui précède le développement en produits indéfinis des trois expressions

$$e^u+e^{-u}+e^v+e^{-v},$$
$$e^u-e^{-u}-e^v+e^{-v},$$
$$e^u+e^{-u}-e^v-e^{-v}.$$

1089. Avant de reprendre la recherche des valeurs des intégrales définies, nous montrerons comment les expressions que nous venons d'obtenir peuvent être employées à la sommation de quelques séries.

Soit
$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{ etc.}$$
$$=(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\text{ etc.}$$
on aura
$$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{ etc.}$$
$$B=\alpha\beta+\alpha\gamma\ldots\ldots+\beta\gamma+\beta\delta+\text{ etc.}$$
$$C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\text{ etc.}$$
etc.

et par les formules du n°. 158, on obtiendra les valeurs de
$$S_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\text{ etc.}$$
$$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\epsilon^2+\text{ etc.}$$
$$S_3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\epsilon^3+\text{ etc.}$$
etc.

Cela posé, l'expression $\frac{e^u-e^{-u}}{2}$ du n°. précédent, donne

$$1+\frac{u^2}{1.2.3}+\frac{u^4}{1.2.3.4.5}+\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ etc.}$$
$$\left(1+\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.}$$

et faisant $u^2=\pi^2 z$, on en tirera

$$1+\frac{\pi^2 z}{1.2.3}+\frac{\pi^4 z^2}{1.2.3.4.5}+\frac{\pi^6 z^3}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ etc.}$$
$$(1+z)(1+\tfrac{1}{4}z)(1+\tfrac{1}{9}z)(1+\tfrac{1}{16}z)(1+\tfrac{1}{25}z)\text{ etc.}$$

$$A=\frac{\pi^2}{1.2.3},\ B=\frac{\pi^4}{1.2.3.4.5},\ C=\frac{\pi^6}{1.2\ldots7},\ D=\frac{\pi^8}{1.2\ldots8.},\text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs dans celles de S_1, S_2, S_3, etc. on trouvera

$$S_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\text{etc.}\quad=\frac{\pi^2}{6},$$
$$S_2=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.}\quad=\frac{\pi^4}{90},$$
$$S_3=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc.}\quad=\frac{\pi^6}{945},$$
$$S_4=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.}\quad=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$S_5=\frac{1}{1^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{9^5}+\text{etc.}\quad=\frac{\pi^{10}}{93555},$$
etc.

comme nous l'avons indiqué dans le n°. 942; et l'on voit par là que la limite de la série

$$S_m=\frac{1}{1^{2m}}+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}};$$

ne dépend que de la circonférence du cercle.

Le développement en série de l'expression $\frac{e^u+e^{-u}}{2}$ étant comparé à son développement en facteurs, en faisant $u^2=\frac{1}{4}\pi^2\zeta$, donne successivement

$$1+\frac{u^2}{1.2}+\frac{u^4}{1.2.3.4}+\frac{u^6}{1.2.3.4.6}+\frac{u^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}+\text{etc.}=$$
$$\left(1+\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{49\pi^2}\right)\left(1+\frac{4u^2}{81\pi^2}\right)\text{etc.}$$
$$1+\frac{\pi^2\zeta}{1.2.4}+\frac{\pi^4\zeta^2}{1.2.3.4.4^2}+\frac{\pi^6\zeta^3}{1.2\ldots\ldots6.4^3}+\frac{\pi^8\zeta^4}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots8.4^4}+\text{etc.}=$$
$$(1+\zeta)(1+\tfrac{1}{9}\zeta)(1+\tfrac{1}{25}\zeta)(1+\tfrac{1}{49}\zeta)(1+\tfrac{1}{81}\zeta)\text{ etc.}$$

$$A=\frac{\pi}{1.2.4},\ B=\frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2},\ C=\frac{\pi^6}{1.2\ldots6.4^3},\ D=\frac{\pi^8}{1.2\ldots8.4^4},\ \text{etc.}$$

$$S_1=\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{etc.}\quad=\frac{1}{1}\,\frac{\pi^2}{2^3},$$
$$S_2=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}\quad=\frac{2}{1.2.3}\,\frac{\pi^4}{2^5},$$
$$S_3=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}\quad=\frac{16}{1.2.3.4.5}\,\frac{\pi^6}{2^7},$$
$$S_4=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\quad=\frac{272}{1.2.3\ldots.7}\,\frac{\pi^8}{2^9},$$
etc.

et l'on aura en général la limite de la série

$$S_m = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{7^{2m}} + \frac{1}{9^{2m}} + \text{etc.}$$

exprimée par la circonférence du cercle. Nous observerons que l'on peut faire usage de ces résultats pour simplifier les séries du n°. 1087.

1090. Les formules qui terminent le n°. 1088 étant traitées par le procédé du n°. précédent, donnent aussi des sommations très-élégantes. On en tire d'abord

$$\frac{e^x + e^{-y}}{e^x + 1} = \frac{e^{\frac{x-y}{2}}\left(1 + \frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.}}{e^{\frac{1}{2}x}\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right)\text{etc.}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}y}\left(\frac{\pi^2 + (x+y)^2}{\pi^2 + x^2}\right)\left(\frac{9\pi^2 + (x+y)^2}{9\pi^2 + x^2}\right)\left(\frac{25\pi^2 + (x+y)^2}{25\pi^2 + x^2}\right)\text{etc.}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}y}\left(1 + \frac{2xy + y^2}{\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{9\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{25\pi^2 + x^2}\right)\text{etc.}$$

puis

$$\frac{e^{x + \frac{1}{2}y} + e^{-\frac{1}{2}y}}{e^x + 1} = \left(1 + \frac{2xy + y^2}{\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{9\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{25\pi^2 + x^2}\right)\text{etc.}$$

or il est facile de voir que

$$\frac{e^{x + \frac{1}{2}y} + e^{-\frac{1}{2}y}}{e^x + 1} = \frac{(1 + e^{-x})\left(e^{-\frac{1}{2}y} + e^x e^{\frac{1}{2}y}\right)}{2 + e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}y} + e^{\frac{1}{2}y} + e^{-x - \frac{1}{2}y} + e^{x + \frac{1}{2}y}}{2 + e^x + e^{-x}},$$

et qu'en y faisant $x = u\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}y = -v\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{\cos v + \cos(u - v)}{1 + \cos u} = \cos v + \frac{\sin u \sin v}{1 + \cos u} = \cos v + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \sin v$$

$$= \left(1 + \frac{4uv - 4v^2}{\pi^2 - u^2}\right)\left(1 + \frac{4uv - 4v^2}{9\pi^2 - u^2}\right)\left(1 + \frac{4uv - 4v^2}{25\pi^2 - u^2}\right)\text{etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{2v}{\pi - u}\right)\left(1 - \frac{2v}{\pi + u}\right)\left(1 + \frac{2v}{3\pi - u}\right)\left(1 - \frac{2v}{3\pi + u}\right)\text{etc.}$$

Maintenant si l'on substitue dans l'expression $\cos v + \tang \frac{1}{2} u \sin v$, au lieu de u, $\frac{m\pi}{n}$, au lieu de v, $\frac{\zeta\pi}{2n}$, et qu'on réduise en série les fonctions de ζ : savoir, $\cos \frac{\zeta\pi}{2n}$ et $\sin \frac{\zeta\pi}{2n}$, on obtiendra

$$1 + \frac{\pi\zeta}{2n} \tang \frac{m\pi}{2n} - \frac{\pi^2\zeta^2}{2.4n^2} - \frac{\pi^3\zeta^3}{2.4.6n^3} \tang \frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4\zeta^4}{2.4.6.8n^4} + \text{etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{\zeta}{n-m}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{n+m}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{3n-m}\right)\left(1 - \frac{\zeta}{3n+m}\right) \text{etc.}$$

d'où l'on déduira les sommes des séries

$$S_1 = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \text{etc.}$$

$$S_2 = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \text{etc.}$$

etc.

la première donne immédiatement

$$\frac{\pi}{2n} \tang \frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \text{etc.}$$

Nous aurons encore par les formules déjà citées

$$\frac{e^x - e^{-y}}{e^x - 1} = \frac{e^{\frac{x-y}{2}}(x+y)\left(1 + \frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right) \text{etc.}}{e^{\frac{1}{2}x} x\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{36\pi^2}\right) \text{etc.}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}y} \frac{x+y}{x}\left(\frac{4\pi^2 + (x+y)^2}{4\pi^2 + x^2}\right)\left(\frac{16\pi^2 + (x+y)^2}{16\pi^2 + x^2}\right)\left(\frac{36\pi^2 + (x+y)^2}{36\pi^2 + x^2}\right) \text{etc.}$$

$$= e^{-\frac{y}{2}} \frac{x+y}{x}\left(1 + \frac{2xy + y^2}{4\pi^2 + x^2}\right)\left(\frac{2xy + y^2}{16\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{36\pi^2 + x^2}\right) \text{etc.}$$

d'où

$$\frac{e^{x + \frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}}{e^x - 1} = \left(1 + \frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{4\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{16\pi^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2xy + y^2}{36\pi^2 + x^2}\right) \text{etc.}$$

or

or $$\frac{e^{x+\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}}{e^x-1}=\frac{\left(e^{x+\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}\right)}{(e^x-1)}\frac{(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})}=$$

$$\frac{e^{x+\frac{y}{2}}+e^{-x-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}}-e^{-\frac{y}{2}}}{2-e^x-e^{-x}}$$

Si maintenant on fait $x=u\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}y=-v\sqrt{-1}$, il en résultera

$$\frac{\cos v-\cos(u-v)}{1-\cos u}=\cos v-\frac{\sin u\sin v}{1-\cos u}=\cos v-\cot\tfrac{1}{2}u\sin v$$

$$=\left(1-\frac{2v}{u}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{4\pi^2-u^2}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{16\pi^2-u^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2v}{u}\right)\left(1+\frac{2v}{2\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{2\pi+u}\right)\left(1+\frac{2v}{4\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{4\pi+u}\right)\text{ etc.}$$

et si l'on change v en $-\frac{\zeta\pi}{2n}$, u en $\frac{m\pi}{n}$, puis que l'on développe en série, suivant les puissances ζ, l'expression $\cos\frac{\pi\zeta}{2n}+\cot\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{\pi\zeta}{2n}$, on obtiendra

$$1+\frac{\pi\zeta}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2\zeta^2}{2.4n^2}-\frac{\pi^3\zeta^3}{2.4.6n^3}\cot\frac{m\pi}{2n}$$
$$+\frac{\pi^4\zeta^4}{2.4.6.8n^4}+\text{etc.}$$

$$=\left(1+\frac{\zeta}{m}\right)\left(1-\frac{\zeta}{2n-m}\right)\left(1+\frac{\zeta}{2n+m}\right)\left(1-\frac{\zeta}{4n-m}\right)\left(1+\frac{\zeta}{4n+m}\right)\text{ etc.}$$

et on en conclura les expressions des limites de

$$S_1=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{etc.}$$

$$S_2=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}-\frac{1}{(4n-m)^2}+\frac{1}{(4n+m)^2}-\text{etc.}$$

etc.

aura en particulier

$$\frac{\pi}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{etc.}$$

1091. Nous conclurons de ce qui précède que

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}$$
$$-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\frac{1}{5n-m}-\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}+\cot\frac{m\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}$$
$$-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\frac{1}{5n-m}+\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\left(\cot\frac{m\pi}{2n}-\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}\right)=\frac{\pi}{n\operatorname{tang}\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}.$$

Si l'on combine deux à deux, à partir du second, les termes de la première de ces séries, on aura

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\text{etc.}$$

d'où on tirera

$$\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}=\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\frac{1}{16n^2-m^2}+\text{etc.}$$

En opérant de même sur la deuxième série, il viendra successivement

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}-\text{etc.}$$

$$\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\cot\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\text{etc.}$$

Soit $n = 1$, et faisons $m = -u\sqrt{-1}$, nous aurons

$$\frac{1}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+4} + \frac{1}{u^2+9} + \frac{1}{u^2+16} + \text{etc.}$$

$$= -\frac{1}{2u^2} + \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{u\left(e^{u\pi} - 1\right)};$$

en observant que (Int. n°. 37),

$$\cot m\pi = \frac{\sqrt{-1}\left(e^{2m\pi\sqrt{-1}} + 1\right)}{e^{2m\pi\sqrt{-1}} - 1} = \frac{\sqrt{-1}\left(e^{2u\pi} + 1\right)}{e^{2u\pi} - 1}$$

$$= \sqrt{-1} + \frac{2\sqrt{-1}}{e^{2u\pi} - 1}.$$

Lorsqu'on change u en n dans ce résultat, on retrouve la série du n°. 944, et la limite que nous lui avons assignée dans ce n°.

1092. En développant, suivant les puissances de m, chaque terme de la série

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \frac{1}{16-m^2} + \text{etc.}$$

et désignant par $S\frac{1}{u^2}$, $S\frac{1}{u^4}$, etc. les limites des séries

$$1 + \frac{1}{2^2} + \text{etc.} \qquad 1 + \frac{1}{2^4} + \text{etc.}$$

on trouvera

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m}\cot m\pi = S\frac{1}{u^2} + m^2 S\frac{1}{u^4} + m^4 S\frac{1}{u^6} + \text{etc.}$$

mais on a par le n°. 949,

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2.3.4} - \frac{B_5 a^5}{2.3.4.5.6}\ \text{etc.}$$

B_1, B_3, B_5, etc. étant les nombres de Bernoulli ; et par conséquent

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m}\cot m\pi = \frac{2B_1\pi^2}{2} + \frac{2^3 m^2 B_3 \pi^4}{2.3.4} + \frac{2^5 m^4 B_5 \pi^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

la comparaison de ce développement et du précédent donne

$$S\frac{1}{u^2}=\frac{2B_1\pi^2}{1.2}, \quad S\frac{1}{u^4}=\frac{2^3B_3\pi^4}{1.2.3.4}, \quad S\frac{1}{u^6}=\frac{2^5B_5\pi^6}{1.2.3\ldots.6}, \text{ etc.}$$

comme on l'a indiqué dans le n°. 942.

1093. Si on écrit $2n$, au lieu de n, dans les formules du n°. 1085, on en déduira les suivantes

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\text{etc.}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\text{etc.}$$

$$\text{tang}\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\text{etc.}$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{m}\right)\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\frac{(5n-m)}{(4n+m)}\text{etc.}$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\text{etc.}$$

$$\text{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\text{etc.}$$

en se rappelant que $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.\text{etc.}}$.

Cette dernière expression se tire immédiatement de celle du sinus qui en fournit beaucoup d'autres de la même espèce. En effet, on a

$$\frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\text{etc.}$$

et si l'on fait $m=n$, on retombe sur la valeur ci-dessus. En prenant $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, il en résulte $\sin\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}.\frac{4.4.8.8.12.12.16.16.\text{etc.}}{3.5.7.9.11.13.15.17.\text{etc.}}$$

La substitution de la première valeur de $\frac{\pi}{2}$, dans cette dernière, conduit à

$$\sqrt{2}=\frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18.\text{etc.}}{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.\text{etc.}}$$

Si l'on suppose $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$, il viendra $\sin\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$ et

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3.6.6.12.12.18.18.24.\text{etc.}}{2.5.7.11.13.17.19.23.\text{etc.}}.$$

Ces diverses expressions de $\frac{1}{2}\pi$, peu propres à en donner des valeurs approchées, sont très-commodes pour en obtenir le logarithme: on a

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.\text{etc.}}=2(1-\tfrac{1}{3})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{7})(1+\tfrac{1}{7})\text{etc.}$$

d'où on tire

$$\pi=4(1-\tfrac{1}{9})(1-\tfrac{1}{25})(1-\tfrac{1}{49})\text{etc.}$$
$$1\pi=14+1(1-\tfrac{1}{9})+1(1-\tfrac{1}{25})+1(1-\tfrac{1}{49})+\text{etc.}$$

développant en série les logarithmes des binomes, il viendra

$$\begin{aligned}1\pi=14&-\frac{1}{9}-\frac{1}{2.9^2}-\frac{1}{3.9^3}-\frac{1}{4.9^4}-\text{etc.}\\&-\frac{1}{25}-\frac{1}{2.25^2}-\frac{1}{3.25^3}-\frac{1}{4.25^4}-\text{etc.}\\&-\frac{1}{49}-\frac{1}{2.49^2}-\frac{1}{3.49^3}-\frac{1}{4.49^4}-\text{etc.}\end{aligned}$$

et posant pour abréger,

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}$$
$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}$$
$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}$$

etc.

on aura

$$1\pi=14-(A-1)-\tfrac{1}{2}(B-1)-\tfrac{1}{3}(C-1)-\tfrac{1}{4}(D-1)-\text{etc.}$$

Si l'on pousse le calcul jusqu'au vingt-troisième terme de cette série, on trouvera

$$1\pi=1{,}4472988584940017414342;$$

ce logarithme est népérien; il correspond dans le système décimal à

0,4971498726941338543512 6.

En écrivant dans l'expression de $\sin\frac{m\pi}{2n}$ et dans celle de $\cos\frac{m\pi}{2n}$, rapportées plus haut, $n-m$, au lieu de m, et en faisant attention que

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos\frac{m\pi}{2n}, \quad \cos\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\frac{m\pi}{2n},$$

on obtiendra les nouvelles formules

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \pi\left(\frac{n-m}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\text{ etc.}$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\left(\frac{6n+m}{7n}\right)\text{ etc.}$$

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\text{ etc.}$$

$$\text{tang}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n-m)}\text{ etc.}$$

$$\text{cosec}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\text{ etc.}$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{2n}{n+m}\right)\left(\frac{2n}{3n-m}\right)\left(\frac{4n}{3n+m}\right)\left(\frac{4n}{5n-m}\right)\text{ etc.}$$

En considérant l'arc $\frac{k\pi}{2n}$, on auroit

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}} = \frac{m}{k}\left(\frac{2n-m}{2n-k}\right)\left(\frac{2n+m}{2n+k}\right)\left(\frac{4n-m}{4n-k}\right)\left(\frac{4n+m}{4n+k}\right)\text{ etc.}$$

etc.

et si l'on connoissoit le sinus, le cosinus, etc. de l'arc $\frac{k\pi}{2n}$, ces derniers résultats donneroient des valeurs du sinus, du cosinus, etc. de l'arc $\frac{m\pi}{2n}$.

1094. Nous avons emprunté le secours du Calcul intégral, pour obtenir les facteurs du sinus et du cosinus, d'où nous avons déduit ceux des expressions

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad (\text{n}^\circ.\ 1088):$$

Euler y est parvenu dans son *Introductio in Analysin infinitorum*, par des moyens purement algébriques ; mais la manière dont il y fait entrer l'infini, nous a fait préférer la considération des limites, employée pour le même objet par Simon L'Huillier de Genève. En suivant la marche de ce dernier, nous commencerons par déduire quelques conséquences aussi simples qu'élégantes, du théorême de Côtes, ou de la résolution des équations à deux termes.

On a donné dans le n°. 168, l'expression des facteurs trinomes des formules x^m+a^m et x^m-a^m ; pour distinguer le cas où l'exposant m est pair, de ceux où il est impair, nous écrirons successivement $2m$ et $2m+1$, au lieu de m. Cela posé, les facteurs de $x^{2m}+a^{2m}$, seront tous de la forme

$$x^2-2ax\cos\lambda+a^2;$$

en faisant $x=a=1$, ils deviendront de celle-ci :

$$2(1-\cos\lambda)=4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2, \text{ et on aura } x^{2m}+a^{2m}=2;$$

mettant pour λ les valeurs $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, etc. et extrayant la racine quarrée de chaque facteur, on trouvera

$$\sqrt{2}=2^m.\sin\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{5}{2m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\ldots(A).$$

La formule $x^{2m+1}+a^{2m+1}$, outre m facteurs trinomes $x^2-2ax\cos\lambda+a^2$, a un facteur réel du premier degré $x+a$, qui se réduit à 2, et il vient

$$1=2^m\sin\frac{1}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{5}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{2m-1}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots(B).$$

La formule $x^{2m}-a^{2m}$ a un facteur x^2-a^2 et $m-1$ autres de la forme $x^2-2ax\cos\lambda+a^2$; en divisant par le premier on a un quotient

$$x^{2m-2}+x^{2m-4}a^2+x^{2m-6}a^4\ldots\ldots+a^{2m-2},$$

qui se réduit à m, lorsque $x=a=1$; et comparé au produit des $m-1$ facteurs trinomes, il donne

$$\sqrt{m}=2^{m-1}\sin\frac{1}{m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{2}{m}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{m}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(C).$$

Si l'on dégage de même la formule $x^{2m+1}-a^{2m+1}$, du facteur $x-a$, on en déduira par la supposition de $x=a=1$,

$$\sqrt{2m+1}=2^m\sin\frac{2}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{4}{2m+1}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{6}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{2m}{2m+1}\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(D).$$

Le n°. 172 nous donne aussi la décomposition de l'équation $x^{2m}-2rx^m\cos 2\varphi+r^2=0$, en facteurs du second degré, de la forme $x^2-2x\cos\frac{2n\pi+2\varphi}{m}+1$, dans laquelle n doit recevoir toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à $m-1$ inclusivement; et en observant que

$$\cos\frac{(m+n)\pi+2\varphi}{m}=\cos\frac{(m-n)\pi-2\varphi}{m},$$

on aura
$$x^2-2x\cos\frac{2n\pi\pm2\varphi}{m}+1;$$

mais alors il faudra, si m est paire, pousser les valeurs de n jusqu'à m, et seulement jusqu'à $m-1$ dans le cas contraire. Pour distinguer ces deux cas, nous mettrons successivement $2m$ et $2m+1$ au lieu de m, et nous obtiendrons, en faisant $x=r=1$ les équations

$$\sin\varphi=2^{2m-1}\sin\frac{\varphi}{2m}.\sin\frac{\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{\pi+\varphi}{2m}.\sin\frac{\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{2m}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\sin\frac{(m-1)\pi-\varphi}{2m}.\sin\frac{(m-1)\pi+\varphi}{2m}.\sin\frac{m\pi-\varphi}{2m}\ldots\ldots(E)$$

$$\sin\varphi=2^{2m}\sin\frac{\varphi}{2m+1}.\sin\frac{\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{\pi+\varphi}{2m+1}.\sin\frac{2\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{2m+1}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\sin\frac{m\pi-\varphi}{2m+1}.\sin\frac{m\pi+\varphi}{2m+1}\ldots\ldots(F).$$

1095. Les six équations (A), (B), (C), (D), (E), (F), faciles à obtenir, et déjà très-remarquables par elles-mêmes, conduisent immédiatement aux résultats que nous cherchons, en observant que l'expression $e^x\pm e^{-x}$ est la limite de

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}\pm\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m},$$

relativement aux accroissemens de m (Int, n°. 32), et en substituant $1+\frac{x}{2m}$, au lieu de x, et $1-\frac{x}{2m}$, au lieu de a, dans les facteurs de $x^{2m}\pm a^{2m}$.

Les

Les facteurs trinomes de l'expression $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}$, étant en général de la forme

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{2m}\right)\left(1-\frac{x}{2m}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^2,$$

se réduisent à

$$2\left\{1-\cos\lambda+\frac{x^2}{4m^2}(1+\cos\lambda)\right\}=2(1-\cos\lambda)\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\frac{1+\cos\lambda}{1-\cos\lambda}\right)\right\}$$
$$=4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2\{1+\frac{x^2}{4m^2}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^2\},$$

et mettant pour λ ses valeurs, $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, etc. on formera le produit

$$4^m\left(\sin\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\sin\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\sin\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}.$$

Cette dernière expression, réduite par l'équation (*A*), donne

$$\frac{\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}}{2}=\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{3}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{5}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{2m-1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2\right\};$$

passant maintenant aux limites, en observant que celle de $\frac{x^2}{4m^2}\left(\cot\frac{1}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^2$, est $\frac{x^2}{\frac{1}{4}\pi^2}$, on trouvera

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\ldots\ldots$$

On seroit parvenu au même résultat, en décomposant l'expression

$$\left(1+\frac{x}{2m-1}\right)^{2m-1}+\left(1-\frac{x}{2m-1}\right)^{2m-1}.$$

En second lieu, si l'on prend $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}$, on aura le facteur $\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2}-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2}$ avec $m-1$ autres qui seront de la forme

$$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2}-2\left(1+\frac{x}{2m}\right)\left(1-\frac{x}{2m}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2},$$

et conduiront comme ci-dessus à

$$4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^{2}\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^{2}\}.$$

Les valeurs de λ relatives à ce cas étant $\frac{2\pi}{2m}$, $\frac{4\pi}{2m}$, etc. on obtiendra, en arrêtant au second terme le développement du premier facteur, mis à part, le produit

$$\frac{2x}{m}4^{m-1}\left(\sin\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\left(\sin\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\ldots\ldots\left(\sin\frac{(2m-2)}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}$$
$$\times\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{2m-2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\},$$

et on conclut de là, en vertu de l'équation (C),

$$\frac{\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}-\left(1-\frac{x}{2m}\right)^{2m}}{2}=x\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}$$
$$\times\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{4}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{6}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^{2}}{4m^{2}}\left(\cot\frac{2m-2}{2m}\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right\}.$$

Enfin la limite de cette équation donne

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^{2}}{\pi^{2}}\right)\left(1+\frac{x^{2}}{4\pi^{2}}\right)\left(1+\frac{x^{2}}{9\pi^{2}}\right)\left(1+\frac{x^{2}}{16\pi^{2}}\right)\text{etc.}$$

ce qu'on auroit également trouvé en opérant sur

$$\left(1+\frac{x}{2m-1}\right)^{2m-1}-\left(1-\frac{x}{2m-1}\right)^{2m-1}.$$

1096. On obtient d'une manière analogue la décomposition de l'expression $e^x-2\cos 2\varphi+e^{-x}$, en facteurs binomes.

Les facteurs trinomes de l'expression

$$\left(1+\frac{x}{4n+2}\right)^{4n+2}-2\left(1+\frac{x}{4n+2}\right)^{2n+1}\left(1-\frac{x}{4n+2}\right)^{2n+1}\cos 2\varphi+\left(1-\frac{x}{4n+2}\right)^{4n+2},$$

étant de la forme

$$\left(1+\frac{x}{4n+2}\right)^2-2\left(1+\frac{x}{4n+2}\right)\left(1-\frac{x}{4n+2}\right)\cos\lambda+\left(1-\frac{x}{4n+2}\right)^2,$$

reviennent à $4(\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2\left\{1+\frac{x^2}{4n+2}(\cot\tfrac{1}{2}\lambda)^2\right\}$;

mettant pour λ toutes les valeurs dont il est susceptible, on formera le produit

$$4^{2n+1}\left(\sin\frac{\varphi}{2n+1}\right)^2\left(\sin\frac{\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\left(\sin\frac{\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{n\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\left(\sin\frac{n\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2$$
$$\times\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{n\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{n\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2\right\},$$

qui se réduit à

$$4\sin\varphi^2\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{\varphi}{2n+1}\right)\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(4n+2)^2}\left(\cot\frac{\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4n+2}\left(\cot\frac{\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\times\left\{1+\frac{x^2}{4n+2}\left(\cot\frac{n\pi-\varphi}{2n+1}\right)^2\right\}\left\{1+\frac{x^2}{4n+2}\left(\cot\frac{n\pi+\varphi}{2n+1}\right)^2\right\},$$

en vertu de l'équation (F); et prenant les limites, on aura seulement

$$e^x-2\cos 2\varphi+e^{-x}=4\sin\varphi^2\left(1+\frac{x^2}{4\varphi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(\pi-\varphi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(\pi+\varphi)^2}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{x^2}{4(2\pi-\varphi)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4(2\pi+\varphi)^2}\right)+\text{etc}:$$

le même résultat se déduiroit aussi de l'expression

$$\left(1+\frac{x}{4n}\right)^{4n}-2\left(1+\frac{x}{4n}\right)^{2n}\left(1-\frac{x}{4n}\right)^{2n}\cos 2\varphi+\left(1-\frac{x}{4n}\right)^{4n}.$$

La formule $e^{2x}-2\cos 2\varphi+e^{-2x}$ est encore susceptible d'une autre décomposition, qui s'opère en la transformant en

$$e^{2x}-2\cos 2\varphi+e^{-2x}\{(\cos 2\varphi)^2+(\sin 2\varphi)^2\}$$

$$=(e^{x}-e^{-x}\cos 2\varphi)^2-(e^{-x}\sqrt{-1}\sin 2\varphi)^2$$

$$=\{e^{x}-e^{-x}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\sin 2\varphi)\}$$

$$\times\{e^{x}-e^{-x}(\cos 2\varphi-\sqrt{-1}\sin 2\varphi)\}$$

$$=(e^{x}-e^{-(x-2\varphi\sqrt{-1})})(e^{x}-e^{-(x+2\varphi\sqrt{-1})})\text{(Int. n°. 38)},$$

et le développement de $e^{x}-e^{-y}$, du n°. 1088, donne

$$e^{x}-e^{-(x+2\varphi\sqrt{-1})}=(2x+2\varphi\sqrt{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}}$$
$$\times\left(1+\frac{(x+\varphi\sqrt{-1})^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+\varphi\sqrt{-1})^2}{4\pi^2}\right)\text{etc.}$$

$$e^{x}-e^{-(x-2\varphi\sqrt{-1})}=(2x-2\varphi\sqrt{-1})e^{+\varphi\sqrt{-1}}$$
$$\times\left(1+\frac{(x-\varphi\sqrt{-1})^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x-\varphi\sqrt{-1})^2}{4\pi^2}\right)\text{etc.}$$

multipliant entr'elles ces deux expressions, on trouvera

$$e^{2x}-2\cos 2\varphi+e^{-2x}=$$

$$\left.\begin{array}{l}4(x^2+\varphi^2)\left\{1+2\frac{(x^2-\varphi^2)}{\pi^2}+\frac{(x^2+\varphi^2)^2}{\pi^4}\right\}\\ \times\left\{1+2\frac{(x^2-\varphi^2)}{4\pi^2}+\frac{(x^2+\varphi^2)^2}{4^2\pi^4}\right\}\\ \times\left\{1+2\frac{(x^2-\varphi^2)}{9\pi^2}+\frac{(x^2+\varphi^2)^2}{9^2\pi^4}\right\}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}=$$

$$4(x^2+\varphi^2)\left\{\frac{x^2+(\pi+\varphi)^2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2+(\pi-\varphi)^2}{\pi^2}\right\}$$
$$\times\left\{\frac{x^2+(2\pi+\varphi)^2}{4\pi^2}\cdot\frac{x^2+(2\pi-\varphi)^2}{4\pi^2}\right\}$$
$$\times\left\{\frac{x^2+(3\pi+\varphi)^2}{9\pi^2}\cdot\frac{x^2+(3\pi-\varphi)^2}{9\pi^2}\right\}$$
etc.

On obtiendroit aisément par ce qui précède les facteurs des formules

$$e^x+2\cos 2\varphi+e^{-x},\qquad e^x-2\cos 2\varphi-e^{-x}$$
$$e^x-2\sec 2\varphi+e^{-x},\qquad e^x-2\,\mathrm{tang}\, 2\varphi-e^{-x}.$$

1097. Euler tire des considérations du n°. 1089, le moyen de transformer en série le produit d'un nombre de facteurs, soit fini, soit infini; en effet, la série

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

étant supposée le développement du produit

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z),\ \text{etc.}=P,$$

devient égale, lorsque $z=1$, à l'unité augmentée des diverses sommes que l'on obtient en réunissant les lettres α, β, γ, δ, avec leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. Si l'on prend pour ces lettres tous les nombres premiers, on aura le produit

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+\text{etc.}$$

renfermant tous les nombres entiers, excepté ceux qui sont des puissances ou des multiples de puissances.

On a de même

$$\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{etc.}$$
$$=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\text{etc.}$$

On trouvera des relations analogues pour le cas où les nombres α, β, γ, δ, etc. sont négatifs; il viendra par exemple

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{etc.}$$
$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{15^n}-\text{etc.}$$

Dans cette série les termes négatifs résultent de la multiplication d'un nombre impair de facteurs premiers, et les termes positifs d'un nombre pair.

En développant l'expression

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\text{ etc.}},$$

dans la forme

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

les coefficiens A, B, C, D, etc. seront comme ci-dessus les sommes des lettres α, β, γ, δ, etc. de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. mais avec cette différence que les puissances de la même lettre se trouveront comprises dans ces produits, en sorte que la série qui résultera du développement de l'expression

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\text{ etc.}} = P,$$

sera égale, après la supposition de $z=1$, à la somme de tous les produits qui peuvent naître des lettres α, β, γ, δ, etc. combinées d'une manière quelconque : on trouve ainsi que

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

Cette dernière série est précisément celle qui résulte de $l(1-u)$; lorsqu'on y fait $u=1$, et qu'on en change tous les signes (Int. n°. 27) : il résulte de là que le produit infini

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$
$$= \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{11}{10}\cdot\tfrac{13}{12}\cdot\tfrac{19}{18}\text{ etc.}$$

a une valeur infinie, et que par conséquent l'inverse

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{17}\cdot\tfrac{18}{19}\text{ etc.}$$

tend sans cesse à s'anéantir, on a pour limite zéro.

En ne prenant qu'un nombre limité de facteurs, l'expression $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})}$, par exemple, on a la série

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \text{etc.}$$

composée de fractions dont les dénominateurs sont tous les nombres ayant 2 et 3 pour facteurs simples.

On a en général

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{etc.}}$$
$$=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}$$

et l'on conclut de cette relation la valeur du produit indéfini par celle de la série, ou *vice versâ.*

On trouveroit de même

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{etc.}}$$
$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\text{etc.}$$

En partant des équations

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}=M$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\text{etc.}}$$
$$=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}=N,$$

on trouve

$$\frac{M}{N}=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{etc.}$$
$$\frac{M^2}{N}=\frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\cdot\text{etc.}$$

Ces combinaisons se multiplient à l'infini et produisent des résultats très-remarquables, mais trop nombreux pour nous y arrêter; et nous renvoyons à cet égard au chapitre XV du livre II de l'*Introductio in Analysin infinitorum.*

1098. Pour ne laisser en arrière aucune branche de la Théorie des suites, nous allons donner une idée du Chapitre XVI du même ouvrage, dans lequel Euler applique les produits indéfinis à la recherche des diverses manières dont on peut former un nombre par l'addition de ceux qui sont inférieurs, ce qu'il appelle *Partitio numerorum*.

En considérant l'équation

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\text{ etc.}$$
$$=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{ etc.}$$

on obtient

$$P=x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+x^{\varepsilon}+\text{ etc.}$$
$$Q=x^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\gamma}+x^{\alpha+\delta}\ldots\ldots+x^{\beta+\gamma}+\text{ etc.}$$
$$R=x^{\alpha+\beta+\gamma}+x^{\alpha+\beta+\delta}+x^{\alpha+\beta+\varepsilon}+\text{ etc.}$$
etc.

d'où l'on voit que les exposans de x, dans les coefficiens de z^1, z^2, z^3, etc. sont les diverses sommes qu'on peut faire avec les lettres α, β, γ, δ, etc. combinées 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc. Il est évident que s'il se trouve dans le même coefficient des sommes égales entr'elles, les termes dont ces sommes sont les exposans se réunissent en un seul, ayant un coefficient égal au nombre de ces termes. Si dans Q, on a, par exemple, $\alpha+\beta=\delta+\gamma=n$, les deux termes $x^{\alpha+\beta}+x^{\delta+\gamma}$, se réduisent à $2x^n$, et le nombre 2 marque qu'il y a deux manières de composer le nombre n, avec deux des quatre nombres α, β, γ, δ.

Soit pour la série α, β, γ, δ, ε, etc. celles des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, etc. on aura

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\text{ etc.}$$
$$\begin{aligned}
=1&+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\text{ etc.})\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+\text{ etc.})\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+\text{ etc.})\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+\text{ etc.})\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+\text{ etc.})\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+\text{ etc.})\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+\text{ etc.})\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+\text{ etc.})
\end{aligned}$$
etc.

Si

Si l'on veut connoître de combien de manières le nombre 34, par exemple, peut être formé par l'addition de 7 nombres, pris dans la série 1, 2, 3, 4, etc. on cherchera le coefficient de x^{34}, dans la série qui multiplie z^7; et l'on trouvera que cela peut se faire de onze manières différentes.

En faisant $z=0$, et réunissant entr'elles les mêmes puissances de x, on aura

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ etc.}$$
$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+ \text{ etc.}$$

les coefficiens des termes de cette série marquent de combien de manières différentes on peut former les exposans, avec les termes de la suite 1, 2, 3, 4, etc. sans s'assujettir à aucune combinaison en particulier, mais en les embrassant toutes; ainsi 8, par exemple, peut être formé des six manières suivantes

$$8=8, \quad 8=7+1, \quad 8=6+2, \quad 8=5+3,$$
$$8=5+2+1, \quad 8=4+3+1.$$

Il est à propos de remarquer que les élémens qui entrent dans chaque somme sont essentiellement différens; si l'on vouloit admettre les répétitions, il faudroit alors considérer les fractions

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z) \text{ etc.}}$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}},$$

dont les développemens sont

$$\begin{aligned}
1 &+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+ \text{ etc.})\\
&+z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+ \text{ etc.})\\
&+z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10x^{11}+ \text{ etc.})\\
&+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+ \text{ etc.})\\
&+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+ \text{ etc.})\\
&+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+ \text{ etc.})\\
&+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+ \text{ etc.})\\
&+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+ \text{ etc.})\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+ \text{ etc.}$$

Le coefficient 11, affecté au terme x^{14}, dans la série qui multiplie z^8, exprime en combien de manières on peut former le nombre 14, par l'addition de huit termes de la suite 1, 2, 3, etc. Dans le second développement le coefficient 11 de x^6, nous apprend que le nombre 6 peut être composé de onze manières, ainsi qu'il suit :

$6=6$, $6=5+1$, $6=4+2$, $6=4+1+1$,
$6=3+3$, $6=3+2+1$, $6=3+1+1+1$, $6=2+2+2$,
$6=2+2+1+1$, $6=2+1+2+1$, $6=1+1+1+1+1+1$.

1099. Pour développer le produit indéfini

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\text{ etc.}=Z,$$

Euler substitue xz à z, ce qui donne

$$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\text{ etc.}=\frac{Z}{1+xz};$$

faisant en même tems

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}$$

il obtient

$$\frac{Z}{1+xz}=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\text{etc.}$$

équation qui revient à

$$Z=1+\left.\begin{matrix}P\\+1\end{matrix}\right\}xz+\left.\begin{matrix}Q\\+P\end{matrix}\right\}x^2z^2+\left.\begin{matrix}R\\+Q\end{matrix}\right\}x^3z^3+\left.\begin{matrix}S\\+R\end{matrix}\right\}x^4z^4+\text{etc.}$$

d'où il tire

$$P=\frac{x}{1-x},\quad Q=\frac{Px^2}{1-x^2},\quad R=\frac{Qx^3}{1-x^3},\quad S=\frac{Px^4}{1-x^4},\text{ etc.}$$

et enfin

$$P=\frac{x}{1-x},$$

$$Q=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)};$$

$$R=\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)};$$

$$S=\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)};$$

etc.

le terme général de ces dernières expressions est visiblement égal à

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)};$$

mais par le n°. precédent le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)},$$

fait connoître de combien de manières on peut former le nombre n par addition avec des nombres pris dans la suite $1, 2, \ldots m$; et ce coefficient étant celui de $x^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, dans la première expression, marque aussi de combien de manières on peut partager le nombre $n+\frac{m(m+1)}{2}$ en m parties différentes. Il résulte de là qu'il y a autant de manières de former le dernier par l'addition de m nombres différens, que de manières de former le premier avec des nombres pris dans la suite $1, 2, \ldots m$.

En suivant la même marche à l'égard de la formule

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ etc.}}=Z,$$

Euler parvient successivement à

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)(1-x^6z)\text{ etc.}}=(1-xz)Z$$

$$(1-xz)Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\text{ etc.}$$

d'où il conclut

$$P=\frac{x}{1-x},\quad Q=\frac{Px}{1-x^2},\quad R=\frac{Qx}{1-x^3},\quad S=\frac{Rx}{1-x^4}\text{ etc.}$$

$$P=\frac{x}{1-x},$$

$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)},$$

$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)};$$

etc.

expression dont le terme général est égal à

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots(1-x^m)}.$$

Le coefficient de x^{n+m}, dans son développement, étant le même que celui de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots\dots(1-x^m)},$$

montre qu'il y a autant de manières de décomposer le nombre $n+m$, en m parties, que de former le nombre n avec les termes de la série $1, 2, 3\dots\dots m$.

1100. En combinant ce théorême avec le précédent, on en pourroit déduire plusieurs autres assez remarquables, que nous sommes obligés d'omettre; mais nous allons prouver cette propriété de la progression $1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32$, etc. qu'il n'y a pas de nombre entier qui ne puisse résulter de l'addition d'un certain nombre de ses termes, et cela d'une seule manière. En effet,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ etc.}$$
$$= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+ \text{etc.}$$

pour s'assurer que la loi de cette dernière série demeure toujours la même, on fera

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})=X$$
$$= 1+Px+Qx^2+Rx^3+Sx^4+ \text{etc.}$$

on écrira x^2 pour x, et il viendra

$$\frac{X}{1+x} = 1+Px^2+Qx^4+Rx^6+Sx^8+ \text{etc.}$$

d'où l'on conclura

$$1+Px+Qx^2+Rx^3+Sx^4+ \text{etc.}$$
$$=1+ x + Px^2+Px^3+Qx^4 \text{ etc.}$$
$$P=1, \quad Q=P, \quad R=P, \quad S=Q, \text{ etc.}$$

La progression $1, 3, 9, 27$, etc. jouit aussi de la propriété de former tous les nombres entiers possibles; mais il faut combiner les termes tantôt par addition, tantôt par soustraction.

Les recherches dont nous venons de donner une idée ont occupé plusieurs Géomètres ; M. Paoli les a ramenées à l'intégration d'équations aux différences, du genre de celles que nous avons traitées d'après lui dans le n°. 1026 : elles rentrent aussi dans l'analyse indéterminée. Former, par exemple, le nombre n avec les nombres 1, 2, 3.........m, c'est la même chose que de trouver toutes les valeurs dont les quantités α, β, γ, δ.......μ, liées entr'elles par l'équation

$$\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta\ldots\ldots+m\mu=n,$$

sont susceptibles en nombres entiers positifs. On pourroit pousser beaucoup plus loin cette théorie, qui se lie avec celle du développement d'une puissance quelconque du polynome $a+bx^a+cx^c+$ etc. mais nous devons reprendre la considération des valeurs des intégrales définies, interrompue depuis le n°. 1086.

Continuation de la recherche des valeurs des intégrales définies.

1101. La valeur de l'intégrale $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, entre les limites $x=0$ et x infini, trouvée *à priori* dans le n°. 1084, se déduiroit aussi de la comparaison de son développement en série avec celles du n°. 1091, qui peuvent s'obtenir sans le secours d'aucune intégration, d'après ce qui a été dit dans le n°. 1095.

L'équation

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{x^m}{m}-\frac{x^{m+n}}{m+n}+\frac{x^{m+2n}}{m+2n}-\frac{x^{m+3n}}{m+3n}+\text{etc.}$$

donne lorsqu'on y fait $x=1$, la série

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\text{etc.}$$

qui exprime la valeur de l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$; on a ensuite

$$\int\frac{x^{m-n-1}dx}{1+\frac{1}{x^n}}=\frac{x^{m-n}}{m-n}-\frac{x^{m-2n}}{m-2n}+\frac{x^{m-3n}}{m-3n}-\frac{x^{m-4n}}{m-4n}+\text{etc.}$$

En supposant $n>m$, cette dernière série s'évanouit lorsque n est

infini; quand $x=1$ elle se réduit à

$$\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m-2n}+\frac{1}{m-3n}-\frac{1}{m-4n}+\text{etc.}$$

et donne la valeur de l'intégrale proposée prise depuis x infini, jusqu'à $x=1$, valeur d'un signe contraire à celle que nous cherchons: en la soustrayant donc de celle qu'on a déjà trouvée, on formera la série

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\text{etc.}$$

qui répond à $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}}$, et l'on aura ainsi la valeur de l'intégrale proposée.

Les mêmes moyens nous conduisent à la valeur des intégrales

$$\int\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx,\quad \int\frac{x^{m-1}-x^{n-m-1}}{1-x^n}\,dx;$$

depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$; car en développant, suivant les puissances ascendantes de x, les fonctions différentielles, on trouvera pour la première de ces intégrales

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}$$
$$+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\text{etc.}\quad=\frac{\pi}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}}\ (\text{n}^{\circ}.\ 1091),$$

et pour la seconde,

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}$$
$$-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\text{etc.}\quad=\frac{\pi}{n\,\text{tang}\,\dfrac{m\pi}{n}}.$$

Nous conclurons de là que

$$\int\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}=\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix}x=0\\x=\text{inf}\end{bmatrix}$$

les petites équations renfermées entre des crochets marquent les limites des intégrales. En observant que

$$\int \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} + \int \frac{x^{n-m-1}dx}{1+x^n},$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix} x=0 \\ x=\text{inf}\end{bmatrix} - \int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix} x=0 \\ x=1\end{bmatrix} = \int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix} x=1 \\ x=\text{inf}\end{bmatrix},$$

on trouve cette relation remarquable

$$\int \frac{x^{n-m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix} x=0 \\ x=1\end{bmatrix} = \int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}\begin{bmatrix} x=1 \\ x=\text{inf}\end{bmatrix}.$$

1102. Soit $n=2\lambda$ et $m=\lambda-\omega$; la formule $\int \frac{x^{m-1}\pm x^{n-m-1}}{1\pm x^n}\,dx$ deviendra

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}\pm x^{\lambda+\omega}}{1\pm x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x},$$

les valeurs $\dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, $\dfrac{\pi}{n\,\text{tang}\,\frac{m\pi}{n}}$, se changeront en

$$\frac{\pi}{2\lambda\sin\frac{(\lambda-\omega)\pi}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}} = S$$

$$\frac{\pi}{2\lambda\,\text{tang}\,\frac{(\lambda-\omega)\pi}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda\cot\frac{\omega\pi}{2\lambda}} = \frac{\pi\,\text{tang}\,\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{2\lambda} = T;$$

et, entre les limites $x=0$ et $x=1$, on aura

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x} = S, \quad \int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x} = T.$$

Il est bien important d'observer que les exposans λ et ω peuvent avoir dans ces expressions toutes les valeurs possibles, quoiqu'elles soient déduites d'une formule calculée dans la supposition que n et m soient des nombres entiers positifs (n°. 1084). Pour s'en con-

vaincre, il faut faire $x=z^{\alpha}$, α désignant le dénominateur commun auquel on peut toujours concevoir que soient réduites les fractions quelconques λ et ω, en sorte que $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$ deviennent des nombres entiers; on a dans cette hypothèse $\frac{dx}{x}=\frac{\alpha dz}{z}$, $x^{\lambda}=z^{\alpha\lambda}$, d'où il résulte

$$\int \frac{z^{\alpha(\lambda-\omega)} \pm z^{\alpha(\lambda+\omega)}}{1 \pm z^{2\alpha\lambda}} \cdot \frac{\alpha dz}{z}:$$

les limites de l'intégrale demeurant les mêmes qu'avant la transformation, on obtiendra la valeur de cette intégrale, en substituant dans les expressions S et T, les entiers $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$, au lieu de λ et de ω, ce qui ne les change en aucune manière.

Cela posé, si dans l'équation

$$V=\int X\,dx;$$

les quantités V et X désignent des fonctions de x et de ω, on aura

(n°. 552), $$\frac{dV}{d\omega}=\int \frac{dX}{d\omega}\,dx,$$

et de là, on conclura par ce qui précède, qu'entre les limites $x=0$ et $x=1$,

$$\frac{dS}{d\omega}=\frac{\pi^2 \sin\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{4\lambda^2\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^2}=\int \frac{-x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}\,x$$

$$\frac{dT}{d\omega}=\frac{\pi}{4\lambda^2\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^2}=-\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x}\,\mathrm{l}\,x.$$

Les expressions S et T ont aussi des développemens en série qui se déduisent de la substitution de 2λ et $\lambda-\omega$ à la place de n et de m dans les séries du n°. précéd. et dont on tireroit par conséquent de nouvelles séries, en effectuant les différentiations indiquées par rapport à ω; nous les rapporterons plus bas.

Voilà quelques résultats de la troisième classe annoncée dans le n°. 1076; elle a fourni à Euler le sujet de plusieurs Mémoires intéressans auxquels nous sommes forcés de renvoyer le lecteur; nous

nous nous bornerons seulement à présenter quelques applications propres à fixer les idées et à faire connoître la nature de ces recherches. Si l'on pose, par exemple, $\omega=0$, on aura pour le second cas

$$\int \frac{2x^{\lambda}}{1-x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x}\,lx=\int \frac{2x^{\lambda-1}\,dx\,lx}{1-x^{2\lambda}}=-\frac{\pi^2}{4\lambda^2}.$$

En continuant de différentier par rapport à ω, on passe à de nouvelles intégrales définies, dont les valeurs se déduisent de celles qu'on a déjà obtenues; on trouve ainsi que

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\cdot\frac{dx}{x}(lx)^2=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^3}-\frac{1}{\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}}\right)$$

$$\int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\,\frac{dx}{x}(lx)^2=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\,\frac{2\sin\frac{\omega\pi}{2\lambda}}{\left(\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}\right)^3}.$$

Les séries correspondantes se forment aussi par la différentiation, comme on l'a indiqué plus haut. Les nombreuses conséquences que l'on peut tirer de ces formules s'offrent d'elles-mêmes, nous nous bornerons à en rapporter une seule, celle qui se présente lorsqu'on a $\omega=0$ et $\lambda=1$. La première des expressions ci-dessus donne

$$\int \frac{2\,dx\,(lx)^2}{1+x^2}=\frac{\pi^3}{8},$$

et la série qui lui correspond se change en

$$\frac{2}{1^3}+\frac{2}{1^3}-\frac{2}{3^3}-\frac{2}{3^3}+\frac{2}{5^3}-\frac{2}{7^3}-\frac{2}{7^3}+\text{etc.}$$

on a par conséquent

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.}$$

résultat assez remarquable quand on le compare à l'expression

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}$$

qui dérive de la formule $\int \frac{dx}{1+x^2}$.

Il est facile de voir qu'on aura par le procédé dont nous traçons ici la marche, les valeurs des deux classes suivantes de formules

$$\int U\frac{dx}{x} = S\,, \qquad \int V\frac{dx}{x} = T$$

$$\int U'\frac{dx}{x}\,1x = \frac{dS}{d\omega}, \qquad \int V'\frac{dx}{x}\,1x = \frac{dT}{d\omega}$$

$$\int U\frac{dx}{x}\,(1x)^2 = \frac{d^2S}{d\omega^2}, \qquad \int V\frac{dx}{x}\,(1x)^2 = \frac{d^2T}{d\omega^2}$$

$$\int U'\frac{dx}{x}\,(1x)^3 = \frac{d^3S}{d\omega^3}, \qquad \int V'\frac{dx}{x}\,(1x)^3 = \frac{d^3T}{d\omega^3}$$

etc.

en faisant pour abréger

$$U = \frac{x^{\lambda-\omega} + x^{\lambda+\omega}}{1 + x^{2\lambda}}, \qquad V = \frac{x^{\lambda-\omega} - x^{\lambda+\omega}}{1 - x^{2\lambda}}$$

$$U' = \frac{-x^{\lambda-\omega} + x^{\lambda+\omega}}{1 + x^{2\lambda}}, \qquad V' = \frac{-x^{\lambda-\omega} - x^{\lambda+\omega}}{1 - x^{2\lambda}}.$$

Les séries correspondantes sont

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

et celles que donnent $\frac{dS}{d\omega}$, $\frac{d^2S}{d\omega^2}$, $\frac{d^3S}{d\omega^3}$, etc.

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

et celles que donnent $\frac{dT}{d\omega}$, $\frac{d^2T}{d\omega^2}$, $\frac{d^3T}{d\omega^3}$, etc.

Euler prescrit pour différentier les expressions finies de S et de T, des procédés dont le détail ne sauroit trouver place ici ; on peut d'ailleurs les retrouver facilement, ou s'en former de nouveaux.

1103. L'intégration effectuée par rapport à ω fait aussi remonter à des formules dans lesquelles $\mathrm{l}\,x$ se trouve au dénominateur. On a par cette voie

$$\int d\omega \int \frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}=\int\frac{dx}{x}\int\frac{x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}d\omega$$

$$=\int\frac{-x^{\lambda-\omega}+x^{\lambda+\omega}}{1+x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\frac{1}{\mathrm{l}x}=\int S\,d\omega$$

$$\int d\omega \int \frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}=\int\frac{dx}{x}\int\frac{x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}d\omega$$

$$=\int\frac{-x^{\lambda-\omega}-x^{\lambda+\omega}}{1-x^{2\lambda}}\frac{dx}{x}\frac{1}{\mathrm{l}x}=\int T\,d\omega;$$

et conservant les dénominations établies à la fin du n°. précédent, on formera encore ces deux classes d'intégrales définies

$$\int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{\mathrm{l}x}=\int S\,d\omega,\quad \int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{\mathrm{l}x}=\int T\,d\omega$$

$$\int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{(\mathrm{l}x)^2}=\int^2 S\,d\omega^2,\quad \int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{(\mathrm{l}x)^2}=\int^2 T\,d\omega^2$$

$$\int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{(\mathrm{l}x)^3}=\int^3 S\,d\omega^3,\quad \int V'\frac{dx}{x}\frac{1}{(\mathrm{l}x)^3}=\int^3 T\,d\omega^3$$

etc.

Pour en obtenir des valeurs, il faut pouvoir intégrer les expressions finies de S et de T; et faire en sorte que les résultats s'évanouissent dans les mêmes circonstances que les fonctions en x.

Or, $S=\dfrac{\pi}{2\lambda\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}}$, en y faisant $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega\pi}{2\lambda}$, donne

$$\int S\,d\omega=-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=-\mathrm{l}\tang\tfrac{1}{2}\theta\ (\text{n}^\circ.\ 448)$$

$$=-\mathrm{l}\tang\frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda}=\mathrm{l}\tang\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda},$$

résultat qui s'évanouit lorsque $\omega = 0$, comme le fait la fonction V' dans le même cas.

D'un autre côté, si l'on intègre l'expression de S en série

$$\frac{1}{\lambda-\omega}+\frac{1}{\lambda+\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}-\text{etc.}$$

il viendra

$$\int S\,d\omega = -l(\lambda-\omega)+l(\lambda+\omega)+l(3\lambda-\omega)-l(3\lambda+\omega)-\text{etc.}$$
$$= l\frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)(9\lambda+\omega)\text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)(9\lambda-\omega)\text{etc.}}.$$

Je n'ai point ajouté de constante à cette intégrale, parce qu'elle s'évanouit de même que la précédente lorsque $\omega = 0$. La comparaison des deux expressions de $\int S d\omega$ nous conduit à

$$\text{tang}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)\text{etc.}}.$$

Ce développement qui se déduiroit aussi des formules du n°. 1093, a la propriété de s'évanouir lorsque

$$\omega = -\lambda, \quad \omega = +3\lambda, \quad \omega = -5\lambda, \quad \omega = +7\lambda, \text{ etc.}$$

valeurs qui répondent aux arcs

$$0, \qquad \pi, \qquad -\pi, \qquad 2\pi, \text{ etc.}$$

et de devenir infini pour les valeurs

$$\omega = \lambda, \quad \omega = -3\lambda, \quad \omega = 5\lambda, \quad \omega = -7\lambda, \text{ etc.}$$

ou les arcs

$$\tfrac{1}{2}\pi, \quad -\tfrac{1}{2}\pi, \qquad \tfrac{3}{2}\pi, \quad -\tfrac{3}{2}\pi, \text{ etc.}$$

ce qui est conforme à la marche des tangentes.

Passons maintenant à l'intégrale

$$\int T\,d\omega = \int \frac{\pi d\omega}{2\lambda}\,\text{tang}\,\frac{\omega\pi}{2\lambda} = -l\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}, \text{ (n°. 447)};$$

comme elle s'évanouit en même temps que ω, elle sera la valeur immédiate de $\int V' \frac{dx}{x}\,\frac{1}{lx}$.

La série

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}+\text{etc.}$$

donne

$$\int T\,d\omega = -l(\lambda-\omega)-l(\lambda+\omega)-l(3\lambda-\omega)-l(3\lambda+\omega)-\text{etc.}$$

mais ici il faut avoir égard à la constante, pour que le résultat soit nul dans la supposition de $\omega=0$, et cela fait, on trouvera

$$\int T\,d\omega = \mathrm{l}\,\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\omega^2}\cdot\frac{9\lambda^2}{9\lambda^2-\omega^2}\cdot\frac{25\lambda^2}{25\lambda^2-\omega^2}\cdot\text{etc.}$$

La valeur finie de cette intégrale, $-\mathrm{l}\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}$, étant comparée au produit indéfini que nous venons d'obtenir, conduit à une expression de $\cos\frac{\omega\pi}{2\lambda}$, pareille à celle du n°. 1085.

1104. Nous prendrons pour dernier exemple de la recherche des valeurs des intégrales, la formule $\int dx\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}\right)^p$.

L'équation

$$(m+n)(m+2n)\ldots\ldots(m+pn)=\frac{n^p}{m}\,\frac{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{m-1}dx\,(1-x^n)^p},$$

obtenue dans le n°. 1071, devient

$$(q+1)(q+2)\ldots\ldots(q+p)=\frac{1}{qn}\,\frac{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{qn-1}dx\,(1-x^n)^p},$$

lorsqu'on y fait $m=qn$; et comme on a d'ailleurs

$$1.2\ldots\ldots(q+p)=\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p+q},$$

$$1.2\ldots\ldots(q-1)q=q\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{q-1},$$

il en résulte

$$\frac{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p+q}}{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{q-1}}=\frac{1}{n}\,\frac{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p}{\int x^{qn-1}dx\,(1-x^n)^p},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{q-1}\cdot\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^p}{\int dx\left(\mathrm{l}\frac{1}{x}\right)^{p+q}}=n\int x^{qn-1}dx\,(1-x^n)^p.$$

Il faut se rappeler que toutes les intégrales de cette équation ont pour limites $x=0$ et $x=1$; pour plus d'uniformité nous y changerons p en $p-1$, et nous aurons

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{q-1}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p+q-1}}=n\int x^{qn-1}dx\,(1-x^n)^{p-1}\ldots\ldots.(1).$$

Au moyen de cette équation, et en se rappelant que si r désigne un nombre entier, et s un nombre fractionnaire

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^r=1.2\ldots r,\quad \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^s=s(s-1)(s-2)\ldots(s-r+1)\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{s-r};$$

nous obtiendrons,

1°. En faisant $q=p$,

$$\frac{\left(\int dx\, l\left(\frac{1}{x}\right)^{p-1}\right)^2}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{2p-1}}=n\int x^{pn-1}dx\,(1-x^n)^{p-1}\ldots\ldots\ldots\ldots.(2);$$

et prenant $p-1=\frac{i}{2}$, $n=2$, il viendra

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}}=\left\{1.2\ldots\ldots(i+1).2\int x^{i+1}dx\,(1-x^2)^{\frac{i}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale du second membre ne dépend que du cercle; on y ramène immédiatement celle du premier, en observant que i doit nécessairement être un nombre impair, sans quoi $\frac{i}{2}$ seroit un nombre entier, et que par conséquent si l'on change i en $2i+1$, on aura

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2i+1}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\ldots\ldots\ldots\frac{2i+1}{1}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

puis supposant $i+1=0$, dans l'expression de $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}}$, on en tirera

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left\{2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi},$$

d'où l'on déduira enfin

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2i+1}{2}}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}.........\frac{2i+1}{2}.\sqrt{\pi}.$$

2°. En faisant $q=2p$, nous trouverons

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{2p-\frac{1}{2}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{3p-\frac{1}{2}}}=n\int x^{2pn-1}dx\,(1-x^n)^{p-1}.....(3);$$

multipliant cette équation membre à membre, par l'équation (2), nous parviendrons à

$$\frac{\left(\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}\right)^3}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{3p-\frac{1}{2}}}=n^2\int x^{pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}.\int x^{2pn-1}dx(1-x^n)^{p-1}...(4):$$

posant ensuite $p=\frac{i}{3}$, $n=3$, nous obtiendrons

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}=\left\{1.2.3...(i-1).9\int x^{i-1}dx(1-x^3)^{\frac{i}{3}-1}\int x^{2i-1}dx(1-x^3)^{\frac{i}{3}-1}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Il est visible par cette équation, et par ce qui a été dit plus haut, que la transcendante $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}$ présente seulement deux cas distincts, savoir :

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(l\frac{1}{x}\right)^2}}=\left\{9\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\times\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\right\}^{\frac{1}{3}},\text{ lorsque } i=1;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}}=\left\{9\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\times\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right\}^{\frac{1}{3}},\text{ lorsque } i=2;$$

ou, suivant la notation du n°. 1079,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(l\frac{1}{x}\right)^2}} = \sqrt[3]{9\varphi(1,1)\varphi(2,1)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{l\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{3\varphi(2,2)\varphi(1,2)},$$

en observant qu'entre les limites $x=0$ et $x=1$, on a en général

$$\int x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m}{m+p}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} \text{ (n°. 1079)},$$

de cette manière la formule $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}$ ne dépendra que de la seule transcendante désignée par A à la page 407.

1105. Ce que nous venons de faire sur les formules $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{2}}$, $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{3}-1}$, peut s'effectuer également sur les autres formules du même genre; mais au lieu de nous arrêter à des cas particuliers, nous allons démontrer ce théorême général :

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\left\{n^{n-m}.1.2\ldots(m-1)\varphi(1,m)\varphi(2,m)\ldots\varphi(n-1,m)\right\}^{\frac{1}{n}};$$

n et m étant des nombres entiers.

Soit pour abréger $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}} = \psi\left(\frac{m}{n}\right)$; puisque l'on a

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r} = r\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r-1}, \text{ ou } \int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r-1} = \frac{1}{r}\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{r},$$

l'équation (1) se change en

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{n}}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+p}{n}}} = \frac{mp}{m+p}\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

lorsqu'o

lorsqu'on y substitue $\frac{m}{n}$ à p, $\frac{p}{n}$ à q, et s'écrit ainsi:

$$\frac{\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{p}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+p}{n}\right)} = \frac{mp}{m+p}\,\varphi(p,m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$$

En mettant dans cette dernière successivement au lieu de p, les nombres 1, 2, 3.....n, et multipliant tous les résultats entr'eux, il viendra

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n \frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+1}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)} =$$

$$m^n \frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}\varphi(1,m)\varphi(2,m)\ldots\varphi(n,m);$$

il est facile de voir que

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots n}{(m+1)(m+2)(m+3\ldots\ldots(m+n)} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m)};$$

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+1}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)} =$$

$$\frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)}:$$

on conclut de là que

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n \frac{\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)} =$$

$$m^n \frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots m}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\varphi(1,m)\varphi(2,m)\ldots\ldots\varphi(n,m),$$

et comme

$$\psi\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right),\ \psi\left(\frac{n+2}{n}\right)=\frac{n+2}{n}\psi\left(\frac{2}{n}\right),\ \psi\left(\frac{n+3}{n}\right)=\frac{n+3}{n}\psi\left(\frac{3}{n}\right),\ \text{etc.}$$

il viendra

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n=\frac{m^n}{n^m}.1.2.3\ldots.m\varphi(1,m)\varphi(2,m)\varphi(3,m)\ldots\varphi(n,m),$$

d'où on tirera l'équation du théorême, en observant que

$$\varphi(n,m)=\frac{1}{m}\ (\text{n}^\circ.\ 1080\ ).$$

1106. En supposant que les nombres m et n ayent un diviseur commun r, nous tirerons encore de l'équation (A) la suivante

$$\{r.2r.3r\ldots.m\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\varphi(3r,m)\ldots.\varphi(n,m)\}^r$$
$$=1.2.3\ldots.m\varphi(1,m)\varphi(2,m)\varphi(3,m)\ldots.\varphi(n,m).$$

Pour cela nous y substituerons successivement r, $2r$, $3r$, ...n à la place de p, et nous aurons

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\frac{\psi\left(\frac{r}{n}\right)\psi\left(\frac{2r}{n}\right)\psi\left(\frac{3r}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{n}{n}\right)}{\psi\left(\frac{m+r}{n}\right)\psi\left(\frac{m+2r}{n}\right)\psi\left(\frac{m+3r}{n}\right)\ldots.\psi\left(\frac{m+n}{n}\right)}$$

$$=m^{\frac{n}{r}}\frac{r.2r.3r\ldots\ldots\ldots\ldots.n}{(m+r)(m+2r)(m+3r)\ldots(m+n)}\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\varphi(n,m)$$

$$=m^{\frac{n}{r}}\frac{r.2r.3r\ldots\ldots\ldots\ldots.m}{(n+r)(n+2r)(n+3r)\ldots(n+m)}\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\varphi(n,m)$$

$$=\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\frac{\psi\left(\frac{r}{n}\right)\psi\left(\frac{2r}{n}\right)\psi\left(\frac{3r}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\psi\left(\frac{m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n+r}{n}\right)\psi\left(\frac{n+2r}{n}\right)\psi\left(\frac{n+3r}{n}\right)\ldots\ldots\psi\left(\frac{n+m}{n}\right)};$$

or $\psi\left(\frac{n+r}{n}\right)=\frac{n+r}{n}\psi\left(\frac{r}{n}\right)$, et ainsi de suite: par ces valeurs, les deux dernières lignes ci-dessus donnent

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{r}}n^{\frac{m}{r}}=m^{\frac{n}{r}}.r.2r.3r\ldots.m\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots.\varphi(n,m);$$

d'où il résulte

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)^n = \frac{m^n}{n^m}\{r.2r.3r\ldots\ldots m\varphi(r,m)\varphi(2r,m)\ldots\ldots\varphi(n,m)\}^r,$$

et comparant cette équation avec la dernière du n°. précédent, on aura celle du théorême.

1107. Lorsqu'on prend $p = n - m$, l'équation (A) devient

$$\frac{\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{n-m}{n}\right)}{\psi\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{m(m-n)}{n}\varphi(n-m,m);$$

mais on a par les n°s. 1180 et 1184, $\varphi(n-m,m) = \dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$, et

de plus $\psi\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}$, il viendra donc

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)\psi\left(\frac{n-m}{n}\right) = \frac{m(m-n)\pi}{n^2\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Faisons successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc. et multiplions membre à membre, les équations résultantes, nous obtiendrons

$$\psi\left(\frac{1}{n}\right)\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)\psi\left(\frac{2}{n}\right)\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)\psi\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right)^2\psi\left(\frac{2}{n}\right)^2\ldots\ldots\psi\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\psi\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{(1.2.3\ldots\ldots(n-1))^2\pi^{n-1}}{n^{2n-2}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Le produit $\quad \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$,

s'évalue par le moyen de la formule (C) du n°. 1094, en faisant attention que

$$\sin\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.\cos\frac{1}{n}\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2},$$

et ainsi des autres. On aura par cette remarque

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=2^{n-1}\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\sin\frac{2}{n}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}$$
$$\times\sin\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}.\sin\frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2}\ldots\sin\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

d'où l'on conclura

$$\downarrow\left(\frac{1}{n}\right)^2\downarrow\left(\frac{2}{n}\right)^2\ldots\ldots\downarrow\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\downarrow\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{(1.2\ldots(n-1))^2 2^{n-1}\pi^{n-1}}{n^{2n-2}.n};$$

prenant la racine de chaque membre de cette équation, et mettant au lieu de la fonction $\downarrow$ l'intégrale qu'elle représente, il viendra

$$\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}.\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{n}}\ldots\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{n^{n-1}}\sqrt{\frac{2^{n-1}\pi^{n-1}}{n}}.$$

Ce beau théorême se trouve, mais sans démonstration, dans un Mémoire inédit d'Euler, que Prony m'a communiqué.

1108. Les diverses formes d'intégrales définies, dont nous nous sommes occupés depuis le n°. 1076, suffisent sans doute pour donner des notions exactes et complètes de cette branche de l'Analyse, créée par Euler, et faire sentir son importance. Elle est malheureusement très-peu avancée; toutes les expressions qu'on est parvenu à évaluer sont circonscrites dans un petit nombre de formes très-particulières: les mêmes résultats qui reviennent à tout moment font voir qu'on n'a presque fait que tourner dans un cercle peu étendu et qui paroît entièrement compris dans la Théorie des puissances du second ordre. En effet, on obtiendra par les formules du n°. 1072, la plupart des théorêmes énoncés dans ce qui précède, ainsi qu'on l'a déjà vu pour quelques-uns dans le n°. 964. Kramp, dans son *Analyse des réfractions astronomiques*, a déduit des *facultés numériques* (nom qu'il donne à ce que j'ai nommé puissances du second ordre), quelques résultats généraux sur les intégrales définies. Ces résultats reposent sur un théorême entièrement semblable à celui du n°. 904, et sur des transformations de l'expression $\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi}$, décomposée en facteurs, d'après les

formules du n°. 1095. Les combinaisons et les modifications que ses formules éprouvent dans le passage des nombres entiers aux nombres fractionnaires, conduisent l'auteur à des conséquences paradoxales, qu'il reconnoît pour telles et qu'il ne présente que comme un motif d'examiner avec l'attention la plus sévère, la Théorie des racines et des logarithmes des quantités négatives. Ces difficultés n'étonneront point ceux qui auront fait attention aux remarques du n°. 878, sur l'interpolation, et à la manière dont je me suis exprimé, en parlant, à la page 173, de l'interpolation de l'expression de $\frac{\sin\frac{2n-1}{2}}{2n-1}$. Le Chapitre consacré à la Théorie des facultés numériques est terminé par une méthode pour évaluer ces facultés, soit rigoureusement, soit par approximation, et qui dépend en grande partie des propriétés des coefficiens du développement des puissances des polynomes, dont les Géomètres Allemands paroissent s'être beaucoup occupés depuis quelque temps, ainsi que nous l'avons déjà indiqué au n°. 1044.

L'analyse que je viens de faire de la Théorie *des facultés numériques*, donnée par Kramp, suffira au lecteur intelligent pour le mettre en état de comparer cette Théorie avec celle des puissances du second ordre, en observant que le Géomètre de Cologne appelle *base* le premier terme de la progression des facteurs, et qu'il enseigne non-seulement à changer la différence de cette progression, à la réduire, par exemple, à l'unité, comme je l'ai fait dans le n°. 902, mais encore à donner à la faculté une base quelconque, ce qui s'effectue aussi facilement que le changement de différence et par un procédé analogue. Le défaut de tems et d'espace ne m'a point permis d'entrer dans de plus grands détails; mais j'y reviendrai ailleurs, si les circonstances me le permettent.

Des séries propres à évaluer les intégrales qui sont des fonctions de grands nombres.

1109. La formule $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^p$, égale à $\frac{1}{m}[p]^p\left[\frac{m}{n}\right]^{-p}$, entre les limites $x=0$ et $x=1$ (n°. 1072), se rencontre fréquemment dans la recherche de la probabilité des événemens futurs, d'après l'observation des événemens passés; les nombres m et p, qui

dépendent de ces derniers, sont alors tellement grands, qu'il est impossible d'effectuer la multiplication des facteurs dont est formé le produit qui exprime cette intégrale.

On a recours dans ce cas à une approximation qui fait connoître les premiers chiffres de ce produit, et qui suffit, parce qu'il ne s'agit que de rapports d'intégrales semblables à la proposée. Les formules du n°. 945, donnent immédiatement cette approximation; mais Laplace l'a déduite aussi d'une Théorie générale, dans laquelle il s'est proposé l'évaluation des fonctions de grands nombres, et dont nous allons donner un extrait.

Le principal objet de ces recherches est d'obtenir les intégrales des Fonctions différentielles renfermant des facteurs élevés à de grandes puissances, par des séries d'autant plus convergentes que les exposans de ces puissances sont considérables.

Soit $y\,dx = u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots \varphi\, dx$ la différentielle à intégrer entre les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$; u, u', u'', ... φ, désignant des fonctions de x, et s, s', s'' etc. des nombres très-grands. En représentant par Y ce que devient y, lorsque x devient θ, nous ferons $y = Yc^{-t}$, c étant le nombre dont le logarithme népérien est l'unité; nous tirerons de là $t = l\dfrac{Y}{y}$, et considérant x comme une fonction de t, nous aurons

$$x = \theta + \frac{dx}{dt}\frac{t}{1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

en observant de faire, après les différentiations, $t=0$, valeur qui répond à celle de $x=\theta$ et qui change y en Y. L'équation $t = l\dfrac{Y}{y}$ conduisant à $dt = -\dfrac{dy}{y}$, on aura $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y\,dx}{dy}$, expression dans laquelle dy introduit au dénominateur les exposans s, s', s'', etc. Si l'on fait pour abréger $-y\dfrac{dx}{dy} = v$, il viendra $dt = \dfrac{dx}{v}$; et cette équation fournira le moyen d'exprimer les coefficiens différentiels $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, etc. par v, $\dfrac{d^2v}{dx^2}$, etc. en traitant v comme une fonction

de x, et x comme une fonction de t; on trouvera

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{vdv}{dx},\quad \frac{d^3x}{dt^3}=\frac{d.vdv}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{vd.vdv}{dx^2},$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{d.vd.vdv}{dx^3}\frac{dx}{dt}=\frac{vd.vd.vdv}{dx^3}\ldots\text{etc.}$$

En général on aura $\frac{d^nx}{dx^n}=\frac{vd.vd.v\ldots dv}{dx^{n-1}}$, en supposant dx constant dans le second membre; et représentant par V ce que devient v quand x tant est égal à θ, ou t égal à zéro, $\frac{Vd.Vd.V\ldots\ldots dV}{d\theta^{n-1}}$, sera ce que devient $\frac{d^nx}{dt^n}$, puis on obtiendra

$$x=\theta+V\frac{t}{1}+\frac{VdV}{dt}\frac{t^2}{1.2}+\frac{Vd.VdV}{d\theta^2}\frac{t^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$dx=Vdt\{1+\frac{dV}{d\theta}\frac{t}{1}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\}$$

$$\int y\,dx=VY\int dt\,c^{-t}\{1+\frac{dV}{d\theta}\frac{t}{1}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}\frac{t^2}{1.2}+\text{etc.}\}.$$

Le second membre de la dernière de ces équations dépend des intégrales comprises dans la formule $\int t^n dt c^{-t}$. Si, dans cette formule, on fait $c^{-t}=z$, les limites de t étant o et l'infini, celles de z seront 1 et o, et l'on aura $-\int dz\left(l\frac{1}{z}\right)^n$ à prendre depuis $z=1$ jusqu'à $z=0$; ce qui donnera $1.2.3\ldots.n$ (n°. 1071); il viendra donc

$$\int y\,dx=VY\{1+\frac{dV}{d\theta}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}+\frac{d.Vd.VdV}{d\theta^3}+\text{etc.}\}$$

pour la valeur de $\int ydx$, depuis $x=\theta$, jusqu'à la valeur de x, qui répond à t infini. Prenant de même la valeur de $\int ydx$, depuis $x=\theta'$, jusqu'à la valeur de x, qui répond à t infini, ce qui s'effectuera en marquant d'un accent les quantités Y et V, pour indiquer que dans ce dernier cas elles se rapportent à θ', on trouvera qu'entre les limites $x=\theta$ et $x=\theta'$,

$$\left.\begin{aligned}\int y\,dx=V'Y'(1+\frac{dV'}{d\theta'}+\frac{d.V'dV'}{d\theta'^2}+\frac{d.V'd.V'dV'}{d\theta'^3}+\text{etc.})\\ -VY(1+\frac{dV}{d\theta}+\frac{d.VdV}{d\theta^2}+\frac{d.Vd.VdV}{d\theta^3}+\text{etc.})\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(A).$$

La variable t a entièrement disparu de ce résultat, dont les différentiations ne sont relatives qu'aux lettres θ et θ'; et si ces lettres entroient primitivement dans l'expression de y, il ne faudroit faire varier que celles qu'introduiroit le changement de x en θ et en θ', dans le passage de y à Y et à Y'.

Pour se convaincre que la formule *(A)* doit être en général très-convergente, il suffit de remarquer que la quantité

$$v = -\frac{y\,dx}{dy} = -\frac{1}{\frac{s\,du}{u\,dx} + \frac{s'\,du'}{u'\,dx} + \text{etc.} + \frac{d\varphi}{\varphi\,dx}}$$

deviendra d'autant plus petite que les exposans s, s', etc. seront considérables, si toutefois le dénominateur ne contient pas des facteurs de la forme $(x-a)^m$, dans lesquels a diffère peu de θ ou de θ'; car il est visible que la substitution de ces quantités rendroit ce facteur très-petit, et que les termes divisés successivement par $(x-a)^m$, $(x-a)^{m+1}$, $(x-a)^{m+2}$, etc. deviendroient de plus en plus grands.

1110. Pour ce cas on désignera par Y ce que devient y, lorsqu'on y change x en a; et puisque $(x-a)^m$ est un facteur de $\frac{dy}{y\,dx}$, ou de $d.\mathrm{l}\frac{Y}{y}$, $(x-a)^{m+1}$ sera le facteur correspondant de $\mathrm{l}\frac{Y}{y}$; on fera

$$y = Ye^{-t^{m+1}}, \qquad v = \frac{x-a}{(\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y)^{\frac{1}{m+1}}};$$

d'où l'on conclura $\quad t = (\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y)^{\frac{1}{m+1}}, \qquad x - a = vt,$

v ne devenant point infini lorsque $x=a$. Les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc. déduites de l'équation $x-a=vt$, en considérant, dans le deuxième membre, v comme fonction de x, x comme fonction de t, et négligeant les termes multipliés par t, qui s'évanouissent lorsque $x=a$, se réduiront à v, $\frac{d.v^2}{dx^2}$, $\frac{d^2.v^3}{dx^2}$, etc. et mettant dans ces dernières V au lieu de v, pour marquer qu'il faut y changer x en a, après les différentiations,

différentiations, on aura

$$x = a + V\frac{t}{1} + \frac{d.V^2}{dx}\,\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^2.V^3}{dx^2}\,\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et l'on en déduira

$$\int y\,dx = Y\int dt\,e^{-t^{m+1}}\left\{V + \frac{d.V^2}{dx}\,\frac{t}{1} + \frac{d^2.V^3}{dx^2}\,\frac{t^2}{1.2} + \frac{d^3.V^4}{dx^3}\,\frac{t^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right\}\ldots\ldots(B),$$

expression dans laquelle il faut encore effectuer les intégrations comprises dans la formule $\int t^n dt\,e^{-t^{m+1}}$, qui se transforme en

$$-\frac{1}{m+1}\int dz\left(1\,\frac{1}{z}\right)^{\frac{n-m}{m+1}}$$ lorsqu'on fait $e^{-t^{m+1}} = z$, et se réduit par les formules du n°. 428, au cas où l'exposant $\frac{n-m}{m+1}$ est une fraction négative.

En intégrant par parties l'expression $\int t^n dt\,e^{-t^{m+1}}$, après l'avoir mise sous la forme $\int t^{n-m}.t^m dt\,e^{-t^{m+1}}$: on trouve

$$\int t^n dt\,e^{-t^{m+1}} = \frac{-e^{-t^{m+1}}}{m+1}\times$$

$$\left\{t^{n-m} + \frac{n-m}{m+1}t^{n-2m-1} + \frac{(n-m)(n-2m-1)}{(m+1)^2}t^{n-3m-2}\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(n-m)(n-2m-1)(n-3m-2)\ldots(n-rm+m-r+2)}{(m+1)^{r-1}}t^{n-rm-r+1}\right\}$$

$$+\frac{(n-m)(n-2m-1)\ldots(n-rm-r+1)}{(m+1)^r}\int t^{n-rm-r}dt\,e^{-t^{m+1}},$$

r étant le nombre égal au quotient entier de la division de n par $m+1$; par là l'intégrale proposée est ramenée aux suivantes

$$\int dt\,e^{-t^{m+1}},\quad \int t\,dt\,e^{-t^{m+1}}\ldots\ldots\int t^{m-1}dt\,e^{-t^{m+1}},$$

dont il faudra calculer les valeurs par les méthodes approximatives.

La formule *(B)* doit être regardée comme un supplément à la formule *(A)* pour l'intervalle dans lequel x diffère peu de a.

On parviendra facilement aux valeurs de V, $\frac{d.V^2}{dx}$, $\frac{d^2.V^3}{dx^2}$, etc. au moyen du développement

$$lY-ly=(x-a)^{m+1}\{A+B(x-a)+C(x-a)^2+D(x-a)^3+\text{etc.}\},$$

pour lequel on a

$$A=-\frac{d^{m+1}.ly}{1.2\ldots.(m+1)dx^{m+1}},\quad B=-\frac{d^{m+2}.ly}{1.2\ldots.(m+2)dx^{m+2}},\ \text{etc.}$$

en faisant après les différentiations $x=a$: on en tirera immédiatement les puissances de v.

1111. On voit mieux la nature et les avantages des formules *(A)* et *(B)* en les particularisant, c'est pourquoi nous prendrons $y=x^p(1-x)^q$. Nous aurons pour la première

$$v=-\frac{ydx}{dy}=-\frac{x(1-x)}{p-(p+q)x};$$

et pour exprimer que p et q sont de grands nombres, nous ferons $p=\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{\beta}{\alpha}$, α étant une très-petite fraction; il viendra alors

$$v=-\alpha\frac{x(1-x)}{1-(1+\beta)x}:$$

ainsi v sera de l'ordre α; et l'on voit évidemment que tous les termes de la série *(A)* seront ordonnés suivant les puissances de α. Cette série est donc très-convergente, lorsque le dénominateur de v n'est pas très-petit à l'une ou à l'autre des limites de l'intégrale, et pour cela il faut que θ et θ' diffèrent beaucoup de $\frac{1}{1+\beta}$. En effet, l'exposant du dénominateur de v croissant de l'unité à chaque différentiation, le terme multiplié par α^m aura un dénominateur élevé à la puissance $2m-1$. Il suit de là que α doit être moindre que le quarré du dénominateur, pour que la convergence ait lieu, et que par conséquent la formule *(A)* peut être employée depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{1+\beta}-\delta$, pourvu que $\alpha<\delta^2$;

On trouvera dans cette hypothèse

$$\int y\,dx = \frac{\alpha\beta^{q+1}(1-(1+\beta)\delta)^{p+1}\left(1+\frac{1+\beta}{\beta}\delta\right)^{q+1}}{(1+\beta)^{p+q+3}\delta} \times$$

$$\left\{1 - \frac{\alpha(\beta+(1+\beta)^2\delta^2)}{(1+\beta)^3\delta^2} + \text{etc.}\right\}.$$

La même série peut servir aussi depuis $x = \frac{1}{1+\beta} + \delta$ jusqu'à $x = 1$, parce que la supposition de $x=1$, donnant $y=0$ et $v=0$, la valeur de $\int y\,dx$, dans ce dernier cas, ne diffère de celle qui répond au premier que par le signe de δ, à cause qu'elle est prise en sens contraire, par le changement de signe qu'a subi dans l'expression de la limite, la quantité δ : il suffira donc d'écrire dans la série précédente $-\delta$ au lieu de δ, et de changer le signe du résultat final.

1112. La valeur $x = \frac{1}{1+\beta}$, qui rend nul le dénominateur de v, faisant évanouir le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, répond au *maximum* de y (n°. 149); on ne peut donc par ce qui précède obtenir l'intégrale $\int y\,dx$ dans le voisinage de ce *maximum*. Il faut alors recourir à la formule *(B)*, dans laquelle a représentera $\frac{1}{1+\beta}$, et l'exposant m sera l'unité, en sorte qu'on aura

$$t = \sqrt{\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y}, \qquad v = \frac{x-a}{\sqrt{\mathrm{l}Y - \mathrm{l}y}};$$

$$\int y\,dx = Y\int dt\,e^{-t^2}\left\{V + \frac{d.V^2}{dx}\frac{t}{1} + \frac{d^2.V^3}{dx^2}\frac{t^2}{1.2} + \text{etc.}\right\} \ldots\ldots (B').$$

Il est visible que les termes de cette série ne seront pas multipliés respectivement par α, α^2, α^3, etc. mais par $\alpha^{\frac{1}{2}}$, α, $\alpha^{\frac{3}{2}}$, etc..... à cause du radical qui entre dans l'expression de v. Les intégrales relatives à t se ramènent toutes à $\int dt\,e^{-t^2}$, ou s'obtiennent

algébriquement : on a par la formule du n°. 1110

$$\int t\,dt\,e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}e^{-t^2}, \quad \int t^2dt\,e^{-t^2} = -\tfrac{1}{2}te^{-t^2} + \tfrac{1}{2}\int dt\,e^{-t^2}$$

$$\int t^3dt\,e^{-t^3} = -\tfrac{1}{2}t^2e^{-t^2} - \tfrac{1}{2}e^{-t^2}, \text{ etc.}$$

Si l'on représente par δ et δ' les deux limites de t, on trouvera entre ces limites,

$$\int y\,dx = Y\left\{V + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.V^3}{1.2dx^2} + \frac{1.3}{2^2}.\frac{d^4V^5}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}\right\}\int dt\,e^{-t^2}$$
$$+ \frac{Y}{2}e^{-\delta^2}\left\{\frac{d.V^2}{dx} + \frac{d^2.V^3}{1.2dx^2}\delta + \frac{d^3.V^4}{1.2.3dx^3}(\delta^2+1) + \text{etc.}\right\}$$
$$- \frac{Y}{2}e^{-\delta'^2}\left\{\frac{d.V^2}{dx} + \frac{d^2.V^3}{1.2dx^2}\delta' + \frac{d^3.V^4}{1.2.3dx^3}(\delta'^2+1) + \text{etc.}\right\};$$

il ne s'agit plus que d'obtenir l'intégrale $\int dt\,e^{-t^2}$.

Ce résultat se simplifie beaucoup lorsqu'on prend δ et δ', de manière qu'ils répondent aux valeurs de x, qui rendent y nulle ; et l'équation $t = \sqrt{\text{l}Y - \text{l}y}$ montre qu'il faut faire pour cela $\delta = -$ inf, $\delta' = +$ inf. Dans cette hypothèse les quantités $\delta e^{-\delta^2}$, $\delta'' e^{-\delta'^2}$, s'évanouissent (n°. 140) ; on a $\int dt\,e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$, et

$$\int y\,dx = Y\sqrt{\pi}\left\{V + \frac{1}{2}\,\frac{d^2.V^3}{1.2dx^2} + \frac{1.3}{2^2}\,\frac{d^4.V^5}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}\right\}:$$

En faisant $m = 1$, dans le développement de $\text{l}Y - \text{l}y$, indiqué n°. 1110, on aura

$$A = -\frac{d^2.\text{l}y}{1.2dx^2}, \quad B = -\frac{d^3.\text{l}y}{1.2.3dx^3}, \quad C = -\frac{d^4.\text{l}y}{1.2.3.4dx^4}, \text{etc.}$$

d'où l'on tirera

$$v = \{A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \text{etc.}\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$= A^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}-1}B(x-a) + \text{etc.}$$

On formeroit d'une manière analogue les puissances de v, que l'on différentieroit ensuite comme l'exige la formule, puis on feroit $x = a$, supposition qui réduit v à $A^{-\frac{1}{2}}$, et l'expression $d^2.\text{l}y = \frac{d^2y}{y} - \frac{dy^2}{y^2}$, à $d^2.\text{l}y = \frac{d^2y}{y}$, à cause que la valeur $x=a$,

propre au *maximum*, fait évanouir dy. Il suit de là que dans l'hypothèse établie après les différentiations,

$$A = -\frac{d^2 . ly}{1.2 dx^2} = -\frac{d^2 Y}{2 Y dx^2},$$

et que par conséquent $V = \frac{\sqrt{2Y}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}$; en sorte qu'en n'ayant égard qu'au premier terme de la série, il vient

$$\int y\, dx = \frac{Y^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}, \text{ ou } (\int y\, dx)^2 = \frac{2\pi Y^3}{-\frac{d^2Y}{dx^2}}.$$

Dans l'exemple que nous avons choisi, où $y = x^p(1-x)^q$, on trouve $a = \frac{p}{p+q}$; et calculant d'après cette dernière valeur celles de Y et de $\frac{d^2Y}{dx^2}$, on obtient, en conservant les dénominations adoptées plus haut,

$$\int y dx = \frac{\beta^{q+\frac{1}{2}} \sqrt{2 a \pi}}{(1+\beta)^{p+q+\frac{1}{2}}}.$$

Si on poursuivoit le calcul, on trouveroit de même les autres termes de l'expression de $\int y dx$; tous rentreroient dans ceux de la série qu'on obtiendroit en développant l'intégrale $\int y dx$, en produit indéfini (n°. 1071), et en calculant ces produits par la méthode du n°. 945.

1113. Si les limites de l'intégrale $\int y dx$ étoient quelconques, l'intégrale $\int dt e^{-t^2}$ ne seroit plus donnée immédiatement par la circonférence du cercle, et si l'exposant m du facteur $x-a$, dans $lY - ly$, surpassoit 2, on auroit aussi de nouvelles intégrales à évaluer.

Pour calculer immédiatement la valeur de $\int dt e^{-t^2}$, lorsqu'elle ne doit pas être prise entre les deux limites infinies de t, Laplace donne deux séries que nous allons rapporter.

1°. En développant l'exponentielle e^{-t^2}, suivant les puissances de t, et intégrant chaque terme depuis $t=0$, jusqu'à $t=T$, on obtient

$$\int dt\, e^{-t^2} = T - \frac{1}{1}\,\frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\,\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\,\frac{T^7}{7} + \text{etc.}$$

Tant que T ne sera pas très-grand, cette série sera convergente ; et elle tend toujours à le devenir par sa nature (Int. n°. 22).

2°. On peut donner à la différentielle $dt\, e^{-t^2}$ la forme $\frac{1}{2t}.2t\,dt\,e^{-t^2}$, et en intégrant ensuite par parties relativement au second facteur, on trouvera cette série

$$\int dt\, e^{-t^2} = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2T^4} - \frac{1.3.5}{2^3T^6} + \text{etc.}\right),$$

qui paroît convergente au moins dans ses premiers termes lorsque T est très-grand, mais qui pourtant finit par être divergente. Cependant comme les termes qui la composent sont alternativement positifs et négatifs, sa partie convergente peut encore donner des limites de la valeur de $\int dt\, e^{-t^2}$, depuis t infini, jusqu'à $t=T$; ces limites seront resserrées le plus qu'il sera possible, lorsqu'on aura poussé la série jusqu'à la fin de la convergence, c'est-à-dire, jusqu'au point où la différence de deux termes consécutifs est moindre que dans le reste de la série.

Ce que nous avons dit précédemmentsur les intégrales définies de la forme $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^r$, nous dispense de suivre Laplace dans les détails où il entre relativement à l'intégrale $\int t^n dt\, e^{-t^{m+1}}$, lorsqu'elle doit être prise depuis $t=0$, jusqu'à t infini. En effet, cette intégrale a été transformée dans le n°. 1110 en $-\frac{1}{m+1}\int dz\left(l\frac{1}{z}\right)^{\frac{n-m}{m+1}}$, en faisant $e^{-t^{m+1}}=z$, et celle-ci doit visiblement être prise entre les limites $z=1$ et $z=0$, quand la première l'est depuis $t=0$,

jusqu'à t infini; les théorêmes des nos. 1104 et suiv. s'appliquent donc alors à l'intégrale $\int t^n dt\, e^{-t^{m+1}}$, et donnent des moyens d'en réduire les différens cas aux transcendantes distinctes qu'elle contient.

1114. Laplace indique ensuite ce qu'il faut faire pour appliquer sa méthode aux intégrales doubles et triples. Il montre d'abord comment on peut changer leurs limites variables en d'autres qui soient déterminées. S'il s'agissoit, par exemple, d'évaluer la formule $\int\int y\,dx\,dx'$, en intégrant en premier lieu depuis $x'=X$, jusqu'à $x'=X'$, on feroit $x'=X+u(X'-X)$; on transformeroit, d'après cette hypothèse, l'expression $\int\int y\,dx\,dx'$ en une autre de la forme $\int\int y\,(X'-X)\,dx\,du$, du (n°. 527), dans laquelle l'intégration relative à u s'effectueroit depuis $u=0$, jusqu'à $u=1$.

Cela posé, nous regarderons dans ce qui va suivre l'intégrale $\int\int y\,dx\,dx'$, comme ayant des limites constantes, savoir:

$$x=\theta,\quad x=\mu,\quad x'=\theta',\quad x'=\mu'.$$

Représentant à l'ordinaire par Y ce que devient y, lorsqu'on change x et x' en θ et θ', on fera $y=Ye^{-t-t'}$, ou $1Y-1y=t+t'$; substituant ensuite $\theta+z$ et $\theta'+z'$, à x et à x', puis développant $1Y-1y$ en série, par rapport aux puissances de z et de z' (n°. 32), on mettra le résultat sous la forme

$$Mz+M'z'=t+t',$$

en rassemblant dans M tous les termes qui contiendront z seul ou z combiné avec z', et dans M' ceux qui ne contiendront que z'; on fera séparément

$$Mz=t,\qquad M'z'=t'.$$

La seconde équation fournira immédiatement par le retour des suites, une expression de z' en t', à l'aide de laquelle on tirera de la première l'expression de z en t et t'; il ne restera plus qu'à transformer le produit $dx\,dx'=dz\,dz'$, au moyen des différentielles dt et dt', et en supposant $z=Nt$, $z'=N't'$, on aura (n°. 528)

$$\int\int y\,dx\,dx'=Y\int\int\frac{d.Nt}{dt}\,\frac{d.N't'}{dt'}\,dt\,dt'.e^{-t-t'}.$$

l'intégration des différens termes du second membre de cette équation dépendra des formules $\int t^n dt e^{-t}$, $\int t'^n dt' e^{-t'}$; si l'on commence par l'intégration relative à t', et qu'entre les limites $t'=0$ et t infini, l'on ait

$$\int \frac{d.Nt}{dt}\,\frac{d.N't'}{dt'}\,dx' = Q;$$

YQ sera la valeur de $\int y\,dx'$, depuis $x'=\theta'$, jusqu'à la valeur de x', qui répond à t' infini. Remplaçant ensuite θ' par μ', dans y et dans Q, que nous changerons en conséquence en Y' et Q', nous aurons $Y'Q'$ pour la valeur de $\int y\,dx'$, depuis $x'=\mu'$, jusqu'à la valeur de x' qui répond à l'infini, et nous conclurons de là que $YQ-Y'Q'$ est la valeur complète de $\int y\,dx'$, ou que pour obtenir $\int\int y\,dx\,dx'$, il ne reste plus qu'à intégrer par rapport à t la fonction $YQ\,dt-Y'Q'\,dt$. Faisant alors $\int Q\,dt=R$, $\int Q'\,dt=R'$, R et R' étant prises depuis $t=0$, jusqu'à $t=$ infini, on aura $YR-Y'R'$, pour la valeur de $\int y\,dx\,dx'$, depuis $x=\theta$, jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Enfin dans Y, Y', R et R', on changera θ en μ, et représentant les résultats par $Y_{,}$, $Y'_{,}$, $R_{,}$ et $R'_{,}$, on obtiendra $Y_{,}R_{,}-Y'_{,}R'_{,}$, pour la valeur de $\int\int y\,dx\,dx'$, depuis $x=\mu$, jusqu'à la valeur de x qui répond à t infini. Prenant la différence entre cette quantité et la précédente, on trouvera qu'entre les limites $x'=\theta'$ et $x'=\mu'$, $x=\theta$ et $x=\mu$;

$$\int\int y\,dx\,dx' = YR - Y'R' - Y_{,}R_{,} + Y'_{,}R'_{,}.$$

Cette formule est analogue à l'équation *(A)* du n°. 1109, et ne peut pas non plus servir aux environs du *maximum* de y; pour en trouver une qui soit appropriée à ce cas, il faut considérer si le *maximum* a lieu par rapport à l'une des variables seulement, ou par rapport à toutes deux en même tems, c'est-à-dire, s'il ne fait évanouir que l'un des coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy'}{dx'}$, ou s'il les rend nuls tous deux (n°. 154). Si l'on avoit seulement $\frac{dy}{dx}=0$, on prendroit $y=Ye^{-t^2-t'}$, tandis qu'il faudroit faire $y=Ye^{-t^2-t'^2}$, si l'on avoit en même tems $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy'}{dx'}=0$.

1115.

1115. Sans s'arrêter à ces circonstances particulières, Laplace indique le moyen de parvenir à des formules qui donnent l'intégrale $\int\int y\,dx\,dx'dx''$, entre les limites de x, de x' et de x'', qui rendent y nul. Il part pour cela du *maximum* absolu de la fonction y, qu'il suppose correspondre à $x=a$, $x'=a'$, $x=a''$, et qu'il désigne par Y; il fait

$$y=Ye^{-t^2-t'^2-t''^2}, \quad x=a+z, \quad x'=a'+z', \quad x''=a''+z'',$$

et développant ensuite, suivant les puissances de z, z', z'', le premier membre de l'équation

$$\mathrm{l}Y-\mathrm{l}y=t^2+t'^2+t'',$$

il lui donne la forme

$$Mz^2+M'z'^2+M''z''^2=t^2+t'^2+t''^2,$$

en réunissant dans M tous les termes multipliés par z^2, et contenant z, z', z'', dans M' ceux qui ne contiennent que z' et z'', et enfin dans M'' ceux qui ne contiennent que z'' seul. Il déduit de là les trois équations

$$Mz^2=t^2, \qquad M'z'^2=t'^2, \qquad M''z''^2=t''^2,$$

qui résolues, en commençant par la dernière, au moyen du retour des suites, donnent

$$z=Nt, \qquad z'=N't', \qquad z''=N''t'',$$

N'' étant une fonction de t'' seul, N' une fonction de t' et t'', et enfin N une fonction de t, t' et t''. Cela fait, il transforme $dx\,dx'dx''=dz\,dz'dz''$, en $\dfrac{d.Nt}{dt}\,\dfrac{d.N't'}{dt'}\,\dfrac{d.N''t''}{dt''}dt\,dt'dt''$, il obtient

$$\int\int\int y\,dx\,dx'dx''=Y\int\int\int\frac{d.Nt}{dt}\,\frac{d.N't'}{dt'}\,\frac{d.N''t''}{dt''}dt\,dt'dt''e^{-t^2-t'^2-t''^2}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'évaluer les intégrales des termes du second membre, comprises dans la formule

$$\int\int\int t^n t'^{n'} t''^{n''}\,dt\,dt'dt''e^{-t^2-t'^2-t''^2};$$

les limites des variables t, t', t'', étant l'infini négatif et l'infini positif, on reconnoîtra comme dans le n°. 1112, que l'intégrale ci-dessus s'évanouit toutes les fois que l'un des nombres n, n', n'',

sera impair ; et dans le cas où ces exposans seroient pairs ou de la forme $2i$, $2i'$, $2i''$, on trouvera, au moyen de l'intégration par parties, que la même expression se réduit à

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1).1.3.5\ldots(2i'-1).1.3.5\ldots(2i''-1)\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{i+i'+i''}},$$

résultat dans lequel le numérateur de l'exposant de π est égal au nombre des variables indépendantes x, x', x''.

Si l'on veut se borner au premier terme de la série qui exprime l'intégrale $\int y\,dx\,dx'dx''$, terme qui suffira lorsque les exposans des facteurs de y seront en très-grands nombres, on aura, par un calcul semblable à celui qui termine le n°. 1112,

$$M = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2}, \quad M' = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx'^2}, \quad M'' = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx''^2},$$

les quantités $\frac{d^2Y}{dx^2}$, $\frac{d^2Y}{dx'^2}$, $\frac{d^2Y}{dx''^2}$, désignant ce que deviennent les coefficiens différentiels $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx'^2}$, $\frac{d^2y}{dx''^2}$, lorsqu'on y substitue a, a', a'', au lieu de x, x', x''. On tirera de là

$$z = \frac{Y^{\frac{1}{2}}t}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}, \quad z' = \frac{Y^{\frac{1}{2}}t'}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx'^2}}}, \quad z'' = \frac{Y^{\frac{1}{2}}t''}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx''^2}}},$$

puis cette équation approchée $\int y\,dx\,dx'dx'' =$

$$Y\int \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}} \cdot \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx'^2}}} \cdot \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx''^2}}}\,dt\,dt'\,dt''\,c^{-t^2-t'^2-t''^2},$$

d'où l'on conclura cette autre

$$\int y\,dx\,dx'dx'' = \frac{Y^{\frac{5}{2}}(-2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{d^2Y}{dx^2}\,\frac{d^2Y}{dx'^2}\,\frac{d^2Y}{dx''^2}}}.$$

En calculant *à priori* l'intégrale $\int dt\,dt'dt''c^{-t^2-t'^2-t''^2}$, nous n'avons

considéré que trois variables, mais il est évident que la méthode demeurera la même quel que soit le nombre des variables.

Examen de la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$.

1116. Nous allons acquitter ici l'engagement que nous avons pris dans le n°. 435, de faire connoître plus en détail la transcendante $\int \frac{e^x dx}{x}$, qui se change en $\int \frac{dz}{lz}$, lorsqu'on fait $e^x = z$.

En développant e^x, nous avons déjà trouvé la série

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \left(lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.} \right) \ldots (1).$$

Si l'on fait $x = 1$, on a une limite naturelle de cette intégrale donnée par la série convergente

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} = \alpha,$$

et l'on trouve avec cette valeur de α,

$$\int \frac{e^x dx}{x} \begin{bmatrix} x = \frac{1}{n} \\ x = 1 \end{bmatrix} = \alpha - \left\{ l\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1.2.3n^3} + \text{etc.} \right\}.$$

Cette formule donnera facilement les diverses valeurs de l'intégrale, depuis $x = \frac{1}{n}$, jusqu'à $x = 1$; elle fait voir que la valeur de $\int \frac{e^x dx}{x}$, prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$, est infinie, car la série est de plus en plus convergente à mesure que n augmente et se réduit à $-l\frac{1}{n}$ lorsque n est infinie.

Si l'on se servoit de la série (1) pour les valeurs négatives de x, on seroit tenté de croire que la fonction $\int \frac{e^x dx}{x}$ est imaginaire pour ces valeurs, ce qui pourtant ne sauroit être, ainsi qu'on peut s'en convaincre en suivant la marche de cette intégrale par les valeurs successives de la fonction différentielle, d'après la méthode du n°. 470; mais on parvient à un résultat réel, en changeant le signe

de x avant l'intégration, car on a

$$\int \frac{e^{-x} \times -dx}{-x} = \int -dx \left\{ \frac{1}{-x} + 1 - \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} - \text{etc.} \right\},$$

d'où l'on conclut

$$\int \frac{e^{-x}dx}{x} = 1x - \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

x étant pris avec le signe $+$, dans cette equation. L'hypothèse $x=0$ donne encore un résultat infini, et l'on peut fixer l'origine de l'intégrale à $x=1$, mais il restera à savoir ce qu'elle devient quand x est infini, car il se peut que la différence entre la partie positive et la partie négative du second membre demeure finie, quoique chacune de ces parties soit infinie; et dans ce cas l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$, prise depuis $x=1$ jusqu'à x infini négativement, auroit une valeur finie.

Pour éclaircir cette difficulté considérons l'expression $\int \frac{dz}{lz}$; qui répond à la série (1), transformée d'après la relation $e^x = z$; nous aurons

$$\int \frac{dz}{lz} = \{ llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3} + \text{etc.} \} \ldots\ldots\ldots (2):$$

les valeurs $x=-1$ et x infini négativement correspondent à $z=e^{-1}$ et à $z=0$, limites dans lesquelles la série ci-dessus a des termes infinis et un imaginaire. Si l'on intègre $\int \frac{dz}{lz}$ par parties relativement au facteur dz, on obtiendra

$$\int \frac{dz}{lz} = \frac{z}{lz} + \int \frac{1.dz}{(lz)^2},$$

$$\int \frac{dz}{(lz)^2} = \frac{z}{(lz)^2} + \int \frac{1.2dz}{(lz)^3}, \text{ etc.}$$

etc.

d'où l'on conclura l'équation

$$\int \frac{dz}{lz} = z \left\{ \frac{1}{lz} + \frac{1}{(lz)^2} + \frac{1.2}{(lz)^3} + \frac{1.2.3}{(lz)^4} + \text{etc.} \right\} \ldots\ldots\ldots (3),$$

dont le second membre a la propriété de s'évanouir lorsque $z=0$, et se réduit à

$$-e^{-1}\{1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + \text{etc.}\}$$

lorsque $z=e^{-1}$. En ajoutant à la série (2) la constante $E+1-F$, ou $E+lF+l-1$, et en observant que $l-1+ll z=l(-lz)$, on aura

$$\int\frac{dz}{lz}=E+lF+l(-lz)+\frac{1}{1}\frac{z}{1}+\frac{1.(lz)^2}{2.1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lz)^3}{1.2.3}+\text{etc.}\}\ldots(4),$$

puis faisant pour abréger $E+lF=A$, et comparant cette série avec (3), en supposant dans l'une et dans l'autre $z=e^{-1}$, on formera l'équation

$$A-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\frac{1}{1.2}-\frac{1}{3}\frac{1}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=-e^{-1}\{1-1+1.2-1.2.3+\text{etc.}\},$$

de laquelle on tirera

$$A=-e^{-1}\{1-M\}+N,$$

en représentant par M la série divergente

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4\ldots\ldots\text{etc.}$$

dont la limite rapportée n°. 1047, est 0,4036524077, et par N la série convergente

$$1-\frac{1}{2}.\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{1.2.3}-\text{etc.}$$

égale à 0,7965995 99297 ; on aura donc $A=0,577216$. Les séries (3) et (4) étant égales pour une valeur de z doivent le demeurer toujours ; ainsi la première s'évanouissant quand $z=0$, la seconde en doit faire autant. L'expression

$$\int\frac{dz}{lz}=A+l(-lz)+\frac{lz}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lz)^2}{1.2}+\text{etc.}\ldots\ldots(2')$$

donnera par conséquent la valeur de $\int\frac{dz}{z}$, à partir de $z=0$, pour toutes les valeurs négatives de lz, et la formule correspondante

$$\int\frac{e^x dx}{x}=A+l(-x)+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots\ldots(1');$$

celles de $\int\frac{e^x dx}{x}$ à partir de x infini négativement.

1117. En opérant immédiatement sur l'expression $\int\frac{e^x dx}{x}$, nous allons déterminer de nouveau la constante A, et avec plus d'exac-

titude que ci-dessus. Si l'on intègre par parties la différentielle $\frac{e^x dx}{x}$, par rapport au facteur $e^x dx$, on trouvera

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x dx}{x^2}$$

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\int \frac{e^x dx}{x^3}$$

....

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} + \frac{2.3e^x}{x^4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{2.3.4\ldots.(n-1)e^x}{x^n} + 2.3.4\ldots\ldots n\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}};$$

développant ensuite e^x suivant les puissances de x, on aura

$$\int \frac{e^x dx}{x^{n+1}} = \int \frac{dx}{x^{n+1}} \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right)$$

$$= A_n - \frac{1}{nx^n} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{2(n-2)x^{n-2}} \ldots\ldots$$

$$- \frac{1}{2.3\ldots\ldots(n-1)x} + \frac{1(-x)}{2.3\ldots\ldots n}$$

$$+ \frac{x}{2.3\ldots(n+1)} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2.3\ldots(n+2)} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{2.3\ldots(n+3)} + \text{etc.}$$

en désignant par A_n la constante arbitraire et en observant de changer le terme $\frac{dx}{x}$ en $\frac{-dx}{-x}$, afin d'éviter les imaginaires pour le cas où x seroit négatif. La substitution de ce développement dans celui de $\int \frac{e^x dx}{x}$, obtenu plus haut, conduit à

$$\int \frac{e^x dx}{x} = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + \frac{2e^x}{x^3} \ldots\ldots + \frac{2.3.4\ldots.(n-1)e^x}{x^n}$$

$$+ A_n - \frac{2.3\ldots n}{nx^n} - \frac{2.3\ldots.n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots - \frac{n}{x} + 1(-x)$$

$$+ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\ldots\ldots(N).$$

Ce résultat renferme trois séries dont les deux premières sont finies;

le nombre de leurs termes dépend de n, et si l'on prend $n+1$ au lieu de n, on aura en changeant la constante arbitraire A_n en A_{n+1},

$$\int\frac{e^x dx}{x}=\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots\ldots+\frac{2.3\ldots\ldots(n-1)e^x}{x^n}+\frac{2.3\ldots\ldots n e^x}{x^{n+1}}$$
$$+A_{n+1}-\frac{2.3\ldots(n+1)}{(n+1)x^{n+1}}\ldots\ldots-\frac{n+1}{x}+l(-x)$$
$$+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{2(n+2)(n+3)}+\frac{x^3}{3(n+2)(n+3)(n+4)}+\text{etc}\ldots(N+1).$$

Pour comparer ce résultat au précédent, il faut développer dans l'un le terme $\frac{2.3\ldots\ldots ne^x}{x^{n+1}}$, qui ne se trouve pas dans l'autre et qui donne la série

$$\frac{2.3\ldots\ldots n}{x^{n+1}}+\frac{2.3\ldots\ldots n}{x^n}\ldots\ldots+\frac{1}{x}+\frac{1}{n+1}+\frac{x}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.}$$

effaçant ensuite les termes communs, et rapprochant de la constante A_{n+1} le terme invariable $\frac{1}{n+1}$, il restera seulement

$$A_n=A_{n+1}+\frac{1}{n+1},\ \text{ou}\ A_{n+1}=A_n-\frac{1}{n+1};$$

équation qui montre ce que devient la constante lorsqu'on introduit un nouveau terme dans la série

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}+\text{etc.}$$

ou que l'on passe du développement de

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots\ldots\ldots+2.3\ldots\ldots n\int\frac{e^x dx}{x^{n+1}},$$

à celui de

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}\ldots\ldots\ldots+2.3\ldots(n+1)\int\frac{e^x dx}{x^{n+2}}.$$ Maintenant il

est visible que puisque la constante A répond au cas où l'on développe immédiatement e^x suivant les puissances de x, la constante A_1 sera celle qu'il faudra substituer à A quand on prendra $\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x dx}{x^2}$

et l'on aura $A_1 = A - 1$; lorsqu'on employera $\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\int\frac{e^x dx}{x^3}$, il viendra $A_2 = A_1 - \frac{1}{2} = A - 1 - \frac{1}{2}$. En continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra

$$A_n = A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{n};$$

au moyen de cette valeur l'équation (N), ne dépendra plus que de la constante A, et deviendra

$$\begin{aligned}\int\frac{e^x dx}{x} = e^x\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} \ldots\ldots\ldots + \frac{1.2\ldots.(n-1)}{x^n}\right\} \\ + A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{n} \\ - \frac{2.3\ldots.n}{n x^n} - \frac{2.3\ldots.n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots\ldots - \frac{n}{x} + 1(-x) \\ + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\ldots (N').\end{aligned}$$

Si l'on fait $x = -n$, dans les diverses séries qui composent le second membre de cette équation, et qu'on en cherche la limite en supposant n infinie, on verra d'abord que la première, multipliée par e^{-n}, doit s'évanouir; quant aux séries

$$\begin{aligned}- \frac{2.3\ldots.n}{n x^n} - \frac{2.3\ldots.n}{(n-1)x^{n-1}} \ldots\ldots - \frac{n}{x} \\ + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}\end{aligned}$$

elles se détruisent réciproquement, car les termes $-\frac{n}{x}$ et $+\frac{x}{n+1}$, devenant $-\frac{n}{n}$ et $+\frac{n}{n+1}$, sont égaux lorsqu'on suppose n infinie; il en est de même des termes $\frac{(n-1)n}{2x^2}$ et $\frac{x^2}{2(n+1)(n+2)}$, changés en $\frac{(n-1)n}{2n^2}$ et $\frac{n^2}{2(n+1)(n+2)}$, etc. on aura donc

$$\int\frac{e^x dx}{x} = A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots - \frac{1}{n} + 1(-n).$$

La

La valeur de la constante A ne dépend donc que de celle de la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots\ldots+\frac{1}{n},$$

dont la somme, lorsque n est très-grand, est $1n+C$ (n°. 939); C représentant le nombre 0,5772156649015325. Il suit de là qu'à la limite, ou lorsque $x=-n$, on a

$$\int\frac{e^x dx}{x}=A-C,$$

et qu'en prenant par conséquent cette limite pour l'origine de l'intégrale on aura $A=C$, ou $A=0,5772156649015325$, résultat beaucoup plus exact que celui du n°. précéd..

Mascheroni, en poussant le calcul indiqué dans le n°. 939, jusqu'au centième terme de la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ etc. a trouvé

C ou $A=0,577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39$.

La relation qui existe entre A et M (n°. précéd.), savoir; $A=L+e^{-1}(M-1)$, donnant $M=e(A-L)+1$, le conduit à

$$M=0,403652\ 637676\ 805925\ 7.$$

Cette valeur de la limite de la série divergente

$$1-1.2.+1.2.3-1.2.3.4+\text{etc.}$$

est beaucoup plus approchée que celle du n°. 1047, que d'après Euler, nous avons crue vraie jusqu'au dernier chiffre.

Il faut observer que tout ce qui précède repose sur les séries

$$\frac{z}{1z}+\frac{z}{(1z)^2}+\frac{2.z}{(1z)^3}+\frac{2.3.z}{(1z)^4}+\text{etc.}$$

$$\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3}+\frac{2.3e^x}{x^4}+\text{etc.}$$

qui sont divergentes et ne peuvent par conséquent donner immédiatement les valeurs de $\int\frac{dz}{1z}$ et de $\int\frac{e^x dx}{x}$, à moins qu'on ne tienne compte du complément (Int. n°. 5), lorsqu'on s'arrête à un terme particulier; c'est ce qu'on a fait pour la seconde, en développant l'intégrale $\int\frac{e^x dx}{x^{n+1}}$; mais quant à la première, on ne

l'employe jamais qu'en entier et comme un développement, suivant la remarque du n°. 4 de l'Introduction.

1118. La série ($2'$) est visiblement celle qu'il faut employer lorsque z est peu différent de l'unité, parce qu'alors $\mathrm{l}z$ est une quantité fort petite; elle devient encore convergente après un certain nombre de termes, même quand $\mathrm{l}z$ est assez grand; mais la série (N') étant transformée comme on va le voir, est plus commode pour ce cas. Si l'on fait $n = -x + r$, r désignant une petite fraction, soit positive, soit négative, on aura

$$\mathrm{l}-x = \mathrm{l}(n-r) = \mathrm{l}n - \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^3}{3n^3} - \text{etc.}$$

et l'on changera par ce moyen l'équation (N') en

$$\int \frac{e^x dx}{x} = e^x \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{2.3}{x^4} \ldots\ldots + \frac{2.3\ldots\ldots(n-1)}{x^n} \right\}$$
$$+ A - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots\ldots - \frac{1}{n} + \mathrm{l}n - \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^3}{3n^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{2(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{n}{x} - \frac{(n-1)n}{2x^2} - \frac{(n-2)(n-1)n}{3x^3} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

résultat dans lequel il faudra remplacer la série $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} -$ etc. par la somme obtenue dans le n°. 939. En mettant ensuite $\mathrm{l}z$, au lieu de x, il viendra

$$\int \frac{dz}{\mathrm{l}z} = z \left\{ \frac{1}{\mathrm{l}z} + \frac{1}{(\mathrm{l}z)^2} + \frac{2}{(\mathrm{l}z)^3} + \frac{2.3}{(\mathrm{l}z)^4} \ldots\ldots\ldots + \frac{2.3\ldots\ldots(n-1)}{(\mathrm{l}z)^n} \right\}$$
$$- \frac{1}{2n} + \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_3}{4n^4} + \frac{B_5}{6n^6} - \text{etc.} - \frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} - \frac{r^3}{3n^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{\mathrm{l}z}{n+1} + \frac{(\mathrm{l}z^2)}{2(n+1)(n+2)} + \frac{(\mathrm{l}z)^3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \frac{n}{\mathrm{l}z} - \frac{(n-1)n}{2(\mathrm{l}z)^2} - \frac{(n-2)(n-1)n}{3(\mathrm{l}z)^3} - \text{etc.}$$

formule dans laquelle B_1, B_3, B_5, etc. représentent les nombres de Bernoulli, et dont tous les termes sont moindres que l'unité, à l'exception de $\frac{-n}{\mathrm{l}z}$, qui est égal à $\frac{n}{n-r}$, et <2.

1119. Il nous resteroit à chercher une série qui donnât l'intégrale $\int \frac{dz}{lz}$, depuis $z=0$ jusqu'à z infini positif.

En s'appuyant sur la forme des séries (1) et (2), Euler pensoit que si cette intégrale étoit considérée comme réelle entre $z=0$ et $z=1$, elle devoit être regardée comme imaginaire entre $z=1$ et z infini, ou *vice versâ*. Cette conséquence paroît d'abord difficile à admettre parce qu'en suivant la marche du coefficient différentiel $\frac{1}{lz}$, dont les valeurs successives forment celles de l'intégrale (n°. 470), on voit qu'il demeure toujours réel, en passant à la vérité du négatif au positif par l'infini. Cette difficulté est une des objections que faisoit Bernoulli contre le système de Léibnitz, sur les logarithmes des nombres négatifs (n°. 494); mais le passage par l'infini, paroît rompre quelquefois le lien de la continuité, ainsi que je l'ai montré dans le n°. cité; et il en résulte que quoique l'on puisse avoir séparément sous une forme réelle les deux parties de l'intégrale proposée, elles ne sauroient être représentées par une même expression, et qu'il est par conséquent impossible de déterminer la constante arbitraire, de manière qu'elle demeure la même dans toute l'étendue de cette intégrale.

1120. Nous allons présenter ici le germe de l'une des branches de l'Analyse, qui semble promettre la plus ample moisson de découvertes et de laquelle on doit le plus espérer pour le perfectionnement du Calcul intégral. Nous avons déjà fait observer plusieurs fois (n°s. 675, 697, 965), que le nombre des transcendantes distinctes pouvoit être très-grand, et qu'il existoit probablement des fonctions dont les coefficiens différentiels ne pouvoient s'exprimer par la variable indépendante seulement; ce qui rendoit impossible la séparation des variables dans les équations différentielles d'où dépendoient ces fonctions. Quand même on auroit l'analyse complète des transcendantes *explicites*, c'est-à-dire, exprimées par des intégrales à une seule variable, ou relatives aux quadratures, on ne sauroit encore rien sur la nature de celles qui sont *implicites*, ou données seulement par des équations différentielles dans lesquelles les variables sont mêlées. La difficulté de

Usage des intégrales définies, pour exprimer les fonctions données par des équations différentielles.

séparer les variables dans une équation différentielle tient sans doute quelquefois à la manière dont elles sont liées, même algébriquement, dans son intégrale. Si cette dernière étoit par rapport à l'une et à l'autre d'un degré supérieur, et qu'on ne sût pas la résoudre généralement, il ne seroit pas étonnant que ne pouvant parvenir à l'expression finie de la fonction par l'équation primitive, on ne pût pas non plus obtenir une semblable expression de son coefficient différentiel; mais outre ce cas, dans lequel le facteur propre à rendre l'équation différentielle intégrable, doit être susceptible d'une forme finie, on sent qu'il peut en exister d'autres dans lesquels la relation primitive entre la fonction et la variable indépendante, ne puisse être exprimée algébriquement. C'est pour ceux là, que l'on rencontre presque toujours lorsqu'on veut appliquer les Mathématiques à la Physique, qu'il faut se préparer des ressources particulières. Euler a encore donné dans ce genre une nouvelle preuve de la fécondité de son génie, en indiquant le parti qu'on pouvoit tirer des intégrales définies: voici comme il présente la chose.

Soit $y=\int Vdx$, V étant une fonction de x et de u, l'intégration ne devant avoir lieu que par rapport à la première de ces variables, et se terminant à $x=a$; de cette manière y se réduit à une fonction de u seul, et ses coefficiens différentiels sont $\frac{dy}{du}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, etc. Il est visible que la variable x, qui disparoît après l'intégration, introduit dans l'expression de y une généralité, beaucoup plus grande que celle des formes employées jusqu'ici; aussi est-il arrivé, comme nous le verrons bientôt, que des équations différentielles en y et u, dont on n'avoit pu obtenir l'intégrale sous une forme finie ont eu une solution de cette nature, la *transcendance* de la relation entre y et u étant rejettée sur la nouvelle variable x. Euler n'est d'abord parvenu qu'à former l'équation différentielle par le moyen de l'intégrale ainsi qu'il suit.

En différentiant complètement y, on a

$$dy=Vdx+du\int\frac{dV}{du}dx \quad (\text{n}^{\circ}. 552),$$

l'intégrale $\int\frac{dV}{du}dx$ étant prise entre les mêmes limites que $\int Vdx$.

La fonction y resteroit encore indéterminée, si l'on ne fixoit pas en même tems l'origine de l'intégrale, et c'est ce qu'Euler fait en supposant qu'elle s'évanouisse lorsque $x=0$. Maintenant si l'intégrale $\int V dx$ devient nulle dans cette circonstance quel que soit d'ailleurs u, il en arrivera autant à $\frac{dy}{du}$, puisqu'on a $y+dy=y+\frac{dy}{du}du=0$; il faudra donc prendre aussi $\int\frac{dV}{du}dx$, depuis $x=0$, jusqu'à $x=a$.

En poussant jusqu'au second ordre la différentiation sous le signe, il en résultera $\frac{d^2y}{du^2}=\int\frac{d^2V}{du^2}dx$, et si l'on désigne par L, M et N, des fonctions quelconques de u, il viendra

$$L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+Ny=\int dx\left\{L\frac{d^2V}{du^2}+M\frac{dV}{du}+NV\right\};$$

Lorsque l'intégration du second membre pourra s'effectuer, et qu'après la substitution de $x=a$, il donnera pour résultat une fonction de u, que nous représenterons par U, la valeur $y=\int V dx$ satisfera évidemment à l'équation

$$L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+Ny=U.$$

On voit que la difficulté de la méthode consiste à choisir la fonction V, de manière que la fonction $dx\left\{L\frac{d^2V}{du^2}+M\frac{dV}{du}+NV\right\}$ soit intégrable relativement à x; et Euler observe qu'il faut exclure celles de la forme PQ, P étant une fonction de u seul et Q une fonction de x seul; car elles conduiroient à

$$y=P\int Q dx,\quad \frac{dy}{du}=\frac{dP}{du}\int Q dx,\quad \frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2P}{du^2}\int Q dx$$

$$\left\{L\frac{d^2y}{du^2}+M\frac{dy}{du}+Ny\right\}=\left\{L\frac{d^2P}{du^2}+M\frac{dP}{du}+NP\right\}\int Q dx,$$

résultats dans lesquels l'intégrale $\int Q dx$ n'entre que comme un facteur constant.

1121. Prenons, pour premier exemple,

$$V=x^{n-1}(u^2+x^2)^r(c^2-x^2)^s;$$

et la solution $\quad y=\int e^{mux}x^n dx(c-x)^p$,
l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$.

Lorsqu'on fait $m=1$ et $c=a$, on a seulement

$$n\,d^2y-(au-n-p-2)dy\,du-(n+1)ay\,du^2=0$$
$$y=\int e^{ux}x^n dx(a-x)^p,$$

en supposant d'ailleurs $p+1>0$ et $n+1>0$, pour que l'intégrale ne devienne pas infinie quand $x=a$ et quand $x=0$.

Si l'on suppose $y=e^{\int z du}$, ou $z=\frac{dy}{y\,du}$, on obtient cette transformée du premier ordre

$$u\,dz+uz^2du-auz\,du+(n+p+2)z\,du-(n+1)a\,du=0;$$

à laquelle on satisfait en prenant

$$z=\frac{\int e^{ux}x^{n+1}dx(a-x)^p}{\int e^{ux}x^n dx(a-x)^p}.$$

Euler transforme cette expression de plusieurs manières, en faisant successivement

$$z=\tfrac{1}{2}a+v, \qquad v=u^{-n-p-2}s, \qquad u^{-n-p-1}=-(n+p+1)t,$$

et il obtient

$$u\,dv+uv^2du+(n+p+2)v\,du-\tfrac{1}{4}a^2u\,du-\tfrac{1}{2}(n-p)a\,du=0;$$
$$u^{-n-p-1}ds+u^{-2n-2p-3}s^2du-\tfrac{1}{4}a^2u\,du-\tfrac{1}{2}(n-p)a\,du=0,$$
$$ds+s^2dt-\tfrac{1}{4}a^2u^{2n+2p+4}dt-\tfrac{1}{2}(n-p)u^{2n+2p+1}dt=0;$$

enfin il obtient en dernier résultat l'équation

$$dq+q^2dr-\frac{a^2r^{\frac{-2n-2p-4}{n+p+1}}-2(n-p)r^{\frac{-2n-2p-3}{n+p+1}}}{4(n+p+q)^2}dr=0;$$

qui se tire immédiatement de la transformée en z et u, en y faisant

$$u=r^{\frac{-1}{n+p+1}}, \qquad z=\tfrac{1}{2}a-(n+p+1)r^{\frac{n+p+2}{n+p+1}}q.$$

Il transforme aussi l'équation du second ordre entre y et u, et parvient à un résultat remarquable par sa simplicité. Après avoir mis cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{du}-a\,dy+\frac{(n+p+2)dy}{u}-\frac{(n+1)ay\,du}{u}=0;$$

il fait $u = bt^q$ et parvient à

$$\frac{d^2y}{bqt^{q-1}dt} - \frac{(q-1)dy}{bqt^q} - ady - \frac{(n+p+2)dy}{bt^q} - \frac{q(n+1)aydt}{t} = 0,$$

en prenant dt pour constante. Cette dernière équation revient à

$$d^2y - bqat^{q-1}dydt + \frac{(qn+qp+q+1)dydt}{t} - bq^2(n+1)at^{q-2}ydt^2 = 0,$$

et est satisfaite par $y = \int e^{bt^q x} x^n dx (a-x)^p$.

Pour transformer celle-ci Euler prend

$$z = e^{-\int Pdt} y, \text{ ou } \frac{dy}{y} = Pdt + \frac{dz}{z},$$

ce qui lui donne

$$d^2z + 2Pdtdz - bqat^{q-1}dtdz + (qn+qp+q+1)\frac{dtdz}{t} + zdtdP$$

$$+ zdt^2\left\{P^2 - bqat^{q-1}P + \frac{(qn+qp+q+1)P}{t} - bq^2(n+1)at^{q-2}\right\} = 0;$$

et pour faire disparoître les termes multipliés par dz, il fait

$$2P - bqat^{q-1} + \frac{qn+qp+q+1}{t} = 0.$$

La valeur de P, qui résulte de cette équation, le conduit à celle-ci

$$d^2z - zdt^2\left\{\frac{(qn+qp+q)^2-1}{4t^2} + \tfrac{1}{2}bq^2(n-p)at^{q-2} + \tfrac{1}{4}b^2q^2a^2t^{2q-2}\right\} = 0,$$

dont la solution est

$$z = e^{-\frac{1}{2}bat^q} t^{\frac{qn+qp+q+1}{2}} \int e^{bt^q x} x^n dx (a-x)^p.$$

Ces formules se simplifient par la supposition de

$$p = n, \quad q^2(2n+1)^2 - 1 = 0, \text{ ou } q = \frac{\pm 1}{2n+1}$$

et $\quad b = \pm\frac{2}{q} = \pm 2(2n+1),$

il vient alors

$$d^2z - a^2 z t^{\frac{\pm 2}{2n+1} - 2} dt^2 = 0, \text{ ou } d^2z - a^2t^{2q-2}zdt^2 = 0,$$

et $\quad z = e^{\pm(2n+1)at^{\frac{\pm 1}{2n+1}}} t^{\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm 1}{2n+1}} x} x^n dx (a-x)^n,$

ou $\quad z = e^{-\frac{a}{q}t^q} t \int e^{\frac{2x}{q}t^q} x^{\pm\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\pm\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}}.$

1123. La supposition de $y = \int dx(a^2 - x^2)^{p-1} \cos bu^q x$ conduit aussi à une équation différentielle de la même forme que celle du n°. précédent, on en déduit

$$\frac{dV}{du} = -bqu^{q-1}x(a^2 - x^2)^{p-1} \sin bu^q x$$

$$\frac{d^2V}{du^2} = -\{bq(q-1)u^{q-2} \sin bu^q x + b^2q^2u^{2q-2}x \cos bu^q x\}(a^2 - x^2)^{p-1},$$

et substituant dans l'expression $\int dx\left(L\frac{d^2V}{du^2} + M\frac{dV}{du} + N\right)$, on a la fonction

$$\int dx(a^2 - x^2)^{p-1}\left\{\begin{matrix} N \cos bu^q x - bqMu^{q-1}x \sin bu^q x - bq(q-1)Lu^{q-2}x \sin bu^q x \\ -b^2q^2Lu^{2q-2}x^2 \cos bu^q x \end{matrix}\right\};$$

à laquelle on assignera pour intégrale la fonction primitive $(a^2 - x^2)^p \sin bu^q x$, qui s'évanouit lorsque $x = 0$ et lorsque $x = a$. La différentiation de cette dernière, et la comparaison du résultat avec la précédente, donneront

$$L = \frac{u^{-q+2}}{bq^2}, \quad M = \frac{(2pq - q + 1)u^{-q+1}}{bq^2}, \quad N = a^2bu^q.$$

Il faut observer que l'équation différentielle

$$L\frac{d^2y}{du^2} + M\frac{dy}{du} + Ny = \int dx\left\{L\frac{d^2V}{du^2} + M\frac{dV}{du} + N\right\},$$

se réduit à

$$L\frac{d^2y}{du^2} + M\frac{dy}{du} + Ny = 0,$$

lorsque l'intégrale du second membre s'évanouit à la limite $x = a$; ainsi l'on aura seulement dans l'exemple qui nous occupe,

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{(2pq - q + 1)}{u}\frac{dy}{du} + q^2a^2b^2u^{2q-2}y = 0,$$

et $\qquad y = \int dx(a^2 - x^2)^{p-1} \cos bu^q x.$

Si l'on fait $p = \frac{q-1}{2q}$ et $b = \frac{1}{q}$, on tombe sur un cas particulier très-remarquable, savoir :

$$\frac{d^2y}{du^2} + a^2u^{2q-2}y = 0,$$

pour lequel on a $y=\int dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\cos\frac{1}{q}u^q x$,

l'intégrale étant prise de manière à s'évanouir lorsque $x=0$ et $x=a$. On a montré dans le n°. 641, que cette dernière équation différentielle répondoit à celle de Riccati ; on passe de l'une à l'autre en faisant $y=e^{\int z\,du}$, d'où il résulte

$$dz+z^2du+a^2u^{2q-2}du=0,$$

$$z=\frac{1}{y}\frac{dy}{du}=-\frac{u^{q-1}\int x\,dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\sin\frac{1}{q}u^q x}{\int dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-q-1}{2q}}\cos\frac{1}{q}u^q x}:$$

les intégrations relatives à x s'effectueront toutes les fois que $\frac{-q-1}{2q}$ sera un nombre entier positif. En posant donc $\frac{-q-1}{2q}=i$, on aura $q=-\frac{1}{2i+1}$, et il viendra

$$dz+z^2du+a^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}du=0;$$

équation qui comprend la seconde classe des cas d'intégrabilité que nous avons trouvés dans le n°. 550. L'équation du second ordre et sa solution sont

$$d^2y+a^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}y\,du^2=0,$$

$$y=\int dx\,(a^2-x^2)^i\cos\left(-(2i+1)u^{\frac{-1}{2i+1}}x\right).$$

1124. Dans ce qui précède nous sommes partis de l'intégrale $\int V dx$, pour arriver à l'équation différentielle, mais cette méthode est indirecte, puisque c'est toujours l'équation qui est donnée, et qu'on cherche l'expression de la fonction qu'elle détermine. Euler, en conséquence, retourne son procédé ; il suppose que l'on ait le développement en série de la fonction cherchée (n°. 677 et suiv.), et il tâche d'obtenir la limite de cette série au moyen d'intégrales définies en s'aidant des procédés indiqués dans les n°. 1058 et suiv.

Pour faire connoître la marche d'Euler, nous commencerons avec lui par déterminer la somme de la série

$$A+Bs+Cs^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+Ms^{i-1}+Ns^i+\text{etc.}$$

dans laquelle

$$B=\frac{0m+h}{1n+k}A,\quad C=\frac{1m+h}{2n+k}B,\quad D=\frac{2m+h}{3n+k}C \ldots N=\frac{(i-1)m+h}{in+k}M.$$

Il est visible que cette série rentre dans celle qui a été traitée, n°. 1064, mais comme dans l'équation de cet article, nous n'avons point dégagé la somme de l'équation à laquelle nous sommes parvenus, nous reprendrons en entier ici les Calculs d'Euler. Soit donc

$$z=A+Bs+Cs^2+Ds^3\ldots\ldots\ldots+Ms^{i-1}+Ns^i+\text{etc.}$$

nous en tirerons de là

$$\frac{s\,dz}{ds}=1Bs+2Cs^2+3Ds^3\ldots\ldots\ldots+(i-1)Ms^{i-1}+iNs^i+\text{etc.}$$

multipliant cette équation par m, la précédente par h, et réunissant les produits, nous aurons

$$\frac{m\,s\,dz}{ds}+hz=hA+(m+h)Bs+(2m+h)Cs^2\ldots+((i-1)m+h)Ms^{i-1} + (im+h)Ns^i+\text{etc.}$$

nous parviendrons semblablement à

$$\frac{n\,s\,dz}{ds}+kz=kA+(n+k)Bs+(2n+k)Cs^2\ldots+((i-1)n+k)Ms^{i-1} +(in+k)Ns^i+\text{etc.}$$

et en observant que

$$(n+k)B=hA,(2n+k)C=(m+h)B,\ldots(in+k)N=((i-1)m+h)M,\text{etc.}$$

nous aurons

$$\frac{nsdz}{ds}+kz=kA+hAs+(m+h)Bs^2+(2m+h)Cs^3+(3m+h)Ds^4+\text{etc.}$$

Mais d'après l'une des équations ci-dessus, la partie qui suit le terme kA, dans le second membre de celle-ci, est égale à $s\left(\frac{msdz}{ds}+hz\right)$; nous pouvons donc former l'équation

$$\frac{n\,s\,dz}{ds}+kz=kA+\frac{ms^2dz}{ds}+hsz,$$

ou $$dz + \frac{z\,ds(k-hs)}{s(n-ms)} = \frac{kA\,ds}{s(n-ms)},$$

dont l'intégration fera connoître s.

On a $$\frac{ds(k-hs)}{s(n-ms)} = \frac{k\,ds}{ns} + \frac{(mk-nh)\,ds}{n(n-ms)};$$

en intégrant il vient $s^{\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}}$ pour le facteur qui rend intégrable l'équation en z (n°. 556.), et au moyen duquel on arrive à

$$(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}} s^{\frac{k}{n}} z = Ak\int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

d'où l'on conclut

$$z = Aks^{-\frac{k}{n}}(n-m)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} ds(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

l'intégrale étant prise de manière à donner $z=A$, lorsque $s=0$.

Euler considère en particulier les cas où $m=0$, et $n=0$, dans lesquels la valeur générale de z devient illusoire, et en remontant à l'équation différentielle, il trouve pour le premier

$$z = \frac{Ak}{n} e^{\frac{hs}{n}} s^{-\frac{k}{n}} \int e^{-\frac{hs}{n}} s^{\frac{k}{n}-1} ds,$$

et pour le second

$$z = -\frac{Ak}{m} e^{-\frac{k}{ms}} s^{-\frac{h}{m}} \int e^{\frac{k}{ms}} s^{\frac{h}{m}-2} ds.$$

Il remarque encore que l'intégration indiquée s'effectue toutes les fois que k est un multiple de n.

1125. Passons à la série

$$AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 \ldots\ldots\ldots + MM'u^{i-1} + NN'u^i + \text{etc.}$$

en supposant que

$$B = \frac{0m+h}{2n+k}A,\ C = \frac{1m+h}{2n+k}B,\ D = \frac{2m+h}{3n+k}C, \ldots N = \frac{(i-1)m+h}{in+k}M;$$

$$B' = \frac{0m'+h'}{1n'+k'}A', C' = \frac{1m'+h'}{2n'+k'}B',\ D' = \frac{2m'+h'}{3n'+k'}C', \ldots N = \frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'}M'.$$

Soit

$$y = AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 \dots + MM'u^{i-1} + NN'u^i + \text{etc.}$$

et considérons la série

$$z = A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + Eu^4x^4 + \text{etc.}$$

en y faisant $ux = s$; nous aurons alors par le n°. précédent

$$z = Aks^{-\frac{k}{n}}(n - ms)^{\frac{mk-nh}{mn}} \int s^{\frac{k}{n}-1} ds (n - ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}$$

Formons ensuite l'équation

$$V = \int Pz\,dx = \int P\,dx\,(A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \text{etc.}),$$

dans laquelle nous regarderons la quantité u comme constante, et nous chercherons à déterminer la fonction P, de manière qu'en effectuant les intégrations relatives à x, on obtienne la série proposée. Pour cela, il faudra qu'entre les limites assignées à la variable x, on ait

$$\int Pxdx = \frac{B'}{A'}\int Pdx,\ \int Px^2dx = \frac{C'}{A'}\int Pdx,\ \int Px^3dx = \frac{D'}{A'}\int Pdx, \text{ etc.}$$

car il en résultera

$$V = \{AA' + BB'u + CC'u^2 + DD'u^3 + \text{etc.}\}\ \frac{1}{A'}\int P\,dx,$$

d'où $\quad y = \dfrac{A'V}{\int P\,dx} = \dfrac{A'\int Pz\,dx}{\int P\,dx}$,

les intégrales indiquées étant prises entre les limites convenables. Mais si l'on compare chacune des intégrales $\int Px\,dx$, $\int Px^2dx$, etc. à celle qui la précède, on aura ces relations :

$$\int Pxdx = \frac{B'}{A'}\int Pdx,\ \int Px^2dx = \frac{C'}{B'}\int Pxdx,\ \int P'x^3dx = \frac{D'}{C'}\int Px^2dx, \text{etc.}$$

d'où l'on conclura

$$\int Px^i dx = \frac{N'}{M'}\int Px^{i-1}dx = \frac{(i-1)m' + h'}{in' + k'}\int Px^{i-1}dx;$$

or, en observant que ces relations ne doivent avoir lieu qu'aux limites des intégrales, on verra facilement qu'on peut supposer en général

$$\int Px^i dx = \frac{(i-1)m' + h'}{in' + k'}\int Px^{i-1}dx + x^iQ,$$

pourvu que la fonction $x^i Q$ s'évanouisse à ces limites. Différentions cette équation et divisons ensuite ses deux membres par x^{i-1}, nous aurons, après avoir fait disparoître les dénominateurs,

$$(in'+k')Px\,dx=(im'-m'+h')Pdx+x\,dQ+iQ\,dx.$$

Cette dernière devant avoir lieu quel que soit i, se partage nécessairement en deux autres qui sont

$$n'Px\,dx=m'Pdx+Q\,dx,\quad k'Px\,dx=(h'-m')Pdx+x\,dQ,$$

et desquelles on tire

$$Pdx=\frac{Q\,dx}{n'x-m'}\ \text{et}\ Pdx=\frac{x\,dQ}{k'x-(h'-m')},$$

divisant l'une des valeurs de Pdx par l'autre, il vient

$$\frac{x\,dQ}{Q\,dx}=\frac{k'x+m'-h'}{n'x-m'},\ \text{ou}\ \frac{dQ}{Q}=\frac{dx(k'x+m'-h')}{x(n'x-m')},$$

ce qui donne
$$\frac{dQ}{Q}=\frac{(h'-m')dx}{m'x}+\frac{(m'k'+m'n'-h'n')dx}{m'(n'x-m')};$$

$$Q=x^{\frac{h'}{m'}-1}(n'x-m')^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}\times const.$$

faisant la constante égale à l'unité, et substituant la valeur de Q dans celle de Pdx, nous aurons

$$Pdx=x^{\frac{h'}{m'}-1}dx(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}$$

Nous déduirons de là

$$(in'+k')\int Px^i dx=((i-1)m'+h')\int Px^{i-1}dx$$
$$-x^{i+\frac{h'}{m'}-1}(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1};$$

mais comme la partie intégrée doit s'évanouir aux deux limites de l'intégrale, il faudra prendre cette intégrale depuis $x=0$, jusqu'à $x=\frac{m'}{n'}$. On aura alors

$$\int Px^i dx=\frac{(i-1)m'+h'}{in'+k'}\int Px^{i-1}dx,$$

pourvu que

$$i+\frac{h'}{m'}-1>0,\qquad \frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1>0,$$

et

et avec ces conditions, il vient

$$y=\frac{A'\int Pz\,dx}{\int P\,dx}=\frac{A'\int x^{\frac{h'}{m'}-1}z\,dx\,(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}}{\int x^{\frac{h'}{n'}-1}dx\,(m'-n'x)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}},$$

en observant que

$$z=Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n-ms)^{\frac{hn-km}{mn}-1};$$

cette dernière intégrale doit être prise de manière à donner $z=A$ lorsque $z=0$, et il faut changer dans sa valeur s en ux, puis regarder u comme constant dans l'intégration relative à x.

Il est visible que l'on peut échanger dans les résultats ci-dessus, les coefficiens A, B, C, etc. avec les coefficiens A', B', C', etc. parce que ceux de la première suite sont de la même forme que ceux de la seconde; il suit de là que l'on peut obtenir deux expressions de la somme y en y changeant m, n, h, k, en m', n', k', h', et réciproquement.

Il est à remarquer que la fonction Q n'est introduite dans le calcul que pour donner les limites des intégrales $\int P dx$, et que les conditions

$$i+\frac{h'}{m'}-1>0,\qquad \frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1>0,$$

n'étant pas remplies lorsque $m'=0$, ou $n'=0$, il faut déterminer Q d'une manière spéciale pour chacun de ces cas. Les deux valeurs de $P\,dx$ se réduisent dans le premier à

$$P\,dx=\frac{Q\,dx}{n'x},\qquad P\,dx=\frac{x\,dQ}{k'x-h'};$$

on en tire $\quad \dfrac{dQ}{Q}=\dfrac{dx(k'x-h')}{n'x^2}$, et $Q=e^{\frac{h'}{n'x}}x^{\frac{k'}{n'}}$:

on a dans le second cas

$$P\,dx=\frac{Q\,dx}{-m'},\qquad P\,dx=\frac{x\,dQ}{k'x+m'-h'};$$

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{(k'x+m'-h')dx}{-m'x}=-\frac{k'dx}{m'}+\frac{h'-m'}{m'}\frac{dx}{x},\quad Q=e^{-\frac{k'x}{m'}}x^{\frac{h'}{m'}-1}.$$

1126. Nous allons appliquer ce qui précède à l'équation

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dydx+(f+gx^n)ydx^2=0,$$

d'après laquelle on peut développer y dans une série de la forme

$$Ax^\alpha+Bx^{\alpha+n}+Cx^{\alpha+2n}+Dx^{\alpha+3n}+\text{etc.}$$

α étant donné par l'équation du second degré

$$\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=0, \text{ (n°. 644).}$$

Si l'on fait pour abréger $\alpha(\alpha-1)b+\alpha e+g=h$, on aura

$$B=\frac{-h}{n(na+(2\alpha-1)a+c)}A,$$

$$C=\frac{-n^2b-(2\alpha-1)nb-ne-h}{2n(2na+(2\alpha-1)a+c)}B,$$

$$D=\frac{-4n^2b-2(2\alpha-1)nb-2ne-h}{3n(3na+(2\alpha-1)a+c)}C,$$

....

$$N=\frac{-(i-1)^2n^2b-(2\alpha-1)(i-1)nb-(i-1)ne-h}{in(ina+(2\alpha-1)a+c)}M.$$

Les facteurs du dénominateur de ces expressions sont de la forme de ceux de la série du n°. précédent, et le numérateur étant une fonction du second degré se décompose en deux facteurs du premier, par la résolution de l'équation

$$(i-1)^2n^2b+(2\alpha-1)(i-1)nb+(i-1)ne+h=0,$$

qui donne

$$(i-1)n=-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)-\frac{e}{2b}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(2\alpha-1)^2+\frac{(2\alpha-1)e}{2b}+\frac{e^2}{4b^2}-\frac{h}{b}},$$

ce qu'on réduit à

$$(i-1)n=-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)-\frac{e}{2b}\pm\frac{1}{2b}\sqrt{(b-e)^2-4bg},$$

en vertu de l'équation d'où dépend α. Si pour abréger, on fait $\sqrt{(b-e)^2-4bg}=q$, il viendra

$$(i-1)n=-\frac{(2\alpha-1)b+e\mp q}{2b},$$

d'où il résultera

$$N=\frac{-\{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha-1)b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q\}\{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\alpha 1-)b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q\}}{inb(ina+(2\alpha-1)a+c)}M.$$

Soit à présent $x^n = u$, et

$$\frac{y}{x^\alpha} = AA' + BB'u + CC'u^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + MM'u^{i-1} + NN'u^i;$$

nous aurons dans cette forme

$$N = \frac{(i-1)nb + \frac{1}{2}(2\alpha - 1)b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}q}{-inb} M;$$

$$N' = \frac{(i-1)nb + \frac{1}{2}(2\alpha - 1)b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}q}{ina + (2\alpha - 1)a + c} M',$$

valeurs dont la comparaison avec celles du n°. précédent; nous montre qu'il faut y changer

m en nb, h en $\frac{1}{2}(2\alpha - 1)b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}q$,
n en $-nb$, k en 0,
m' en nb, h' en $\frac{1}{2}(2\alpha - 1)b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}q$,
n' en na, k' en $(2\alpha - 1)a + c$.

Nous chercherons d'après ces dernières dénominations l'expression de z, et pour éviter toute ambiguité, nous y écrirons t au lieu de x; nous aurons $s = ut = x^n t$, et

$$z = A(1+s)^{\frac{-(2\alpha-1)b-c+q}{2nb}} = A(1 + x^n t)^{\frac{-(2\alpha-1)b-c+q}{2nb}}.$$

Nous conserverons dans l'expression de y les lettres m', n', h' et k', mais nous changerons u en x^n, et faisant attention que y est divisé par x^α, nous obtiendrons

$$y = \frac{A' x^\alpha \int t^{\frac{h'}{m'} - 1} z\, dt\, (m' - n't)^{\frac{k'm' - h'n'}{m'n'}}}{\int t^{\frac{h'}{m'} - 1} dt\, (m' - n't)^{\frac{k'm' - h'n'}{m'n'}}};$$

les intégrales étant nulles lorsque $t = 0$, et terminées à $t = \frac{m'}{n'} = \frac{b}{a}$;

en observant d'ailleurs les conditions

$$i + \frac{h'}{m'} - 1 > 0, \qquad \frac{k'm' - h'n'}{m'n'} + 1 > 0,$$

dont la première se réduit à $\frac{(2\alpha - 1)b + c + q}{2nb} > 0$,

à cause que la plus petite valeur de i est l'unité, et la seconde devient $\frac{(2\alpha-1)ab+2bc-ae-aq}{2nab}+1>0$.

Il est facile de voir aussi que l'intégrale définie $\int t^{\frac{h'}{m'}-1}dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}$ peut être remplacée par une constante arbitraire, et que l'on aura enfin

$$y=Cx^\alpha\int t^{\frac{h'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}}.$$

Le coefficient A, qui entre dans la valeur de z, étant arbitraire, la dernière expression de y est une intégrale complète puisqu'elle renferme les deux constantes A et C.

La possibilité d'échanger entr'elles les quantités n et n', k et k', en prenant

na pour n, $-nb$ pour n', $(2\alpha-1)a+c$ pour k, et 0 pour k',

conduit à une seconde solution, dans laquelle on a

$$z=Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds(n-ms)^{\frac{hn-km}{mn}-1},$$

la fonction z devant être égale à A lorsque $s=0$, et

$$y=Cx^\alpha\int t^{\frac{h'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

l'intégrale relative à t devant s'évanouir lorsque $t=0$, et lorsque $t=\frac{m'}{n'}$. Les conditions de cette expression sont $\frac{h'}{m'}>0$, et $1-\frac{h'}{m'}>0$, à cause que $k'=0$. La relation entre z et s, délivrée du signe d'intégration, est

$$\frac{dz}{ds}=\frac{Ak-z(k-hs)}{s(n-ms)}.$$

1127. Euler donne encore deux solutions de l'équation différentielle proposée; il les tire de la série descendante

$$y=x^\alpha(A+Bx^{-n}+Cx^{-2n}+Dx^{-3n}+\text{etc.})$$

pour laquelle α est déterminé par l'équation

$$\alpha(\alpha-1)b+\alpha e+g=0.$$

Faisant $\alpha(\alpha-1)a+\alpha c+f=h$, il trouve

$$B=\frac{-h}{n(nb-(2\alpha-1)b-e)}A,$$

$$C=\frac{-n^2a+(2\alpha-1)na+nc-h}{2n(2nb-(2\alpha-1)b-e)}B,$$

....

$$N=\frac{-(i-1)^2n^2a+(2\alpha-1)(i-1)na+(i-1)nc-h}{in(inb-(2\alpha-1)b-e)}M.$$

L'expression de N se décompose ainsi :

$$N=\frac{-\{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\alpha-1)a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}p\}\{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\alpha-1)a-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}p\}}{ina(inb-(2\alpha-1)b-e)}M;$$

en posant $\sqrt{(a-c)^2-4af}=p$. Par cette opération le développement de y peut être mis sous la forme

$$\frac{y}{x^\alpha}=AA'+BB'u+CC'u^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +MM'u^{i-1}+NN'u^i+\text{ etc.}$$

en y changeant x^{-n} en u, et prenant

$$N=\frac{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\alpha-1)a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}p}{-ina}M,$$

$$N'=\frac{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\alpha-1)a-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}p}{inb-(2\alpha-1)b-e}M';$$

comparant ces valeurs avec celles du n°. 1125, nous verrons que les lettres m, h, n et k doivent être remplacées par

$$na,\quad -\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}p,\quad -na \text{ et } 0;$$

et les lettres m', h', n' et k', par

$$na,\quad -\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)a-\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}p,\quad nb \text{ et } -(2\alpha-1)b-e.$$

En faisant $s=ut=x^{-n}t$, nous aurons

$$z=A(1+s)^{-\frac{h}{m}}=A(1+x^{-n}t)^{-\frac{h}{m}},$$

$$y=Cx^\alpha\int t^{\frac{h'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

les limites de l'intégrale relative à t étant déterminées par la condition qu'à l'une et à l'autre, on ait

$$t^{\frac{h'}{m'}}(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}=0.$$

Si l'on permute entr'elles les lettres analogues, en prenant

nb pour n, $-na$ pour n'

$-\frac{1}{2}(2\alpha-1)a-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}p$ pour h, $-\frac{1}{2}(2\alpha-1)-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}p$ pour h',
$-(2\alpha-1)b-e$ pour k, et 0 pour k',

l'expression de z se déduira de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{ds}=\frac{Ak-z(k-hs)}{s(n-ms)},$$

et l'on aura

$$z=Aks^{-\frac{h}{n}}(n-ms)^{\frac{km-hn}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds(n-ms)^{\frac{hn-km}{mn}-1},$$

$$y=Cx^{\alpha}\int t^{\frac{h'}{m'}-1}z\,dt(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}},$$

en observant qu'aux deux limites de l'intégrale relative à t,

$$t^{\frac{h'}{m'}}(m'-n't)^{\frac{k'm'-h'n'}{m'n'}+1}=0.$$

1128. Eclaircissons ce qui précède en l'appliquant à l'équation particulière

$$x^2(1-x^2)d^2y-x(1+x^2)dx\,dy+x^2y\,dx^2=0;$$

en la comparant avec celle du n°. 1126, nous aurons

$a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=0$, $g=1$, $n=2$;

$$\alpha(\alpha-1)-\alpha=0, \text{ d'où } \alpha=0,\ \alpha=2 \text{ et } q=\pm 2.$$

Avec ces données, et en ayant égard aux deux valeurs dont α est susceptible, nous obtiendrons par les formules du n°. cité, les quatre résultats suivans

$$\begin{cases} z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}}, & y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\,dt(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}\ldots(1) \\ z=(1+x^2t)^{-1\mp\frac{1}{2}}, & y=Cx^2\int t^{\mp\frac{1}{2}}z\,dt(1+t)^{\pm\frac{1}{2}}\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2\pm s)}{2s(1+s)}, & y=C\int t^{\pm\frac{1}{2}-1}z\,dt(1+t)^{\mp\frac{1}{2}}\ldots\ldots(3) \\ \frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+(2\mp 1)s)}{2s(1+s)}, & y=Cx^2\int t^{\pm\frac{1}{2}}z\,dt(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}}\ldots(4). \end{cases}$$

Les valeurs de α relatives à la série descendante du n°. 1127, étant $+1$ et -1, conduisent de même à ces quatre autres résultats:

$$\begin{cases} z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{\pm\frac{1}{2}}, & y=Cx\int t^{\pm\frac{1}{2}-1} z\,dt(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}} \ldots (5), \\ z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{-1\pm\frac{1}{2}}, & y=\frac{C}{x}\int t^{\pm\frac{1}{2}} z\,dt(1+t)^{\mp\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots (6), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2\mp s)}{2s(1+s)}, & y=Cx\int t^{\mp\frac{1}{2}-1} z\,dt(1+t)^{\pm\frac{1}{2}} \ldots\ldots (7) \\ \frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+(2\pm1)s)}{2s(1+s)}, & y=\frac{C}{x}\int t^{\mp\frac{1}{2}} z\,dt(1+t)^{-1\pm\frac{1}{2}} \ldots\ldots (8) \end{cases}$$

Pour répandre sur le sujet qui nous occupe toute la clarté qu'on y peut desirer, il nous reste à montrer comment les valeurs de y satisfont à l'équation proposée. La chose est très-facile à l'égard de celles qui sont comprises dans la formule

$$z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}}, \quad y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1} z\,dt(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1};$$

en prenant le signe inférieur, par exemple, il vient

$$z=\sqrt{1+x^2t}, \qquad y=C\int\frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{xt}{\sqrt{1+x^2t}}, \qquad \frac{dy}{dx}=C\int\frac{xt\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+x^2t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{t}{(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=C\int\frac{t\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où il résulte

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+x^2y=C\int\frac{x^2dt(1-x^2t^2)}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}};$$

et l'intégrale du second membre étant

$$\frac{2Cx^2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+t)(1+x^2t)}},$$

s'évanouit lorsque $t=0$, et lorsque t est infini : c'est donc entre ces limites que doit être prise celle qui exprime la valeur de y.

Venons à l'une des formules où z n'est donné que par une équation différentielle ; prenons la quatrième : en n'ayant égard qu'au signe supérieur, nous aurons à traiter l'équation

$$dz + \frac{z\,ds\,(2+3s)}{2s(1+s)} = \frac{A\,ds}{s(1+s)}.$$

En la multipliant par $s\sqrt{1+s}$, et l'intégrant, nous en tirerons

$$sz\sqrt{1+s} = 2A\sqrt{1+s} + B, \qquad z = \frac{2A}{s} + \frac{B}{s\sqrt{1+s}};$$

et en observant qu'on doit avoir $z=A$, lorsque $s=0$, nous trouverons $B=-2A$, d'où

$$z = \frac{2A(\sqrt{1+s}-1)}{s\sqrt{1+s}} = \frac{2A}{tx^2} - \frac{2A}{tx^2\sqrt{1+tx^2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{4A}{tx^3} + \frac{2A(2+3tx^2)}{tx^3(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{12A}{tx^4} - \frac{6A(1+5tx^2+4t^2x^4)}{tx^4(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Substituant ces valeurs dans les suivantes

$$y = C\int\frac{x^2z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2C\int\frac{xz\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} + C\int\frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{dz}{dx} -$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} + 4C\int\frac{x\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{dz}{dx} + C\int\frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\frac{d^2z}{dx^2},$$

et les résultats dans l'équation proposée, nous obtiendrons

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + x^2y =$$

$$C\int\frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}}\left\{\frac{2Ax^2}{t} - \frac{2Ax^2(1+4tx^2+3t^2x^4)}{t(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}}\right\};$$

le

le second membre de celle-ci a pour intégrale l'expression

$$-\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}+\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{(1+tx^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}}=$$

$$\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{(1+tx)^{\frac{1}{2}}}-1\right)$$

qui devient nulle lorsque $t=-1$, et lorsque $t=0$ (*); c'est donc entre ces limites qu'il faut prendre l'intégrale qui exprime y. En y remplaçant z par sa valeur, elle prendra la forme

$$y=D\int\frac{dt}{t\sqrt{t(1+t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+tx^2}}\right).$$

Si l'on écrit $-t$, au lieu de t, on aura

$$y=D\int\frac{dt}{t\sqrt{t(1-t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-tx^2}}\right);$$

et l'intégrale devra s'évanouir lorsque $t=0$ et lorsque $t=1$.

1129. Laplace a montré le premier que la sommation des séries par les intégrales définies, conduisoit aussi à l'intégrale de l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2z}{du\,dv}+P\frac{dz}{du}+Q\frac{dz}{dv}+Nz=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

dans quelques-uns des cas où elle échappe à la méthode du n°. 772 : c'est ce que nous allons faire voir, en suivant à peu de chose près la marche qu'il a tenue.

Il est visible que la série

$$B\varphi(u)+C\varphi'(u)+D\varphi''(u)+\text{etc.}$$
$$+B_1\psi(v)+C_1\psi'(v)+D_1\psi''(v)+\text{etc.}$$

prise dans le n°. 772 pour la valeur de z, peut être remplacée par celle-ci :

$$A\int du\varphi(u)+B\int du\int du\varphi(u)+C\int du\int du\int du\varphi(u)+\text{etc.}$$
$$+A_1\int dv\psi(v)+B_1\int dv\int dv\psi(v)+C_1\int dv\int dv\int dv\psi(v)+\text{etc.}$$

(*) Pour s'en convaincre dans le dernier cas, il suffit de développer $\frac{1}{(1+tx)^{\frac{1}{2}}}$ suivant les puissances de t.

En réduisant les intégrales doubles, triples, etc. en intégrales simples au moyen des formules du n°. 487, on changera la première partie en

$$A\int du\,\varphi(u)$$
$$+\frac{B}{1}\{u\int du\,\varphi(u)-\int udu\,\varphi(u)\}$$
$$\frac{C}{1.2}\{u^2\int du\,\varphi(u)-2u\int u\,du\,\varphi(u)+\int u^2du\,\varphi(u)\}$$
$$\frac{D}{1.2.3}\{u^3\int du\,\varphi(u)-3u^2\int u\,du\,\varphi(u)+3u\int u^2du\,\varphi(u)-\int u^3du\,\varphi(u)\}$$
etc.

maintenant afin de distinguer les facteurs où la variable u se trouve hors du signe intégral de ceux où elle en est affectée, on écrira dans les derniers t à la place de u; on pourra après cela passer les autres sous le signe $\int$, en observant de les regarder alors comme constans, et on aura par ce moyen

$$\int dt\,\varphi(t)\{A+\frac{B(u-t)}{1}+\frac{C(u-t)^2}{1.2}+\frac{D(u-t)^3}{1.2.3}+\text{etc.}\}$$
$$=\int dt\,T(u-t)\,\varphi(t),$$

$T(u-t)$ désignant la somme de la série renfermée entre les accolades, et les intégrales étant prises depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$. On trouvera de même que la seconde partie de la série proposée revient à

$$\int dt\,\psi(t)\{A_1+\frac{B_1(v-t)}{1}+\frac{C_1(v-t)^2}{1.2}+\frac{D_1(v-t)^3}{1.2.3}+\text{etc.}\}$$
$$=\int dt\,T_1(v-t)\,\psi(t),$$

en observant que les limites de l'intégrale sont ici $t=0$ et $t=v$; on aura donc

$$z=\int dt\,T(u-t)\,\varphi(t)+\int dt\,T_1(v-t)\,\psi(t).$$

Pour déterminer les fonctions $T(u-t)$ et $T_1(v-t)$, il faut connoître d'abord les relations que les coefficiens A, B, C, etc. A_1, B_1, C_1, etc. ont entr'eux et qui s'obtiennent en substituant dans l'équation proposée, au lieu de z la série

$$A\int du\,\varphi(u)+B\int du\int du\,\varphi(u)+C\int du\int du\int du\,\varphi(u)+\text{etc.}$$
$$+A_1\int dv\,\psi(v)+B_1\int dv\int dv\,\psi(v)+C_1\int dv\int dv\int dv\,\psi(v)+\text{etc.}$$

on aura relativement à la fonction φ, les suivantes

$$\frac{dA}{dv}+PA=0$$

$$\frac{dB}{dv}+PB+\frac{d^2A}{dudv}+P\frac{dA}{du}+Q\frac{dA}{dv}+MA=0$$

$$\frac{dC}{dv}+PC+\frac{d^2B}{dudv}+P\frac{dB}{du}+Q\frac{dB}{dv}+MB=0,$$

etc.

on en trouveroit de semblables entre A_1, B_1, C_1, etc. Si l'on pouvoit tirer de ces équations les valeurs des coefficiens, la question seroit ramenée à sommer les séries

$$A+\frac{B(u-t)}{1}+\frac{C(u-t)^2}{1.2}+\frac{D(u-t)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$A_1+\frac{B_1(v-t)}{1}+\frac{C_1(v-t)^2}{1.2}+\frac{D_1(v-t)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Appliquons ces idées générales à différens cas particuliers afin de faire mieux connoître le parti qu'on en peut tirer; soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dudv}+p\frac{dz}{du}+q\frac{dz}{dv}+mz=0\ldots\ldots(a),$$

dans laquelle p, q, m désignent des constantes. En traitant cette équation par la méthode du n°. 772, on retrouve à chaque transformation la condition $pq-m=0$, et il est par conséquent impossible d'obtenir par ce moyen l'intégrale de la proposée sous une forme finie lorsque cette condition n'est pas remplie; mais les équations

$$\frac{dA}{dv}+pA=0$$

$$\frac{dB}{dv}+pB+\frac{d^2A}{dudv}+p\frac{dA}{du}+q\frac{dA}{dv}+mA=0$$

$$\frac{dC}{dv}+pC+\frac{d^2B}{dudv}+p\frac{dB}{du}+q\frac{dB}{dv}+mB=0$$

etc.

qu'on obtient par la méthode précédente conduisent facilement à une série. En effet, la première donne par l'intégration, $A=e^{-pv}\alpha$, α étant

une fonction arbitraire de u; et en la différentiant par rapport à u, on en tire

$$\frac{d^2A}{dvdu}+p\frac{dA}{du}=0,$$

ce qui réduit la suivante à

$$\frac{dB}{dv}+pB+q\frac{dA}{dv}+mA=0.$$

Pour satisfaire à celle-ci on fera $B=e^{-pv}\beta$, β étant une fonction inconnue de v et de u. La substitution des valeurs de B et de A, donnera après des réductions évidentes

$$\frac{d\beta}{dv}-(pq-m)\alpha=0;$$

en se bornant à satisfaire à cette équation, on aura seulement

$$\beta=(pq-m)\alpha v,$$

et l'on déduira de là

$$\frac{dB}{dv}=-e^{-pv}\alpha p(pq-m)v+e^{-pv}\alpha(pq-m)$$

$$q\frac{dB}{dv}+mB=-e^{-pv}\alpha v(pq-m)^2+e^{-pv}\alpha q(pq-m)$$

$$\frac{dB}{dv}+pB=e^{-pv}\alpha(pq-m),\quad \frac{d^2B}{dudv}+p\frac{dB}{du}=e^{-p}(pq-m)\frac{d\alpha}{du}$$

valeurs qui changeront l'équation d'où dépend C, en

$$\frac{dC}{dv}+pC+e^{-pv}\left\{(pq-m)\left(\frac{d\alpha}{du}+\alpha q\right)-(pq-m)^2\alpha v\right\}=0.$$

Faisons d'abord $C=e^{-pv}\gamma$; l'équation précédente deviendra divisible par e^{-pv}, et nous aurons

$$\frac{d\gamma}{dv}+(pq-m)\left(\frac{d\alpha}{du}+\alpha q\right)-(pq-m)^2\alpha v=0;$$

il ne faudra plus, pour ramener cette équation à la forme des autres, que supposer $\frac{d\alpha}{du}+\alpha q=0$, ce qui déterminera la fonction arbitraire α, en donnant $\alpha=e^{-qu}$, puis il viendra

$\frac{d\gamma}{dv}-(pq-m)^2\alpha v=0$, d'où

$$\gamma=\frac{(pq-m)^2\alpha v^2}{2},\qquad C=e^{-pv}\alpha\frac{(pq-m)^2v^2}{1.2}.$$

L'équation D étant

$$\frac{dD}{dv}+pD+\frac{d^2C}{dudv}+p\frac{dC}{du}+q\frac{dC}{dv}+mC=0,$$

se réduiroit au moyen des valeurs de C, de α, et en supposant $D=e^{-pv}\delta$, à

$$\frac{d\delta}{dv}-\alpha\frac{(pq-m)^2v^2}{1.2}=0;$$

l'on auroit par conséquent

$$\delta=\frac{(pq-m)^3\alpha v^3}{1.2.3}, \quad D=e^{-pv}\alpha\frac{(pq-m)^3v^3}{1.2.3}.$$

Il suit des calculs ci-dessus, qu'on employeroit aussi à la recherche des coefficiens A, B, C, etc. que

$$\left.\begin{aligned}A&=e^{-pv-qu}\\ B&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)v}{1}\\ C&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)^2v^2}{1.2}\\ D&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)^3v^3}{1.2.3}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad\text{et}\quad\left\{\begin{aligned}A_1&=e^{-pv-qu}\\ B_1&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)u^2}{1}\\ C_1&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)^2u^2}{1.2}\\ D_1&=e^{-pv-qu}\frac{(pq-m)^3u^3}{1.2.3}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

et que les séries qu'il faut sommer sont

$$T=e^{-pv-qu}\left\{1+\frac{nv(u-t)}{1.1}+\frac{n^2v^2(u-t)^2}{1.2.1.2}+\frac{n^3v^3(u-t)^3}{1.2.3.1.2.3}+\text{etc.}\right\}$$

$$T_1=e^{-pv-qu}\left\{1+\frac{nu(v-t)}{1.1}+\frac{n^2u^2(v-t)^2}{1.2.1.2}+\frac{n^3u^3(v-t)^3}{1.2.3.1.2.3}+\text{etc.}\right\};$$

lorsqu'on fait $pq-m=n$.

Si nous désignons cette somme par y, y sera une fonction de $v(u-t)$, pour la première série, et de $u(v-t)$, pour la seconde, mais de la même forme dans l'un et l'autre cas, et la fonction $e^{-pv-qu}y$ sera une valeur particulière de z. En faisant pour abréger $v(u-t)=\theta$, nous aurons

$$\frac{dz}{du}=-qe^{-pv-qu}y+e^{-pv-qu}\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{du}$$

$$\frac{dz}{dv}=-pe^{-pv-qu}y+e^{-pv-qu}\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dv};$$

mais comme $\frac{d\theta}{du}=v$, $\frac{d\theta}{dv}=u-t$, il viendra

$$\frac{dz}{du}=e^{-pv-qu}\left\{-qy+v\frac{dy}{d\theta}\right\}$$
$$\frac{dz}{dv}=e^{-pv-qu}\left\{-py+(u-t)\frac{dy}{d\theta}\right\}$$
$$\frac{d^2z}{dudv}=e^{-pv-qu}\left\{pqy-(q(u-t)+pv-1)\frac{dy}{d\theta}+\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}\right\}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation proposée la changera en

$$\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}+\frac{dy}{d\theta}+(m-pq)y=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b),$$

les deux constantes qui entrent dans la valeur complète de y se déterminent par la condition que $y=1$ et $\frac{dy}{d\theta}=pq-m$, lorsque $\theta=0$, condition qui résulte de deux premiers termes de la série dont y est la somme. La somme de la seconde série se tirera de l'expression de y, en y supposant $\theta=u(v-t)$, et prenant y_1 pour représenter y, dans ce nouvel état, la valeur complète de z sera

$$z=e^{-pv-qu}\{\int y\,dt\,\varphi(t)+\int y_1 dt\,\psi(t)\},$$

la première intégrale étant prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$, et la seconde depuis $t=0$ jusqu'à $t=v$.

Si l'on vouloit s'assurer que ce résultat satisfait à l'équation proposée, il faudroit observer qu'en général lorsqu'une intégrale $T\,dt$ doit être prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=u$, t doit être considéré comme une fonction implicite de u, et que l'on doit avoir par conséquent (n°. 70)

$$\frac{d(\int T\,dt)}{du}=\frac{d.\int T\,dt}{du}+\frac{d.\int T\,dt}{dt}.\frac{dt}{du},$$

or $\frac{d.\int T\,dt}{du}=\int\frac{dT}{du}dt$ (n°. 552), $\frac{d\int T\,dt}{dt}=T$, et $\frac{dt}{du}=1$, lorsque $t=1$; ainsi en représentant par U ce que devient alors T, on auroit

$$\frac{d(\int T\,dt)}{du}=\int\frac{dT}{du}dt+U.$$

1130. Laplace applique encore sa méthode à l'équation

$$\frac{d^2 z}{du dv}+\frac{p}{u+v}\frac{dz}{du}+\frac{q}{u+v}\frac{dz}{dv}+\frac{m}{(u+v)^2}z=0 \ldots\ldots (a),$$

dont nous nous sommes occupés dans le n°. 774, on satisfait aux équations qui déterminent les coefficiens A, B, C, etc. en supposant

$$\begin{array}{ll} A=(u+v)^{-p}, & A_1=(u+v)^{-q}, \\ B=\alpha A(u+v)^{-1}, & B_1=\alpha_1 A_1(u+v)^{-1}, \\ C=\beta B(u+v)^{-1}, & C_1=\beta_1 B_1(u+v)^{-1}, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

α, β, etc. α_1, β_1, etc. étant des constantes telles que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=p(1-q)+m \\ 2\beta=(p+1)(2-q)+m \\ 3\gamma=(p+2)(3-q)+m \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} \alpha_1=q(1-p)+m \\ 2\beta_1=(q+1)(2-p)+m \\ 3\gamma_1=(q+2)(3-p)+m \\ \text{etc.} \end{array}$$

Les termes généraux de ces suites seront

$$i(p+i-1)(i-q)+m, \quad i(q+i-1)(i-p)+m;$$

et l'on aura

$$T=(u+v)^{-p}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\frac{u-t}{u+v}+\frac{\alpha\beta}{1.2}\left(\frac{u-t}{u+v}\right)^2+\text{etc.}\right\}$$

$$T_1=(u+v)^{-q}\left\{1+\frac{\alpha_1}{1}\frac{v-t}{u+v}+\frac{\alpha_1\beta_1}{1.2}\left(\frac{v-t}{u+v}\right)^2+\text{etc.}\right\}.$$

On fera $T=(u+v)^{-p}y$, en considérant y comme une fonction de la quantité $\frac{u-t}{u+v}$ que l'on représentera par θ, et l'on obtiendra l'équation en y, comme dans le n°. précédent, par la substitution des fonctions

$$T,\ \frac{dT}{du},\ \frac{dT}{dv},\ \frac{d^2T}{dudv}, \text{ au lieu de } z,\ \frac{dz}{du},\ \frac{dz}{dv},\ \frac{d^2z}{dudv};$$

qui donnera

$$\theta(1-\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2}+\{\theta(q-p-2)+1\}\frac{dy}{d\theta}+(pq-p-m)y=0\ldots.(b).$$

Pour former T_1, il suffira de changer dans cette équation p en q, q en p et y en y_1; l'on aura $T_1=(u+v)^{-q}y_1$; les constantes des

expressions de y et de y_1 se détermineront, comme précédemment, par le moyen des deux premiers termes des séries T et T_1 : enfin on obtiendra

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\int y\,dt\,\varphi(t)+\frac{1}{(u+v)^q}\int y_1 dt\,\psi(t).$$

L'une des fonctions y et y_1 peut aussi se déduire immédiatement de l'autre ; car l'équation (b), transformée d'après ce qui a été dit plus haut, se change en

$$\theta(1-\theta)\frac{d^2y_1}{d\theta^2}+\{\theta(p-q-2)+1\}\frac{dy_1}{d\theta}+\{pq-q-m\}y_1=0\ldots(b_1),$$

et redevient (b) lorsqu'on fait $y_1=(1-\theta)^{p-q}y$. La détermination des constantes arbitraires de y ne change point cette relation, car lorsque $\theta=0$, on doit avoir

$$y=1,\ \frac{dy}{d\theta}=p-pq+m \qquad y_1=1,\ \frac{dy_1}{d\theta}=q-pq+m,$$

et les deux dernières de ces valeurs résultent aussi de l'équation $y_1=(1-\theta)^{p-q}y$, quand on la combine avec les premières. Maintenant puisque $(1-\theta)^{p-q}=\left(1-\frac{u-t}{u+v}\right)^{p-q}$, on aura

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\{\int y\,dt\,\varphi(t)+\int(v+t)^{p-q}y\,dt\,\psi(t)\}.$$

1131. Il est bon de remarquer que l'on peut changer les limites des intégrales. Si à t, l'on substitue ut dans la première et vt dans la seconde, et que l'on désigne par y' et y'' ce que devient alors y, on aura

$$z=\frac{1}{(u+v)^p}\{\int y'u\,dt\,\varphi(ut)+\int(v+t)^{p-q}y''v\,dt\,\psi(vt)\},$$

les intégrales devant être prises toutes deux entre les limites $t=0$ et $t=1$.

Si l'on représente par K et K_1 les valeurs des intégrales $\int y\,dt\,\varphi(t)$ et $\int y_1 dt\,\psi(t)$, prises depuis $t=0$ jusqu'à t infini, les quantités

$$K-\int y\,dt\,\varphi(t) \text{ et } K_1-\int y_1 dt\,\psi(t),$$

seront les valeurs des mêmes intégrales, à partir de t infini ; mettant au lieu de t, dans la première, $u+t'$ et dans la seconde, $v+t'$; désignant

désignant par Y et par Y_1, ce que deviennent y et y_1, on aura

$$\int y\,dt\,\varphi(t)+\int y_1\,dt\,\psi(t)$$
$$=K+K_1-\int Y\,dt'\varphi(u+t')-\int Y_1\,dt'\psi(v+t').$$

Les limites des intégrales du second membre seront visiblement t' infini et $t'=0$, lorsque celles du premier seront $t=0$ et $t=u$, $t=0$ et $t=v$; puis comprenant la quantité constante $K+K_1$ dans les fonctions arbitraires, et changeant le signe des intégrales, on pourra, à une expression de la forme

$$z=\int y\,dt\,\varphi(t)+\int y_1\,dt\,\psi(t),$$

dans laquelle les intégrales sont prises, l'une entre $t=0$ et $t=u$, et l'autre entre $t=0$ et $t=v$, substituer celle-ci

$$z=\int Y\,dt'\varphi(u+t')+\int Y_1\,dt'\psi(v+t'),$$

dont les intégrales seront prises depuis t' infini jusqu'à $t'=0$.

1132. Ce qui précède renferme la substance de ce que contient le Mémoire de Laplace, relativement à l'intégration des équations différentielles partielles par des intégrales définies, et se lie parfaitement avec les travaux d'Euler sur les équations différentielles à deux variables, sur-tout lorsqu'on rapproche les n°s. 768 et 1125. En faisant dépendre de l'équation (b) la sommation des séries T et T_1, et réduisant par-là l'intégration de l'équation différentielle partielle (a), à celle d'une équation différentielle à deux variables, Laplace a réellement ramené l'intégrale de la première à ne dépendre uniquement que des intégrales définies, toutes les fois que la seconde sera susceptible d'être traitée par la méthode d'Euler, ou que les séries T et T_1 seront analogues à celle du n°. 1125.

La méthode par laquelle Parseval somme la suite
$AA'+BB'+CC'+$ etc. (n°. 1067),
conduit aussi à un résultat semblable ; car il est visible que la série

$$1+\frac{nv(u-t)}{1.1}+\frac{n^2v^2(u-t)^2}{1.2.1.2}+\frac{n^3v^3(u-t)}{1.2.3.1.2.3}+\text{etc.}$$

à laquelle nous sommes parvenus dans le n°. 1129, étant mise sous la forme

$$1+\frac{\alpha^2}{1.1}+\frac{\alpha^4}{1.2.1.2}+\frac{\alpha^6}{1.2.3.1.2.3}+\text{etc.}$$

en faisant $nv(u-t)=\alpha^2$, résulte des deux séries

$$1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha^2}{1.2}x^2+\frac{\alpha^3}{1.2.3}x^3+\text{etc.}=e^{\alpha x}$$

$$1+\frac{\alpha}{1}\frac{1}{x}+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{1}{x^2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{1}{x^3}+\text{etc.}=e^{\alpha\frac{1}{x}},$$

multipliés terme à terme; et on en trouvera par conséquent la somme en substituant successivement $\cos s+\sqrt{-1}\sin s$ et $\cos s-\sqrt{-1}\sin s$, à la place de x dans la fonction

$$e^{\alpha x}\times e^{\alpha\frac{1}{x}}=e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)};$$

on aura par là

$$e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{2\alpha\cos s^2+2\alpha\sqrt{-1}\cos s\sin s}{\cos s+\sqrt{-1}\sin s}}$$

$$e^{\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{2\alpha\cos s^2-2\alpha\sqrt{-1}\cos s\sin s}{\cos s-\sqrt{-1}\sin s}}.$$

multipliant le numérateur et le dénominateur de l'exposant dans la première formule par $\cos s-\sqrt{-1}\sin s$, et dans la seconde par $\cos s+\sqrt{-1}\sin s$, on verra facilement qu'elles se réduisent toutes deux à $e^{2\alpha\cos s}$, d'où l'on conclura que la série

$$1+\frac{\alpha^2}{1.1}+\frac{\alpha^4}{1.2.1.2}+\frac{\alpha^6}{1.2.3.1.2.3}+\text{etc.}=\frac{1}{\pi}\int e^{2\alpha\cos s}ds,$$

l'intégrale étant prise depuis $s=0$ jusqu'à $s=\pi$, et l'on passera à $T=\frac{1}{\pi}e^{-pv-qu}\int e^{2\alpha\cos s}ds$. Cette expression deviendra celle de T_1, lorsqu'on y supposera $nu(v-t)=\alpha^2$; et on aura enfin

$$z=\frac{1}{\pi}e^{-pv-qu}\left\{\iint e^{2\cos s.\sqrt{nv(u-t)}}ds\,dt\,\varphi(t)\right.$$
$$\left.+\iint e^{2\cos s.\sqrt{nu(v-t)}}ds\,dt\,\psi(t)\right\}.$$

1133. C'est d'une manière analogue que Parseval a intégré l'équation différentielle partielle à quatre variables,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Elle se transforme en $\frac{d^2z}{dt^2}=4a^2\frac{d^2z}{dudv}$, lorsqu'on fait

$$x+y\sqrt{-1}=u,\qquad x-y\sqrt{-1}=v,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}+\frac{dz}{dv},\qquad \frac{dz}{dy}=\left(\frac{dz}{du}-\frac{dz}{dv}\right)\sqrt{-1}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\quad\frac{d^2z}{du^2}+2\frac{d^2z}{dudv}+\frac{d^2z}{dv^2}$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{d^2z}{du^2}+2\frac{d^2z}{dudv}-\frac{d^2z}{dv^2};$$

faisant ensuite $4a^2=b^2$ et $z=A+Bt+Ct^2+Dt^3+Et^4+$ etc. il vient

$$1.2\,C+2.3\,Dt+3.4\,Et^2+4.5\,Ft^3+\text{etc.}=$$
$$b^2\left(\frac{d^2A}{dudv}+\frac{d^2B}{dudv}t+\frac{d^2C}{dudv}t^2+\frac{d^2D}{dudv}t^3+\text{etc.}\right),$$

d'où l'on tire les équations

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{b^2}{1.2}\,\frac{d^2A}{dudv}\\ E&=\frac{b^2}{3.4}\,\frac{d^2C}{dudv}\\ G&=\frac{b^2}{5.6}\,\frac{d^2E}{dudv}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}D&=\frac{b^2}{2.3}\,\frac{d^2B}{dudv}\\ F&=\frac{b^2}{4.5}\,\frac{d^2D}{dudv}\\ H&=\frac{b^2}{6.7}\,\frac{d^2F}{dudv}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}.$$

qui déterminent les quantités C, E, G, etc. au moyen de A, D, F, H, etc. au moyen de B, et l'on aura

$$z=\left\{\begin{aligned}&A+\frac{b^2t^2}{1.2}\,\frac{d^2A}{dudv}+\frac{b^4t^4}{1.2.3.4}\,\frac{d^4A}{du^2dv^2}+\frac{b^6t^6}{1.2\ldots6}\,\frac{d^6A}{du^3dv^3}+\text{etc.}\\ &+Bt+\frac{b^2t^3}{1.2.3}\,\frac{d^2B}{dudv}+\frac{b^4t^5}{1.2\ldots5}\,\frac{d^4B}{du^2dv^2}+\frac{b^6t^7}{1.2\ldots7}\,\frac{d^6B}{du^3dv^3}+\text{etc.}\end{aligned}\right\},$$

expression que l'on doit régarder comme complète, puisque les

lettres A et B peuvent représenter des fonctions arbitraires de u et v (*). Il est visible que la seconde suite étant désignée par T, la première sera $\frac{dT}{dt}$, pourvu qu'on y change B en A; et il suffit par conséquent de trouver la somme de l'une de ces suites.

Occupons-nous de la série

$$Bt + \frac{b^2t^3}{1.2.3}\frac{d^2B}{du\,dv} + \frac{b^4t^5}{1.2\ldots5}\frac{d^4B}{du^2dv^2} + \frac{b^6t^7}{1.2\ldots7}\frac{d^6B}{du^3dv^3} + \text{etc.}$$

Pour en trouver la somme par le théorême du n°. 1067, il faut observer qu'elle résulte du produit des suivantes, multipliées terme à terme

$$Bts - \frac{d^2B}{du\,dv}b^2t^3s^3 + \frac{d^4B}{du^2dv^2}b^4t^5s^5 -$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{1.2.3\,s^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5\,s^5} - \text{etc.}$$

La seconde est le développement de $\sin\frac{1}{s}$; et si l'on différentie la première par rapport à u et à v successivement, en la représentant

---

(*) L'artifice employé ci-dessus, pour transformer l'équation proposée, qui exprime les conditions du son, lorsque l'on ne donne que deux dimensions à l'air, et celles des vibrations d'une surface plane, est analogue à celui du n°. 769.

Il est bon de remarquer que dans sa Mécanique analytique, Lagrange a donné sous la forme

$$z = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \text{etc.}$$

l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

qui se rapporte au mouvement des fluides. Les relations des quantités A, B, C, D, etc. qui représentent des fonctions de x et de y, s'obtiennent facilement par la substitution de la valeur de z, et Lagrange trouve

$$z = A + B\frac{t}{1} - \left(\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{d^2A}{dy^2}\right)\frac{t^2}{1.2} - \left(\frac{d^2B}{dx^2} + \frac{d^2B}{dy^2}\right)\frac{t^3}{1.2.3}$$
$$+ \left(\frac{d^4A}{dx^4} + 2\frac{d^4A}{dx^2dy^2} + \frac{d^4A}{dy^4}\right)\frac{t^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

les fonctions A et B restent arbitraires (Méc. analyt. page 474).

par T, on reconnoîtra qu'elle dépend de l'équation

$$\frac{d^2T}{dudv}+\frac{1}{b^4t^2s^2}T=\frac{B}{b^2ts},$$

dans laquelle t, s et B sont regardés comme constantes ; on en auroit donc la somme si l'on pouvoit intégrer cette équation qui ne renferme que les trois variables T, u et v, ou du moins y satisfaire ; mais en faisant pour abréger

$$\frac{1}{b^4t^2s^2}=\lambda, \qquad \frac{1}{b^2ts}=p,$$

on verra facilement que l'expression

$$T=p\,\{\int du\int B\,dv-\lambda\int^2 du^2\int^2 B\,dv^2+\lambda^2\int^3 du^3\int^3 B\,dv^3-\text{etc.}\},$$

donnant

$$\frac{d^2T}{dudv}=pB-p\lambda\int du\int B\,dv+p\lambda^2\int^2 du^2\int^2 B\,dv^2-\text{etc.}$$

vérifie l'équation ci-dessus.

Un calcul semblable à celui du n°. 1129 ramenera les intégrales de la forme $\int^n du^n\int^n B\,dv^n$ à ne dépendre que de $\int du\int B\,dv$. En n'ayant d'abord égard qu'à v, et remplaçant B par $\psi(u,v)$, on trouvera

$$\int^m\psi(u,v)\,dv^m=\int\frac{(v-y)^m}{1.2\ldots\ldots m}\psi(u,y)\,dy,$$

pourvu qu'après l'intégration du second membre on fasse $y=v$, et on aura

$$\int^m du^m\int^m\psi(u,v)\,dv^m=\int^m du^m\int\frac{(v-y)^m}{1.2\ldots\ldots m}\psi(u,y)\,dy;$$

puis en observant que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations, le second membre de cette équation deviendra

$$\int\frac{(v-y)^m dy}{1.2.3\ldots\ldots m}\int^m\psi(u,y)\,du^m$$

où l'on changera $\int^m\psi(u,y)du^m$ en $\int^m\frac{(u-x)^m}{1.2\ldots m}\psi(x,y)\,dx$,

la dernière intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=u$: on aura donc enfin

$$\int^m du^m \int^m \psi(u,v)\, dv^m = \iint \frac{(u-x)^m (v-y)^m}{1.2\ldots m.1.2\ldots m} \psi(x,y)\, dx\, dy;$$

$$T = p\iint \psi(x,y)\, dx\, dy \left\{1 - \frac{\lambda(u-x)(v-y)}{1.1} + \frac{\lambda^2(u-x)^2(v-y)^2}{1.2.1.2} - \frac{\lambda^3(u-x)^3(v-y)^3}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}\right\}.$$

La série comprise entre les accolades se transforme en

$$1 - \frac{\alpha^2}{1.1} + \frac{\alpha^4}{1.2.1.2} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}$$

lorsqu'on y fait $\sqrt{\lambda(u-x)(v-y)} = \alpha$ et dépend des suivantes

$$1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.} = e^{\alpha x}$$

$$1 - \frac{\alpha}{1x} + \frac{\alpha^2}{1.2x^2} - \frac{\alpha^3}{1.2.3x^3} + \text{etc.} = e^{-\alpha\frac{1}{x}};$$

on en obtiendra donc la somme, en substituant à x les expressions $\cos r + \sqrt{-1}\sin r$, et $\cos r - \sqrt{-1}\sin r$. Un calcul absolument semblable à celui du n°. précédent donnera pour cette somme

$$\frac{1}{2\pi}\int\left(e^{-2\alpha\sqrt{-1}\sin r} + e^{2\alpha\sqrt{-1}\sin r}\right)dr = \frac{1}{\pi}\int dr\cos(2\alpha\sin r),$$

ou $\int dr\cos(2\sqrt{\lambda(u-x)(v-y)}.\sin r)$,

et l'on conclura de là que

$$T = p\iint\left\{\frac{1}{\pi}\int dr\cos(2\sqrt{\lambda(u-x)(v-y)}.\sin r)\right\}\psi(x,y)\, dx\, dy,$$

où il faut se rappeler que l'intégrale relative à r doit être prise depuis $r=0$ jusqu'à $r=\pi$, tandis que celles qui se rapportent à x et y ont respectivement pour limites $x=0$ et $x=u$, $y=0$ et $y=v$.

Pour achever la sommation que nous nous sommes proposée, il nous reste à remettre dans la valeur de T celles de λ et de p, qui sont $\frac{1}{b^2t^2s^2}$ et $\frac{1}{b^2ts}$, et à combiner le résultat précédent avec l'expression $\sin\frac{1}{s}$, en mettant dans l'un et dans l'autre $\cos q + \sqrt{-1}\sin q$ et $\cos q - \sqrt{-1}\sin q$, au lieu de s (n°. 1067). Les détails de ces calculs étant assez compliqués, nous les suppri-

merons; et désignant par les lettres Q et Q', ce que devient après ces substitutions le produit des fonctions

$$p\int dr \cos\left(2\sqrt{\lambda(u-x)(v-y)}.\sin r\right) \text{ et } \sin\frac{1}{s},$$

nous aurons

$$Bt+\frac{d^2B}{dudv}\,\frac{b^2t^3}{1.2.3}+\text{etc.}=\iint\frac{1}{\pi^2}\int\frac{Q+Q'}{2}\,dq\,\psi(x,y)\,dx\,dy;$$

l'intégrale relative à q étant prise depuis $q=0$ jusqu'à $q=\pi$. Mettant dans cette dernière expression $\varphi(x,y)$ au lieu de $\psi(x,y)$, pour y tenir la place de A, et différentiant par rapport à t, il viendra

$$A+\frac{d^2A}{dudv}\,\frac{b^2t^2}{1.2}+\text{etc.}=\frac{d.\left\{\iint\frac{1}{\pi^2}\int\frac{Q+Q'}{2}\,dq\,\varphi(x,y)\,dx\,dy\right\}}{dt},$$

et enfin

$$z=\iint\frac{1}{\pi^2}\int\frac{Q+Q'}{2}\,dq\,\psi(x,y)\,dx\,dy$$
$$+\frac{d\left\{\iint\frac{1}{\pi^2}\int\frac{Q+Q'}{2}\,dq\,\varphi(x,y)\,dx\,dy\right\}}{dt};$$

Il est aisé de voir que chacun des termes de ce résultat renferme implicitement quatre intégrations successives. Nous donnerons plus bas une autre manière de satisfaire, avec des intégrales définies, à l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

1134. Dans le Mémoire cité au n°. 1109, Laplace, après avoir obtenu des séries qui donnent les valeurs approchées des intégrales dans lesquelles entrent comme exposans des nombres très-grands, développe une méthode pour ramener à des intégrales définies les fonctions déterminées par des équations aux différences. Voici l'esprit de cette méthode.

Application des form. $\int e^{-ux}v\,du$, $\int u^x v\,du$, etc. à l'intégration des équations aux différences et différentielles.

Soit l'équation du premier degré et d'un ordre quelconque aux différences

$$X=Ay_x+B\Delta y_x+C\Delta^2y_x+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots(1),$$

dans laquelle A, B, C, etc. représentent des fonctions rationnelles

et entières de la variable x, et peuvent être mis par conséquent sous l'une ou l'autre de ces formes (n°. 903) :

$$A = a + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.} \qquad A = a + a_1 [\overset{1}{x}] + a_2 [\overset{2}{x}] + \text{etc.}$$

$$B = b + b_1 x + b_2 x^2 + \text{etc.} \qquad B = b + b_1 [\overset{1}{x}] + b_2 [\overset{2}{x}] + \text{etc.}$$

Dans le premier cas on fera $y = \int e^{-ux} v\,du$; on supposera que les limites de l'intégrale soient indépendantes de x, v étant une fonction de u seul, et il en résultera

$$\Delta y_x = \int e^{-ux}(e^{-u} - 1) v\,du, \qquad \Delta^2 y_x = \int e^{-ux}(e^{-u} - 1)^2 v\,du, \text{ etc.}$$

Si, pour abréger, on fait $e^{-ux} = \alpha$, on aura

$$x e^{-ux} = -\frac{d\alpha}{du}, \quad x^2 e^{-ux} = \frac{d^2\alpha}{du^2}, \quad x^3 e^{-ux} = -\frac{d^3\alpha}{du^3}, \text{ etc.}$$

et substituant dans l'équation (1) ces expressions, ainsi que les précédentes, on obtiendra

$$X = \int v\,du \left\{ \begin{array}{l} \alpha(a + b(e^{-u} - 1) + c(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}) \\ -\dfrac{d\alpha}{du}(a_1 + b_1(e^{-u} - 1) + c_1(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}) \\ +\dfrac{d^2\alpha}{du^2}(a_2 + b_2(e^{-u} - 1) + c_2(e^{-u} - 1)^2 + \text{etc.}) \\ -\text{ etc.} \end{array} \right\}.$$

Dans le second cas, on fera $y = \int u^x v\,du$, $u^x = \alpha$; on aura par conséquent

$$\Delta y_x = \int \alpha(u - 1) v\,du, \qquad \Delta^2 y_x = \int \alpha(u - 1)^2 v\,du, \text{ etc.}$$

$$[\overset{1}{x}] u^x = u \frac{d\alpha}{du}, \quad [\overset{2}{x}] u^x = u^2 \frac{d^2\alpha}{du^2}, \text{ etc.}$$

$$X = \int v\,du \left\{ \begin{array}{l} \alpha(a + b(u - 1) + c(u - 1)^2 + \text{etc.}) \\ +u\dfrac{d\alpha}{du}(a_1 + b_1(u - 1) + c_1(u - 1)^2 + \text{etc.}) \\ +u^2\dfrac{d^2\alpha}{du^2}(a_2 + b_2(u - 1) + c_2(u - 1)^2 + \text{etc.}) \\ \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Ce résultat et le précédent sont compris dans la formule

$$X = \int v\,du \left\{ M\alpha + N\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d^2\alpha}{du^2} + Q\frac{d^3\alpha}{du^3} + \text{etc.} \right\},$$

M,

$M, N, P, Q,$ etc. étant des fonctions de u seul. Comme ce n'est que dans α que se trouve la variable x, on peut la faire sortir entièrement du signe $\int$ en intégrant par parties (n°. 361), et l'on aura

$$X = \int \alpha\, du \left\{ M\nu - \frac{d(N\nu)}{du} + \frac{d^2(P\nu)}{du^2} - \frac{d^3(Q\nu)}{du^3} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \, const. + \alpha \left\{ N\nu - \frac{d(P\nu)}{du} + \frac{d^2(Q\nu)}{du^2} - \text{etc.} \right\}$$
$$+ \quad \frac{d\alpha}{du} \left\{ P\nu - \frac{d(Q\nu)}{du} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \quad \frac{d^2\alpha}{du^2} \left\{ Q\nu - \text{etc.} \right\}$$
$$+ \text{ etc.}$$

Maintenant puisque la fonction ν est indépendante de x, il faut que la partie soumise au signe d'intégration dans l'équation ci-dessus, soit nulle par elle-même, ce qui fournit l'équation

$$M\nu - \frac{d(N\nu)}{du} + \frac{d^2(P\nu)}{du^2} - \frac{d^3(Q\nu)}{du^3} - \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

pour déterminer la fonction ν; et il restera ensuite à satisfaire à l'équation

$$X = const. + \alpha \left\{ N\nu - \frac{d(P\nu)}{du} + \frac{d^2(Q\nu)}{du^2} - \text{etc.} \right\} \ldots\ldots (3)$$
$$+ \frac{d\alpha}{du} \left\{ P\nu - \frac{d(Q\nu)}{du} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \frac{d^2\alpha}{du^2} \left\{ Q\nu - \text{etc.} \right\}$$
$$+ \text{ etc.}$$

qui fera connoître les limites de l'intégrale $\int \alpha\, \nu\, du$.

Il est à remarquer que l'équation (2) est précisément celle qui exprime les conditions d'intégrabilité de la fonction différentielle

$$\nu\, du \left\{ M\alpha + N\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d^2\alpha}{du^2} + Q\frac{d^3\alpha}{du^3} + \text{etc.} \right\};$$

ν peut donc être regardé comme le facteur qui rend intégrable l'équation

$$M\alpha + N\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d^2\alpha}{du^2} + Q\frac{d^3\alpha}{du^3} + \text{etc.} = 0$$

de l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation (2); et il est facile de voir que l'ordre de celle-ci dépend du degré où montent les puissances de x dans les coefficiens de la proposée (1).

Pour montrer comment on doit employer l'équation (3), nous supposerons d'abord que l'on ait $X=0$; et supprimant la constante, il faudra que ce qui reste de l'équation s'évanouisse, lorsqu'on y substitue pour u les deux valeurs relatives aux limites de l'intégrale $\int \alpha v du$. On remplit une fois cette condition en donnant à u une valeur qui fasse évanouir en même tems les quantités

$$\alpha, \quad \frac{d\alpha}{du}, \quad \frac{d^2\alpha}{du^2}, \text{ etc.}$$

savoir: u infini lorsqu'on prend $\alpha = e^{-ux}$, et $u=0$ quand $\alpha = u^x$; mais c'est au moyen des constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de v, que l'on obtient la seconde limite, en déterminant ces constantes, de manière que chaque ligne de l'équation (3) s'évanouisse d'elle-même: on obtient ainsi un nombre d'équations

$$N v - \frac{d(Pv)}{du} + \frac{d^2(Qv)}{du^2} - \text{etc.} = 0$$

$$P v - \frac{d(Qv)}{du} + \text{etc.} = 0$$

$$Q \quad - \text{etc.} = 0$$

etc.

égal à celui des constantes. On éliminera toutes ces constantes, à l'exception d'une seule; les valeurs de u, tirées de l'équation finale, seront autant de limites de l'intégrale $\int \alpha v du$: on les introduira dans les expressions des autres constantes, et on en déduira un pareil nombre de valeurs de v, que nous représenterons par v', v'', v''', etc. Par ce moyen on aura successivement les expressions

$$y = \int \alpha v' du, \quad y = \int \alpha v'' du, \quad y = \int \alpha v''' du + \text{etc.}$$

qui satisferont à la proposée, et comme elle est du premier degré par rapport à la fonction y et à ses coefficiens différentiels, on pourra faire

$$y = A' \int \alpha v' du + A'' \int \alpha v'' du + A''' \int \alpha v''' du + \text{etc.}$$

A', A'', A''', etc. étant des constantes arbitraires, et toutes les inté-

grales ayant pour une de leurs limites la valeur qui rend α et ses coefficiens différentiels nuls, et pour l'autre les diverses valeurs de u déterminées d'après ce qui précède.

On sent qu'il y auroit lieu à des discussions délicates et nécessaires sur la possibilité de déterminer u, sur le nombre et la nature de ses valeurs, circonstances desquelles dépend le succès de la méthode et la généralité des résultats; mais on ne peut ici que les indiquer comme objet de recherches.

Lorsque X n'est pas nul, il faut premièrement que cette fonction puisse être ramenée à la forme que prend le second membre de l'équation (3) après la substitution de l'expression complète de v, afin qu'en comparant de part et d'autre les termes semblables par rapport à x, on puisse obtenir des équations qui ne renferment que u et les constantes arbitraires introduites par l'expression de v. C'est par ces équations qu'on déterminera comme ci-dessus les limites de l'intégrale $\int \alpha v du$; mais on ne pourra pas dans le cas actuel multiplier chacune des valeurs particulières de y par une constante arbitraire, et Laplace propose en conséquence d'ajouter à la somme de ces valeurs l'expression de y, dans le cas où $x=0$, ce qui satisfait évidemment à l'équation proposée, puisque cette partie fait évanouir par lui-même le second membre de l'équation (3).

Il est visible que l'esprit de cette méthode consiste à donner à l'expression de y une forme telle que l'on puisse, après la substitution dans l'équation proposée, rendre entièrement indépendante de x la partie qui demeure soumise au signe d'intégration; elle peut s'appliquer à un systême d'équations du premier degré aux différences, entre un nombre quelconque de variables, et en ramène l'intégration à celle d'un systême d'équations différentielles du premier degré, mais cette dernière est le plus souvent sujette à des difficultés aussi grandes que celle du systême proposé.

1135. Lorsqu'on n'a qu'une seule équation du premier degré aux différences, l'ordre de l'équation (2) dépendant du plus haut exposant de la variable x, il en résulte qu'on ne peut guères résoudre généralement que celles où cette variable ne passe pas le premier degré, et que l'on peut représenter par

$$V+xT=0,$$

V et T étant des fonctions du premier degré de y_x et de ses différences. La supposition de $y=\int \alpha v\, du$, conduit alors à des résultats de la forme

$$Mv - \frac{d(Nv)}{du} = 0, \qquad const. + \alpha N v = 0;$$

le premier donne $v = \frac{A'}{N} e^{\int \frac{M}{N} du}$; A' étant une constante arbitraire, et le second conduit aux limites de l'intégrale.

Prenons pour exemple l'équation du premier ordre

$$y_{x+1} - (x+1) y_x = 0.$$

En y supposant $y_x = \int u^x v\, du$, ou $\alpha = u^x$, on obtiendra

$$v(1-u) - \frac{d(uv)}{du} = 0$$
$$v u^{x+1} = 0,$$

d'où l'on déduira $v = A' c^{-u}$, puis l'on aura $A' u^{x+1} c^{-u} = 0$, ce qui peut arriver de deux manières, 1°. lorsque $u=0$, 2°. lorsque u est infini; on aura donc $y_x = A' \int c^{-u} u^x du$, l'intégrale étant prise depuis $u=0$ jusqu'à u infini

Nous sommes retombés ici sur un des résultats du n°. 1110; car l'intégrale de l'équation $y_{x+1} - (x+1) y_x = 0$, est

$$y_x = A[\overset{x}{x}] \text{ (n°. 972).}$$

1136. La méthode que nous venons d'exposer convient aussi aux équations différentielles : Laplace le montre sur l'équation très-générale,

$$\left.\begin{aligned}(a+bx)y_x + (a'+b'x)\frac{dy_x}{dx} + (a''+b''x)\frac{d^2y_x}{dx^2} \\ + (a'''+b'''x)\frac{d^3y_x}{dx^3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0.$$

La supposition de $y_x = \int \alpha v\, du$, et de $\alpha = c^{-ux}$, conduit dans ce cas à

$$\int v\, du \left\{\begin{aligned} &\alpha(a - a'u + a''u^2 - a'''u^3 + \text{etc.}) \\ &- \frac{d\alpha}{du}(b - b'u + b''u^2 - \text{etc.}) \end{aligned}\right\} = 0,$$

et l'intégration par parties fournit les deux équations

$$v\{a-a'u+a''u^2-a'''u^3+\text{etc.}\}+\frac{d.v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})}{du}=0$$

$$e^{-ux}v(b-b'u+b''u^2-\text{etc.})=0;$$

la première étant de la forme

$$vM+\frac{d.vN}{du}=0,\ \text{ou}\ \frac{Mdu}{N}+\frac{Ndv+vdN}{Nv}=0,$$

donne

$$Nv\int\frac{Mdu}{N}=A',\ \text{ou}\ v=A'e^{-\int\frac{Mdu}{N}}\frac{1}{N};$$

l'équation des limites revient à $e^{-ux}vN=0$: elle est satisfaite lorsque u est infini, et par toutes les valeurs de u, qui font évanouir la fonction N, ou qui sont les racines de l'équation

$$b-b'u+b''u^2-\text{etc.}=0;$$

ces valeurs étant désignées par m', m'', etc. on aura

$$y=A'\int\alpha v\,du+A''\int\alpha v\,du+A'''\int\alpha v\,du+\text{etc.}$$

en observant de prendre la première intégrale, depuis $u=m'$ jusqu'à u infini, la seconde, depuis $u=m''$ jusqu'à u infini, et ainsi de suite.

1137. Si l'on représente par

$$Sz+Ty+V=0,$$

une équation dans laquelle S, T, V, soient des fonctions du premier degré par rapport à $z_{x,y}$ et à ses différences partielles, ou à ses différentielles partielles, et qu'on y fasse $z_{x,y}=\int t^x u^y v\,dt$, on obtiendra un résultat de la forme

$$\int t^x u^y v\,dt\{M+Nx+Py\}=0,$$

M, N, P, ne contenant que les variables t et u. Pour lui donner la forme $\int v\,dt\left\{M'\alpha+N'\frac{d\alpha}{dt}\right\}$, il faut regarder u et v comme des fonctions de t, et observer que

$$\frac{d.t^x u^y}{dt}=t^x u^y\left(\frac{x}{t}+\frac{y\,du}{u\,dt}\right);$$

faisant alors $t^x u^y = \alpha$,, et posant $\frac{x}{t}+\frac{Py}{Nt}=\frac{x}{t}+\frac{y\,du}{u\,dt}$, c'est-à-dire, $\frac{P}{Nt}=\frac{du}{u\,dt}$, d'où il suit $\frac{du}{u}=\frac{P\,dt}{Nt}$, on aura

$$\int v\,dt\left\{M\alpha + Nt\frac{d\alpha}{dt}\right\}=0.$$

En intégrant par parties, on obtiendra

$$Mv-\frac{d(Ntv)}{dt}=0, \quad Ntv\alpha=0.$$

L'expression de v, tirée de la première de ces équations, ne contenant point de fonction arbitraire, ne donnera qu'une valeur particulière de la fonction z; mais on peut y introduire une fonction arbitraire de la constante que doit renfermer l'expression de u tirée de l'équation différentielle $\frac{du}{u}=\frac{P\,dt}{Nt}$, et pour cela il faudra, en désignant cette constante par ω, supposer $z=\int\int t^x u^y v\,\varphi(\omega)\,dt\,d\omega$. Il est facile de s'assurer que cette formule satisfera aussi à l'équation proposée; les limites de l'intégration relative à ω n'étant assujetties qu'à la seule condition d'être indépendantes des variables x et y. Celles de l'intégration relative à t doivent se déduire de l'équation $Ntv\alpha=0$, et chacune des valeurs de t en u donnera pour l'expression de z un terme dans lequel on pourra mettre une fonction arbitraire distincte de celles qui entrent dans les autres.

1138. Ces recherches présentent un moyen très-simple et très-remarquable de satisfaire aux équations différentielles partielles à coefficiens constans; il suffit pour cela, si la fonction z ne dépend que de deux variables, de prendre $z=\int n^x p^y \varphi(p)\,dp$, $\varphi(p)$ désignant une fonction arbitraire. En effet, on a

$$\frac{dz}{dx}=\int n^x p^y \,\mathrm{l}n\,\varphi(p)\,dp, \qquad \frac{dz}{dy}=\int n^x p^y \,\mathrm{l}p\,\varphi(p)\,dp,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\int n^x p^y (\mathrm{l}n)^2\varphi(p)\,dp, \qquad \frac{d^2z}{dy^2}=\int n^x p^y (\mathrm{l}p)^2\varphi(p)\,dp,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=\int n^x p^y (\mathrm{l}n)(\mathrm{l}p)\,\varphi(p)\,dp;$$

en substituant ces valeurs dans l'équation

$$A\frac{d^2z}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dxdy}+C\frac{d^2z}{dy^2}+E\frac{dz}{dx}+F\frac{dz}{dy}+Gz=0,$$

elle deviendra

$$\int n^x p^y \varphi(p)\,dp\,\{A(1n)^2+B(1n)(1p)+C(1p)^2+E1n+F1p+G\}=0,$$

et sera satisfaite si

$$A(1n)^2+B(1n)(1p)+C(1p)^2+E1n+F1p+G=0.$$

On tirera généralement de celle-ci deux valeurs de $1n$; si on les désigne par $1P$ et $1P'$, on aura

$$z=\int P^x p^y \varphi(p)\,dp+\int P'^x p^y \varphi(p)\,dp;$$

les limites de p doivent être indépendantes de x et de y, mais sont d'ailleurs arbitraires.

Il est visible que le même procédé peut s'appliquer à toutes les équations du premier degré de quelqu'ordre qu'elles soient, pourvu qu'elles n'ayent point de terme indépendant de z, ou de ses coefficiens différentiels. Une modification facile à trouver, suffit pour le rendre applicable aux équations du même genre qui contiennent plus de trois variables; nous prendrons pour exemple l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}-a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0 \quad (\text{n}^\circ.\ 1133),$$

et nous y satisferons au moyen de l'expression

$$z=\iint m^t n^x p^y \varphi(n,p)\,dn\,dp,$$

qui donne

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\iint m^t n^x p^y (1m)^2 \varphi(n,p)\,dn\,dp$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\iint m^t n^x p^y (1n)^2 \varphi(n,p)\,dn\,dp$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\iint m^t n^x p^y (1p)^2 \varphi(n,p)\,dn\,dp,$$

et conduit par conséquent à

$$\iint m^t n^x p^y \varphi(n,p)\,dn\,dp\,\{(1m)^2-a^2((1n)^2+(1p)^2)\}=0.$$

Nous déterminerons m en posant

$$(1m)^2=a^2(1n)^2+(1p^2),$$

d'où il suit

$$\mathrm{l}m = \pm a\sqrt{(\mathrm{l}n)^2+(\mathrm{l}p)^2}, \qquad m = e^{\pm a\sqrt{(\mathrm{l}n)^2+(\mathrm{l}p)^2}};$$

et nous conclurons de là

$$z = \int\int e^{at\sqrt{(\mathrm{l}n)^2+(\mathrm{l}p)^2}} n^x p^y \varphi(n,p)\, dn\, dp$$
$$+ \int\int e^{-at\sqrt{(\mathrm{l}n)^2+(\mathrm{l}p)^2}} n^x p^y \psi(n,p)\, dn\, dp.$$

Ces solutions beaucoup plus faciles à obtenir que celle du n°. 1133 ; paroissent aussi plus simples à beaucoup d'égards : ce seroit une chose importante que de discuter leur généralité comparativement à celle des autres, et même à celle des intégrales exprimées immédiatement par les variables de l'équation ; mais, comme nous l'avons remarqué, n°s. 761, 765, il reste encore bien des difficultés à éclaircir dans la Théorie des équations différentielles partielles.

1139. On aura aussi par des intégrales définies les différences, les différentielles et les intégrales de toute fonction, qui dépendra d'équations, soit aux différences, soit différentielles, intégrables par les méthodes précédentes ; car cette fonction étant exprimée par des terme de la forme $A'\int u^x v\, du$, ou $A'\int e^{-ux} v\, du$,
on aura

$$\frac{d^n y_x}{dx^n} = A'\int u^x v\, du\, (\mathrm{l}u)^n, \qquad \Delta^n y_x = A'\int u^x v\, du\, (u-1)^n$$

ou bien

$$\frac{d^n y_x}{dx^n} = (-1)^n A'\int e^{-ux} u^n v\, du, \qquad \Delta^n y_x = A'\int e^{-ux} v\, du\, (e^{-u}-1)^n;$$

les intégrales $\int^n y_x dx^n$, et $\Sigma^n y_x$, se déduiront de ces formules en rendant négatif l'exposant n.

Nous prendrons pour exemple la fonction $\frac{1}{x^m}$, qui est l'intégrale de l'équation $\quad x\frac{dy}{dx} + my = 0.$

Cette équation étant traitée comme celle du n°. précéd. on en tire

$$mv - \frac{d.vu}{du} = 0, \qquad auv = 0,$$

d'où

d'où $v = A'u^{n-1}$, $y = \frac{1}{x^n} = A' \int e^{-ux} u^{n-1} du$,

et les limites de l'intégrale seront $u = 0$ et u infini. La constante devant être telle que la fonction se réduise à $= 1$, lorsque $x = 1$, et l'intégrale définie devenant alors $\int e^{-u} u^{n-1} du$, il en résulte

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\int e^{-ux} u^{n-1} du}{\int e^{-u} u^{n-1} du}.$$

L'expression que nous venons d'obtenir peut être employée à trouver les différences, les différentielles et les intégrales à *indices fractionnaires* de la fonction $\frac{1}{x^n}$ (n°. 1074); on en tire

$$\Delta^n \frac{1}{x^m} = \frac{\int u^{m-1} e^{-ux} du \, (e^{-u} - 1)^n}{\int u^{m-1} e^{-u} du};$$

en y changeant le signe de m, on aura $\Delta^n . x^m$. Laplace s'est particulièrement attaché à déterminer ces fonctions par des séries convergentes, et il a donné sur cela des détails où l'on ne sauroit entrer ici.

CHAPITRE IV.

Des équations aux Différences mêlées.

Théorie analytique des équations aux différences mêlées.

1140. NOUS avons montré suffisamment dans ce qui précède que le Calcul différentiel et le Calcul aux différences pouvoient s'appliquer l'un à l'autre; mais nous n'avons considéré qu'isolément les questions où il s'agit de déterminer une fonction par la connoissance de ses relations avec ses coefficiens différentiels, ou avec ses différences. Pour compléter le tableau des divers points de vue, sous lesquels on peut être conduit à la recherche d'une fonction au moyen des circonstances que présentent les changemens dont elle est susceptible, il nous reste à examiner le cas où la condition qui doit la déterminer mène à une équation contenant en même tems des coefficiens différentiels et des différences, et que nous appellerons *équation aux différences mêlées*. Ce genre d'équations, dont Condorcet et Laplace se sont occupés les premiers, n'est pas une simple combinaison de formules analytiques, il répond dans la Théorie des courbes à des questions aussi difficiles que variées, et quelques-unes de ces questions s'étoient déjà offertes aux Géomètres dès l'origine du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

L'équation $a\frac{dy}{dx} + b\Delta y + cy = 0$

est une des plus simples de celles qu'on peut se proposer entre les coefficiens différentiels et les différences; elle n'est que du premier degré et du premier ordre, tant par rapport au coefficient différentiel, qu'à l'égard de la fonction et de la différence. Si l'on suppose $\Delta x = 1$, on y pourra faire $y = Ce^{mx}$: elle se changera en $am + b(e^m - 1) + c = 0$; et toute détermination de m qui satisfera à cette dernière équation, donnera une valeur de y renfermant une constante arbitraire.

On satisferoit encore par la supposition de $y=Ce^{mx}$, à l'équation

$$a\frac{d\Delta y}{dx}+b\frac{dy}{dx}+c\Delta y+fy=0,$$

qui diffère de la précédente par le terme $a\frac{d\Delta y}{dx}$, dans lequel les caractéristiques d et Δ se trouvent combinées ; on auroit dans l'hypothèse établie

$$\frac{dy}{dx}=Ce^{mx}m,\quad \Delta y=Ce^{mx}(e^m-1),\quad \frac{d\Delta y}{dx}=Ce^{mx}m(e^m-1),$$

et pour déterminer m, on trouveroit l'équation

$$am(e^m-1)+bm+c(e^m-1)+f=0.$$

A ne considérer que les équations qui déterminent m, on ne soupçonneroit pas que les deux équations aux différences mêlées, que nous venons de rapporter, pussent ne pas admettre deux intégrales de la même généralité ; mais si l'on fait attention que la seconde contient des termes affectés en même tems des deux caractéristiques d et Δ, il sera facile de reconnoître que tandis que la première peut être envisagée comme le résultat de l'élimination de deux constantes arbitraires entre trois équations de la forme

$V=0,\quad dV=0,\quad \Delta V=0$..................... (1),

la seconde en suppose quatre de la forme

$V=0,\quad dV=0,\quad \Delta V=0,\quad d\Delta V=0$........... (2) ;

entre lesquelles on peut éliminer trois quantités.

Le dernier système d'équations offre aussi la possibilité d'éliminer entre les équations $V=0$ et $\Delta V=0$, une fonction arbitraire du genre de celles qui complètent les intégrales des équations aux différences (n°. 998) ; nommant $V'=0$ le résultat, on aura encore à éliminer une constante entre les équations

$V'=0.\quad dV'=0$.................................. (3).

Les équations qui sont le produit de cette dernière génération, sont toujours telles qu'en y regardant Δy comme une nouvelle variable, elles satisfont aux conditions relatives à l'intégrabilité des équations différentielles à trois variables, et se distinguent par-là de celles

qui résultent des équations (1) ou des équations (2). En considérant les équations

$dV'=0$, et $\Delta dV'=0$..............................(4);

dans lesquelles dV' représente une fonction différentielle quelconque du premier ordre et à deux variables, on obtiendroit des équations aux différences mêlées qui pourroient être mises sous la forme d'équation aux différences contenant les trois variables x, y et $\frac{dy}{dx}$. Biot, dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Institut, et dont nous avons tiré une grande partie de ce Chapitre, désigne sous le nom d'*équations aux différences-successives* celles que donnent les systêmes (3) et (4), parce qu'elles résultent immédiatement ou d'une différence succédant à une différentiation, ou d'une différentiation effectuée sur une différence.

1141. Toute équation aux différences successives doit être susceptible de deux intégrations distinctes, l'une par rapport à la caractéristique Δ et l'autre par rapport à la caractéristique d; mais il n'est pas indifférent de commencer par la première ou par la seconde de ces intégrations. Lorsque celle des différentielles peut s'effectuer la première, le résultat que l'on obtient d'abord contient une constante arbitraire, et l'intégration aux différences introduit ensuite une fonction arbitraire; mais si l'on intègre d'abord par rapport aux différences, on sera souvent obligé de particulariser la fonction arbitraire, pour effectuer l'intégration aux différentielles.

Soit pour exemple

$$\frac{dy}{dx}=x\Delta\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Cette équation ne renfermant que les variables x, et Δy que nous représenterons par z, peut être considérée, sous la forme

$$z=x\frac{dz}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dz^2}{dx^2},$$

comme une différentielle à deux variables; elle rentre alors dans la classe de celles qui s'intègrent après une différentiation (n°. 573).

On a $z = ax - \frac{1}{4}a^2$, d'où il résulte

$$\Delta y = ax - \tfrac{1}{4}a^2, \qquad y = \Sigma(ax - \tfrac{1}{4}a^2) + \varphi(\sin \pi x, \cos \pi x),$$

ou

$$y = \tfrac{1}{2}a(x^2 - x) - \tfrac{1}{4}a^2 x + \varphi(\sin \pi x, \cos \pi x).$$

En commençant par considérer l'équation proposée comme une différence, on lui donnera la forme

$$p = x\Delta p - \tfrac{1}{4}\Delta p^2,$$

dans laquelle $p = \frac{dy}{dx}$; et pour l'intégrer, il sera commode d'en prendre d'abord la différence (n°. 1009); on trouvera par cette méthode

$$x\Delta^2 p - \tfrac{1}{4}(2\Delta p\,\Delta^2 p + \Delta^2 p^2) = 0,$$

ce qui donne les deux facteurs

$$\Delta^2 p = 0, \qquad x - \tfrac{1}{4}(2\Delta p + \Delta^2 p) = 0:$$

en intégrant le premier, qui est le plus simple, on obtiendra $\Delta p = a$, et de là $p = ax - \frac{1}{4}a^2$.
Cette dernière équation est intégrable, mais elle ne le seroit plus en général, si l'on remplaçoit la constante a par la fonction $\varphi(\sin \pi x, \cos \pi x)$, qui est aussi constante par rapport aux différences.

Il est à propos de remarquer que le second facteur $x - \frac{1}{4}(2\Delta p + \Delta^2 p) = 0$, est relatif à l'intégrale indirecte de l'équation aux différences (n°. 1009).

Il n'est pas possible, dans l'état actuel de l'Analyse, de donner des procédés généraux pour l'intégration des équations aux différences mêlées; nous nous bornerons à observer qu'on peut les transformer en équations différentielles d'un ordre indéfini, en y substituant au lieu de Δy et de $\Delta \frac{dy}{dx}$, les séries

$$\frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Il restera ensuite à satisfaire à ces dernières équations de la manière la plus générale, ce qui sera souvent très-difficile (n°. 999).

1142. La détermination de l'étendue des intégrales des diverses espèces d'équations aux différences mêlées, est susceptible de discussions très-délicates, comme celle de l'étendue des intégrales des équations différentielles partielles, par rapport aux fonctions arbitraires qui peuvent y entrer (n°. 761), et l'on y appliqueroit les considérations employées dans les n°s. 764, 765, 804.

On prouveroit par les considérations développées dans les n°s. 1005 et 1006, que les équations aux différences mêlées ont aussi leurs *intégrales indirectes*, qui répondent aux solutions particulières des équations différentielles, et qui se déduisent également de l'intégrale *directe* par la variation des constantes arbitraires qu'elle contient, en assujettissant la fonction donnée par cette intégrale, à satisfaire encore, dans ce nouvel état, à l'équation aux différences mêlées. Cette condition établit entre les arbitraires des relations qui sont exprimées par une nouvelle équation aux différences mêlées. Lorsqu'on détermine les arbitraires par son moyen, on obtient une seconde équation primitive qui, satisfaisant à l'équation proposée, représente des courbes ayant à chaque point même tangente que quelqu'une de celles qui sont comprises dans l'intégrale proposée, et même sécante pour deux points dont les ordonnées sont éloignées d'une quantité égale à la différence de l'abscisse. Voilà ce qui arrive lorsque l'équation proposée ne renferme point les caractéristiques Δ et d appliquées l'une sur l'autre : si le contraire avoit lieu, l'intégrale directe et l'intégrale indirecte devroient s'accorder non-seulement dans les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, Δy, mais encore dans celles de $\Delta\frac{dy}{dx}$; et alors, en déterminant convenablement la constante arbitraire, il seroit possible de faire passer par deux points dont les ordonnées soient éloignées d'une quantité égale à la différence de l'abscisse, deux courbes données, l'une par l'intégrale directe, l'autre par l'intégrale indirecte, qui auroient à chacun des points dont il s'agit même tangente, et entre ces deux points même sécante. Ces résultats étant très-analogues à ceux qu'on trouve dans les n°s. cités, il n'a pas paru nécessaire de les exposer en détail.

1143. C'est principalement par la nature des questions géométriques qu'elles peuvent exprimer, que les équations aux différences mêlées doivent intéresser ceux qui cultivent les Mathématiques. La première de ces questions est le problème des *trajectoires réciproques* qui a beaucoup occupé Jean Bernoulli et Euler, qui l'ont résolu l'un et l'autre par des moyens fort ingénieux et fort élégans, mais indirects, quand on les compare à celui qui résulte de l'emploi des différences mêlées. Voici l'énoncé de ce problème. Application des équations aux différences mêlées, à des questions géométriques.

Trouver une courbe M'CM, fig. 6, *telle qu'en la faisant tourner sur un de ses points, autour d'un axe donné* AC, *pour la placer dans une situation contraire à la première, comme on le voit en* N'CN, *et la faisant mouvoir ensuite parallèlement à elle-même le long de cet axe, elle coupe par-tout la première* M'CM *sous un angle donné.* FIG. 6.

Si le point C désigne celui sur lequel la courbe $M'CM$ a tourné autour de l'axe AC, pour passer à une situation inverse $N'CN$, l'angle $M'CN$ sera double de l'angle $M'CA$, et sera d'ailleurs égal par l'hypothèse à l'angle $M'MO$ (*). Maintenant, menons par le point M l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AB ; l'angle OMP sera égal à QNP, à cause du parallélisme supposé dans le mouvement de la courbe $N'CN$; et parce que cette courbe est placée dans une situation contraire à celle de $M'CM$, l'angle QNP doit être le même que l'angle $Q'M'P'$, formé par cette dernière et l'ordonnée $P'M'$, prise de l'autre côté de AC, à une distance $A'P'$ égale à AP. Il suit de là que l'angle $M'MO$, composé de CMP et de OMP ou de QNP, est égal à $CMP + Q'M'P'$: telle est en dernière analyse la condition du problème, et c'est ainsi que l'envisageoit Jean Bernoulli.

En faisant $AP=x$, $PM=y$, $AP'=x'$, $P'M'=y'$, l'angle $M'CM=2c$, on aura $\tang CMP=\frac{dx}{dy}$, $\tang Q'M'P'=\frac{dx'}{dy'}$; et posant pour abréger $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dy'}{dx'}=p'$, il viendra

$$\text{angl.}\left(\tang=\frac{1}{p}\right)+\text{angl.}\left(\tang=\frac{1}{p'}\right)=2c$$
$$x'+x=0.$$

(*) Il faut se rappeler que les angles formés par les courbes, sont les mêmes que ceux de leurs tangentes.

Voilà les équations de la question écrites en différences mêlées. Il faut bien remarquer que la dernière équation exprime la loi de la variation de x, et que chacune des équations ne doit pas avoir lieu par elle-même, mais seulement que l'une étant posée, l'autre en est une suite nécessaire.

Ces équations sont faciles à intégrer : en effectuant d'abord, suivant le procédé du n°. 988, l'intégration relative aux différences, on trouvera

$$\text{angl.}\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + B(-1)$$

$$x = b(-1)^z,$$

B et b étant des fonctions arbitraires de $\sin \pi z$ et de $\cos \pi z$. La variable z s'élimine facilement ; en faisant $\frac{B}{b} = C$, il vient

$$\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + Cx, \text{ ou } \frac{1}{p} = \text{tang}\,\{c + Cx\},$$

d'où l'on conclut

$$p = \frac{1}{\text{tang}\,(c + Cx)} = \frac{1 - \text{tang}\,c\,\text{tang}\,Cx}{\text{tang}\,c + \text{tang}\,Cx}.$$

On peut mettre cette valeur sous la forme

$$p = \frac{1 + \cos 2c - \sin 2c\,\text{tang}\,Cx}{\sin 2c + (1 + \cos 2c)\,\text{tang}\,Cx}$$

$$= \frac{\cos 2c}{\sin 2c} + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 - \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}\,Cx}{1 + \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}\,Cx}\right\};$$

et en observant que la constante C doit être regardée comme une fonction arbitraire, qui ne change point lorsque l'on y met $-x$, au lieu de x, on fera $-\frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\,\text{tang}Cx = Xx$, en désignant par X une fonction quelconque de x assujettie seulement à demeurer constante quand on passe de $+x$ à $-x$: on aura ainsi

$$p = \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right\},$$

résultat

résultat semblable à celui qu'a trouvé Euler par une voie très-différente.

Si l'on y remet $\frac{dy}{dx}$, au lieu de p, on en tirera

$$y = x \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c} \int dx \left\{ \frac{1 + Xx}{1 - Xx} \right\}.$$

Lorsqu'on prend $X = 0$, on trouve d'abord la ligne droite, qui doit en effet satisfaire à la question proposée; posant ensuite $X = x^{n}$, il vient

$$y = x \cot 2c - \frac{1}{\sin 2c} \left\{ x - 2 \int \frac{dx}{x^{2n+1} - 1} \right\},$$

expression qui ne dépend que de l'intégration de la fraction rationnelle $\frac{dx}{x^{2n+1} - 1}$.

Bernoulli et Euler ne se sont pas bornés à résoudre généralement le problême des trajectoires réciproques, ils ont eu spécialement pour but de chercher parmi ces courbes celles qui pouvoient être algébriques, et sous ce point de vue tous leurs travaux rentrent dans le Calcul intégral *indéterminé* (n°s. 532 et suiv.).

1144. Parmi le nombre assez grand de questions qu'Euler a résolues sur ce sujet, nous choisirons encore la suivante qui est peu connue.

Trouver toutes les courbes telles qu'en menant par chacun de leurs points deux droites AM, MM', fig. 7, *faisant le même angle avec la tangente* TM, *la première étant dirigée à un point fixe* A, *la seconde terminée à la courbe en* M', *la ligne* M'A *fasse avec la tangente* M't *le même angle que* MM' (*). FIG. 7.

(*) Ceux qui connoissent les loix de la réflexion de la lumière, verront que le rayon parti du point *A*, et dirigé suivant *AM*, seroit réfléchi deux fois par la courbe cherchée, la première de *M* en *M'*, la seconde de *M'* en *A*, et retourneroit par conséquent au point d'où il est émané. Ce problême a été proposé dans les *acta eruditorum*, ann. 1745 (en septembre).

Les conditions de ce problême sont contenues dans les deux équations

$$\text{angle } AMT = \text{angle } M'Mt, \qquad \text{angle } AM't' = \text{angle } MM'T',$$

dont une doit donner la loi des variations de x. Soit

$$AP = x,\ PM = y,\ AP' = x',\ P'M' = y',\ \frac{dy}{dx} = p,\ \frac{dy'}{dx'} = p',\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = P;$$

en menant $M'Q$, parallèle à l'axe AB des x, et prolongeant MP jusqu'au point Q, on aura

$$\operatorname{tang} MM'Q = \frac{MQ}{M'Q} = \frac{MP+PQ}{M'Q} = \frac{MP+P'M'}{M'Q} = \frac{y-y'}{x'-x}$$
$$= -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -P,$$

en n'ayant point égard au signe de y' qu'on peut supposer négatif dans la figure citée. Cela posé, si l'on observe que les angles $MM'Q$, MOT, $M'OT'$, sont égaux, et que l'on considère les angles extérieurs des triangles OMT, AMT, on trouvera

$$\operatorname{tang} M'Mt = \operatorname{tang}(PTM + MM'Q) = \frac{p-P}{1+pP},$$

$$\operatorname{tang} AMT = \operatorname{tang}(PAM - PTM) = \frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x}p} = \frac{y - px}{x + py};$$

la première condition à remplir donnera l'équation

$$\frac{y-px}{x+py} = \frac{p-P}{1+pP} \qquad (1).$$

La relation des angles des triangles $OM'T'$ et $AM'T'$ conduit de même à

$$\operatorname{tang} MM'T' = -\operatorname{tang}(P'T'M' + MM'Q) = -\frac{p'-P}{1+p'P},$$

$$\operatorname{tang} AM't' = \operatorname{tang}(P'AM' + P'T'M') = \frac{-\frac{y'}{x'} + p'}{1 + \frac{y'}{x'}p'} = -\frac{y'-p'x'}{x'+py'},$$

d'où l'on conclut pour la seconde condition

$$\frac{y'-p'x'}{x'+p'y'} = \frac{p'-P}{1+p'P} \qquad (2).$$

Tirons maintenant des équations (1) et (2), les valeurs de P; nous obtiendrons

$$P=\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$P=\frac{y'-2p'x'-p'^2y'}{p'^2x'-2p'y'-x'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

ce qui nous donnera l'équation

$$\frac{y'-2p'x'-p'^2y'}{p'^2x'-2p'y'-x'}-\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

de laquelle il résulte que la fonction $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$ ne change point lorsque x devient x'. Telle est l'hypothèse dans laquelle il faut intégrer l'équation (3), qui répond alors à $\frac{\Delta y}{\Delta x}=const$, et donne $y=x\times const+\varphi(const)$; nous aurons donc

$$y=x\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\}+\varphi\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\}.$$

La caractéristique φ désignant une fonction arbitraire, donne à ce résultat une très-grande généralité, mais aussi on ne sauroit dans cet état l'intégrer par rapport aux différentielles.

Il est intéressant de connoître ce qu'exprime la fonction $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$; c'est à quoi on parvient en la mettant sous la forme

$$-\frac{\frac{y-px}{x+py}-p}{1+p\left(\frac{y-px}{x+py}\right)},$$

et en observant que $p=\text{tang}\,PTM$, $\frac{y-px}{x+py}=\text{tang}\,AMT$. elle se change alors en $-\text{tang}\,(AMT-PTM)$, et montre que la différence des angles AMT et PTM, ne doit pas varier dans le passage du point M au point M', ce dont il est encore facile de s'assurer immédiatement par les considérations géométriques.

Biot, dont nous suivons ici le mémoire, donne à la fonction φ

plusieurs formes desquelles il résulte successivement un cercle; limite d'une infinité d'ellipses, et l'assemblage de deux droites, limite d'une infinité d'hyperboles: nous ne rapporterons point les calculs qui mènent à ces résultats, et dans lesquels il ne s'agit que d'intégrer une équation différentielle du premier ordre; nous dirons seulement qu'il faut, pour arriver au cercle, prendre $\varphi\left(\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right)=0$, et faire, pour obtenir l'ellipse et l'hyperbole,

$$\varphi=-2C\left\{\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right\}$$

Si on prend les limites des équations (3) et (5) dans la supposition où x devient infini, y, p et P demeurant finis, ce qui place le point A à une distance infinie de la courbe (*), on obtiendra

$$P=-\frac{2p}{p^2-1},\qquad \frac{2p'}{p'^2-1}-\frac{2p}{p^2-1}=0,$$

d'où l'on conclura

$$y=-\frac{2px}{p^2-1}+\varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right).$$

En faisant $\varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right)=0$, on aura seulement

$$y=-\frac{2px}{p^2-1},\ \text{d'où}\ x+py=\sqrt{x^2+y^2},$$

ce qui revient à

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx,\ \text{et donne}\ \sqrt{x^2+y^2}=x+C.$$

Cette dernière équation appartient à une parabole.

L'équation $\frac{p'}{p'^2-1}-\frac{p}{p^2-1}=0$, nous apprend que toutes les courbes qui résolvent ce cas de la question proposée, ont, aux points M et M', des tangentes parallèles ou perpendiculaires. En effet, en réduisant ses deux membres au même dénominateur, et passant tous les termes dans un seul, on lui donnera la forme

$$(pp'+1)(p'-p)=0,$$

et l'on en tirera par conséquent $p'p'+1=0$, $p'-p=0$.

(*) Dans ce cas du problême le rayon lumineux vient parallèlement à l'axe AB.

1145. Les deux questions que nous venons de résoudre se rapportent aux différences successives ; en voici une très-simple qui mène à une équation aux différences mêlées proprement dites.

Trouver les courbes dans lesquelles la soutangente AT, fig. 3, *soit à la sousécante* AS, *dans un rapport constant, en supposant que la seconde ordonnée* A'B' *soit éloignée de la première* AB *d'une quantité* AA' *égale à* h. Fig. 3.

Il est facile de voir que ce problème conduit à une équation de la forme
$$\frac{dy}{dx} = a\frac{\Delta y}{h}.$$

Si l'on met dans cette équation, à la place de Δy, son développement en série, on aura l'équation différentielle d'un ordre indéfini
$$(a-1)\frac{dy}{dx} + a\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2} + a\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^2}{2.3} + \text{etc.} = 0,$$
à laquelle on satisfait en prenant $y = Ae^{mx}$, pourvu que m soit déterminée par l'équation
$$(a-1)m + a\frac{m^2h}{2} + a\frac{m^3h^2}{2.3} + \text{etc.} = 0,$$
d'où l'on conclut d'abord $m = 0$, puis
$$\frac{a-1}{a} + \frac{mh}{2} + \frac{m^2h^2}{2.3} + \frac{m^3h^3}{2.3.4} + \text{etc.} = 0.$$

Si on désigne par m', m'', m''', etc. les valeurs données par cette dernière, il viendra
$$y = A + A'e^{m'x} + A''e^{m''x} + \text{etc.}$$
expression dans laquelle on pourra faire entrer autant de termes qu'on aura trouvé de valeurs distinctes pour m. On s'assurera par le retour des suites qu'il en existe au moins une réelle, dont on peut obtenir le développement ordonné suivant les puissances de $\frac{a-1}{a}$, et l'on aura, pour résoudre la question proposée, l'équation
$$y = A + A'e^{m'x},$$
renfermant deux constantes arbitraires.

Feu Charles (de l'Académie des Sciences) a transformé l'équation aux différences mêlées qui nous occupe, en une autre où la variable entre comme exposant de différentiation ou d'intégration. Pour y

parvenir, nous ferons $\frac{h}{a} = b$, ce qui changera l'équation proposée en

$$\Delta y = b \frac{dy}{dx};$$

nous en tirerons successivement

$$y_1 = y + b \frac{dy}{dx},$$
$$y_2 = y_1 + b \frac{dy_1}{dx} = y + 2b \frac{dy}{dx} + b^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$
$$y_3 = y_2 + b \frac{dy_2}{dx} = y + 3b \frac{dy}{dx} + 3b^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b^3 \frac{d^3y}{dx^3},$$

etc.

Il est facile de conclure de là et même de s'assurer, *à priori*, que

$$y_n = y + [n]^{1} [0]^{-1} b \frac{dy}{dx} + [n]^{2} [0]^{-2} b^2 \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\ldots\ldots + [n]^{n} [0]^{-n} b^n \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Le second membre de cette équation étant multiplié et divisé par $e^{\frac{x}{b}}$, son numérateur deviendra le développement de $\frac{b^n d^n (e^{\frac{x}{b}} y)}{dx^n}$, et l'on aura par conséquent

$$y_n = \frac{b^n}{e^{\frac{x}{b}}} \frac{d^n (e^{\frac{x}{b}} y)}{dx^n}.$$

Si l'on avoit cherché les valeurs antécédentes à y ou correspondantes à des indices négatifs, on auroit eu

$$y_{-n} = \frac{1}{b^n e^{\frac{x}{b}}} \int^n e^{\frac{x}{b}} y \, dx^n.$$

Ces résultats ne paroissent pas propres à faire connoître l'équation primitive de la courbe cherchée, mais ils conduisent à une construction discontinue, analogue à celle que nous avons donnée dans le n°. 1003, pour les équations aux différences. En effet, on y peut supposer $y = \varphi(x)$, φ désignant une fonction arbi-

traire, et déduire de cette fonction d'après la loi établie, les valeurs des ordonnées y_1, y_2, y_3, etc. correspondantes aux abscisses $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, etc. Il est évident que cela revient à prendre sur la courbe représentée par l'équation $y=\varphi(x)$, une portion BB', dans laquelle le rapport de AT et AS soit conforme aux données de la question, et à se servir des points intermédiaires pour obtenir des portions de courbes antérieures et postérieures à la partie BB', en calculant les ordonnées de ces portions par le moyen de leurs différences avec celles de la portion BB', ainsi qu'on l'a indiqué dans le n°. cité. Si l'on vouloit rapporter les ordonnées y_n et y_{-n} à leurs abscisses, il faudroit prendre pour première abscisse $x-nh$, et $x+nh$; on auroit alors

$$y_n=\frac{b^n}{e^{\underline{x-nh}}}\frac{d^n\varphi(x-nh)}{dx^n},\quad y_{-n}=\frac{b}{b^n e^{\frac{x+nh}{b}}}\int^n dx^n\varphi(x+nh).$$

1146. Le Calcul aux différences mêlées trouve aussi son application dans des recherches purement analytiques; Français de Colmar a montré, dès l'an 5, l'usage qu'on peut en faire, pour arriver à l'expression immédiate d'une transformée quelconque de l'équation différentielle partielle

$$\frac{d^2 z}{du\,dv}+P\frac{dz}{du}+Q\frac{dz}{dv}+Nz=0,$$

traitée par la méthode du n°. 772 (*). En effet, pour peu qu'on ait réfléchi sur cette méthode, on voit bien qu'il doit entrer dans l'expression des coefficiens P_n, Q_n, M_n, des différences ou des valeurs successives de l'indice n, avec des différentielles prises relativement aux variables x et y. Il faut se rappeler aussi que la détermination des fonctions arbitraires qui entrent d'une manière transcendante dans les intégrales des équations différentielles partielles, dépend d'une équation aux différences mêlées (n°. 993).

(*) Le Mémoire où se trouvent ces recherches m'a été envoyé le 15 nivôse an 6, et il étoit connu d'Arbogast avant ce tems. Il en avoit eu des essais que j'ai vus entre ses mains en l'an 2.

Je terminerai ici la longue tâche que je me suis imposée, en observant que la durée de l'impression a été assez considérable pour que la science ait fait pendant cet intervalle des progrès que j'ignore; qu'il a même été publié quelques ouvrages dont l'extrait n'a pu entrer à la place que je lui aurois assignée dans le corps du mien, s'ils m'eussent été connus à tems; tels sont: les *Disquisitiones analyticæ* de M. Pfaff, qui contiennent des recherches très-étendues, sur la sommation des suites d'arcs de cercles dont les tangentes forment des progressions données et sur l'équation différentielle

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dydx+(f+gx^n)ydx^2=Xdx^2,$$

traitée n°. 644, enfin sur le retour des suites; l'Analyse des réfractions de Kramp, et d'autres écrits dont on trouvera l'indication dans la table. J'avois annoncé aussi le dessein de traiter à part la Théorie algébrique des *séries récurrentes*, mais ayant publié depuis les principes de cette même Théorie, dans le *Complément des Elémens d'Algèbre à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations*, j'ai cru pouvoir la supprimer ici, puisqu'on y suppléera parfaitement en ajoutant à ce que j'ai dit dans l'ouvrage cité, ce qu'on trouve dans celui-ci sur la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples n°s. 368-371, et ce que contiennent les n°s. 1043, 1044.

FIN.

TABLE

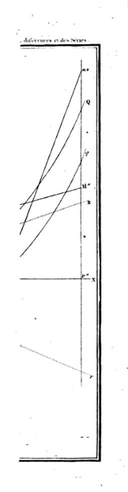

différences et des Séries.
Q
q
X
r

TABLE DES MATIÈRES.

OBSERVATION. *Les chiffres indiquent les numéros et non les pages.*

On n'a rappelé dans cette Table que les noms des Auteurs cités dans le texte; c'est dans les Tables particulières à chaque Volume, qu'on trouvera l'indication détaillée de ce qui a été écrit sur la Science.

A.

B.

(*) (*N. B. Le no 248 est double par erreur ; c'est le premier que l'on cite ici.*)

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

K.

L.

M.

Maxima

N.

Q.

R.

S.

T.

V.

W.

Fin de la Table des Matières.

OBSERVATION. *Je sens de plus en plus, tant par mes propres ouvrages, que par l'examen attentif de ceux des autres, la grande difficulté, pour ne pas dire l'impossibilité, d'imprimer correctement les livres de Mathématiques; mais mon expérience dans l'enseignement m'a convaincu que la plupart des fautes typographiques n'arrêtoient presque jamais les lecteurs intelligens, parce qu'elles étoient très-faciles à reconnoître, quand la marche du Calcul étoit tracée et que la conclusion étoit exacte. C'est probablement pour cette raison que beaucoup d'auteurs se sont épargné la peine de mettre des* errata *à la suite de leurs ouvrages; ceux qui n'ouvrent les livres que pour en regarder le commencement et la fin, les croyent plus corrects que les autres; mais les personnes qui étudient sérieusement sont bien éloignées d'en porter d'abord un pareil jugement. Aussi parmi les corrections que j'ai indiquées, pour ce volume et pour les précédens, les seules qui me paroissent de quelque importance sont celles qui ont pour objet des changemens que le progrès de la science a rendus nécessaires dans le texte, ou la rectification de quelques erreurs que j'ai remarquées depuis l'impression.*

Je n'ai pas la présomption de penser qu'il ne m'en soit pas échappé d'autres, mais je crois avoir quelques droits à l'indulgence des juges éclairés et impartiaux qui sauront mesurer l'étendue de la tâche que je me suis imposée, et apprécier les difficultés que j'ai dû rencontrer pour la remplir, dans un tems où ma position me livroit à des travaux absolument étrangers à mon entreprise.

CORRECTIONS ET ADDITIONS.

TOME II.

Page 173, ligne 22, *les expressions de t doivent être*

$$t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},\qquad t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

544, ligne dernière, *l'équation rapportée dans cette ligne doit être*

$$AF^2+BE^2+CD^2=4ABC+DEF.$$

N°. 770. La forme que nous avons donnée à la valeur de z, dans ce numéro, ne renfermant que des coefficiens différentiels des fonctions arbitraires φ et ψ, peut ne pas paroître assez générale pour la conclusion que nous en tirons, mais il est facile de la justifier pour le cas où z contiendroit des termes de la forme $N\int^m V d\alpha^m$. Chacun de ces termes pouvant être remplacé par la suite

$$\frac{N}{1.2\ldots m}\left\{\alpha^m\int V d\alpha+\frac{m}{1}\alpha^{m-1}\int V\alpha\, d\alpha\ldots\ldots+\int V\alpha^m d\alpha\right\} \quad (486),$$

il suffit de considérer ce qui résulte de l'expression de $z=N\int V d\alpha$, en supposant toujours que la fonction $\varphi(\alpha)$ ne soit qu'au premier degré dans V. La substitution de cette formule, effectuée comme celle dont on s'est servi dans le n°. cité, introduit le terme $N\int\frac{d^2V}{du\,dv}\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}$, contenant seul la fonction $\varphi''(\alpha)$; on en déduira par conséquent $\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv}=0$, de même que pour le cas où l'on n'avoit composé le développement de z que de coefficiens différentiels.

N°. 771. M. Paoli et Biot ont remarqué, chacun de leur côté, que la conclusion qui termine ce n°. n'est pas tout à-fait exacte, parce que la forme assignée par Laplace, à l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P_1\frac{dz}{dx}+Q_1\frac{dz}{dy}+N_1z=M_1,$$

n'est pas assez générale et ne comprend pas toutes celles qui peuvent avoir lieu. On trouvera des détails très-étendus sur cet objet et sur les remarques du n°. cité dans un travail complet qu'a entrepris Biot, sur les diverses formes des intégrales des équations différentielles partielles, et qu'il a présenté à l'Institut; en attendant, nous observerons qu'en substituant dans l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dy}=0,$$

qui est un cas particulier de l'équation exceptée

$$\frac{d^2z}{dx^2}+a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}+cz=0,$$

au lieu de z la série

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

où A, B, C, sont supposés des fonctions de y, on trouve

$$C=\frac{1}{1.2}\frac{dA}{dy},\quad D=\frac{1}{2.3}\frac{dB}{dy},\quad E=\frac{1}{3.4}\frac{dC}{dy},\quad F=\frac{1}{4.5}\frac{dD}{dy},\ \text{etc.}$$

les coefficiens A et B demeurant arbitraires peuvent être remplacés par les fonctions φ et ψ, et l'on a

$$z=\varphi(y)+x\psi(y)+\frac{x^2}{1.2}\varphi'(y)+\frac{x^3}{1.2.3}\psi'(y)+\frac{x^4}{1.2.3.4}\varphi''(y)+\frac{x^5}{1.2\ldots5}\psi''(y)+\text{etc.}$$

La fin de ce n°. indique une lacune dans l'ouvrage; le n°. cité 779, ne contient point ce qui est annoncé dans le texte, voici comment il faut y suppléer:

Page 573, l. 6, *au lieu de cette ligne et des suivantes*, *lisez*, procédé analogue à celui que nous allons appliquer à l'équation

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = 0,$$

dont la précédente n'est qu'un cas particulier.

Lorsque les coefficiens R, S, T, P, Q, N, sont des constantes, on satisfait à cette équation par la supposition de $z = Ae^{mx+ny}$, pourvu que les quantités m et n ayent entr'elles la relation indiquée par l'équation

$$Rm^2 + Smn + Tn^2 + Pm + Qn + R = 0;$$

l'une de ces quantités, ainsi que le coefficient A, demeurent par conséquent arbitraires, et à chaque valeur que l'on peut prendre pour m, par exemple, correspond en général une valeur particulière de n. Les expressions

$$z = A'e^{m'x+n'y}, \qquad z = A''e^{m''x+n''y}, \text{ etc.}$$

m' et n', m'' et n'', etc. désignant des valeurs correspondantes de m et de n, sont donc autant d'intégrales particulières de l'équation différentielle partielle proposée; et puisque cette équation est du premier degré, on aura

$$z = A'e^{m'x+n'y} + A''e^{m''x+n''y} + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, que la fonction cherchée sera exprimée par une suite renfermant deux quantités arbitraires dans chacun de ses termes.

Euler est le premier qui ait remarqué cette manière de satisfaire à une équation différentielle partielle; il en a donné dans son Calcul intégral, T. III, page 220, un exemple sur l'équation

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = az.$$

Laplace, pour varier la forme des intégrales que fournit la série ci-dessus, fait $m = n + ib$, et développe l'expression $z = Ae^{mx+ny}$, suivant les puissances de ib; puis dans le résultat qui est de la forme

$$z = A + ibB + i^2b^2C + i^3b^3D + \text{etc.}$$

B, C, D, etc. désignant des fonctions de x et de y, il remplace les quantités ib, i^2b^2, i^3b^3, etc. par des constantes arbitraires. Ce procédé est fondé sur ce que la fonction Ae^{mx+ny} doit satisfaire à l'équation différentielle partielle proposée, quelle que soit la valeur et la forme que l'on donne à la quantité m.

Il est visible que la supposition $z = Ae^{mx+ny}$ est comprise dans celle du n°. 1138.

TOME III.

Table, page viij, ligne 25, *Encyclopédie méthodique*, ajoutez, art. INTÉGRAL: 8; ligne 19, de deux fonctions, *lisez*, entre deux états d'une même fonction.

Page 78, lig. 14, $n\overset{n-}{[p]}$, *lis.* $n\overset{n-1}{[p]}$; lig. 15, le deuxième Δ de cette ligne doit être changé en Σ.

107, lig. 3, $\Sigma^m PQ$, *lis.* ΣPQ.

121, lig. 8 de la note, préféré ce, *lis.* à ce; lig. 12, cette, *lis.* à cette.

131, lig. 9, *en remont.* $S(-1)^x = y(-1)^x \ldots$, *lis.* $S(-1)^x y = (-1)^x \ldots\ldots$

139, lig. 10, 643, *lis.* 943.

142, ligne 4, observez que π désigne dans cet endroit la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, ou le rapport de la circonférence au diamètre, tandis que dans ce qui précède il a toujours représenté la circonférence du cercle dont le rayon est égal à l'unité.

171, lig. 5-4, *en remont.* la demi-circonférence, *lis.* le quart de la circonférence; lig. 4, donnée, *lis.* donné.

172, lig. 13, $\pi = \ldots$ *lis.* $\frac{\pi}{2}$.

183, lig. 5, *en remont.* 189, *lis.* 192.

205, lig. 4, *effacez le mot* finies.

232, lig. dern. π désigne la circonférence entière du cercle.

271, lig. dern. D_4, *lis.* D_3.

272, lig. 2, D_4, *lis.* D_3.
lig. 14, D_5, *lis.* D_4, D_1, *lis.* D_5.
lig. 16, D_5, *lis.* D_4.
lig. 25, $+P \ldots$ *lis.* $-P$; *ibid.* $\pm D_{x-1}$; *lis.* $\mp D_{x-1}$.

332, lig. 12, *voyez pour l'assertion énoncée*, le n°. 1117.

380, lig. 7, *en remont.* est égale, *lis.* étoit égale.

439, lig. dern. Livre II, *lis.* Livre I.

475, lig. 3, ici, *lis.* ici, d'après un écrit de M. Mascheroni.

